Cálculo 1

Conceptos fundamentales de introducción al cálculo

Clase 1

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Cálculo tiene como objetivo proporcionar una comprensión profunda de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral, así como su aplicación en diversas disciplinas. A lo largo de 16 semanas, los estudiantes desarrollarán un proyecto integral que les permitirá aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones reales. Este enfoque práctico no solo reforzará su comprensión teórica, sino que también les brindará habilidades analíticas y de resolución de problemas esenciales para su futura carrera académica y profesional.

Clase 1. Conceptos fundamentales de introducción al cálculo

Antes de adentrarse en los conceptos avanzados de cálculo, se repasarán algunos fundamentos esenciales, comenzando con las ecuaciones, es decir, qué son las ecuaciones, tanto las lineales como las de orden superior.

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones, generalmente compuestas por coeficientes y letras que representan incógnitas. Por ejemplo, en la ecuación $3x-10=2x$, el símbolo igual (=) indica la equivalencia entre las dos expresiones a ambos lados del signo.

1.1.Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal, también conocida como ecuación de primer grado, es aquella que presenta una o más incógnitas elevadas a la potencia uno.

Estas ecuaciones son fundamentales en matemáticas debido a su simplicidad y amplia aplicación. Por ejemplo:

1. $4x-20 = 12$
2. $5x-3 = 2x+8$

En ambos casos, las incógnitas (x) están elevadas a la primera potencia, lo que las clasifica como ecuaciones lineales.

Resolución de ecuaciones lineales

Para resolver una ecuación lineal con una sola incógnita, se siguen estos pasos:

Aislar la incógnita:

- Mover los términos con incógnitas a un lado de la ecuación y los términos constantes al otro lado.
- Por ejemplo, para la ecuación $4x-20 = 12$:
    - Movemos el -20 al otro lado sumando 20 a ambos lados: $4x = 12+20$
    - Simplificamos: $4x = 32$

Despejar la incógnita:

- Dividimos ambos lados por el coeficiente de x:
    - x = 32/4
    - Simplificamos: x = 8

Comprobación

Para comprobar la solución, sustituimos x = 8 en la ecuación original:

$$4(8) - 20 = 32 - 20 = 12$$

La igualdad se cumple, confirmando que x = 8 es la solución correcta.

1.2. Funciones racionales y polinómicas

Las funciones racionales y polinómicas son fundamentales en el estudio del cálculo y tienen amplias aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y las ciencias aplicadas. A continuación, se presentan sus características, propiedades y ejemplos.

1.2.1. Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son expresiones matemáticas de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son coeficientes reales y n es un número entero no negativo conocido como el grado del polinomio.

Las propiedades más importantes de las funciones polinómicas incluyen:

- **Continuidad y derivabilidad**: Las funciones polinómicas son continuas y derivables en todos los puntos de su dominio, que es todo el conjunto de números reales (Blanco & García, 2019).
- **Crecimiento y comportamiento asintótico**: El comportamiento de una función polinómica a medida que x tiende a infinito está determinado por su término de mayor grado.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$$

1.2.2. Funciones Racionales

Las funciones racionales se definen como el cociente de dos funciones polinómicas.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde

$P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas y $Q(x) \neq 0$.

Las propiedades de las funciones racionales incluyen:

- **Dominio**: El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos que hacen que $Q(x) = 0$ (López & Torres, 2020).
- **Asíntotas**: Las funciones racionales pueden tener asíntotas verticales (cuando $Q(x) = 0$ y horizontales (determinadas por el grado de los polinomios en el numerador y el denominador).

Ejemplo: $R(x) = \frac{3x^2-2}{x-1}$

Las funciones racionales y polinómicas son esenciales en el análisis matemático y tienen aplicaciones en la modelización de fenómenos naturales, optimización y otras áreas de la ciencia y la ingeniería (Martínez & Pérez, 2018).

1.3. Funciones aplicadas a modelo de negocios: costo, precio unitario, ingreso y lucro

Las funciones matemáticas son herramientas fundamentales para analizar y comprender los modelos de negocio. A continuación, se presentan algunas de las funciones clave relacionadas con el costo, el precio unitario, el ingreso y el lucro, y cómo se aplican en el contexto empresarial.

1.3.1. Función de costo (C)

La función de costo se refiere a la relación entre el costo total de producción y la cantidad producida. Se puede expresar como:

$$C(q) = C_f + C_v(q)$$

donde C_f representa los costos fijos (independientes de la cantidad producida) y C_v (q) los costos variables (dependientes de la cantidad producida q).

Esta función es esencial para determinar el nivel de producción óptimo y la estructura de costos de una empresa (Gómez & Rodríguez, 2019).

1.3.2. Función de precio unitario (P)

El precio unitario es el costo que un cliente debe pagar por cada unidad de producto. Este puede ser constante o variar según la cantidad producida o vendida. Matemáticamente, se puede representar como:

$$P(q) = \frac{Ingreso\,Total}{Cantidad\,Vendida}$$

El precio unitario es crucial para establecer estrategias de precios y maximizar la competitividad en el mercado (Martínez & López, 2020).

1.3.3. Función de ingreso (R)

El ingreso total (R) es el resultado de multiplicar la cantidad vendida (q) por el precio unitario (P). Se representa como:

$$R(q) = P(q) \cdot q$$

Esta función ayuda a las empresas a comprender cómo varía el ingreso con cambios en la cantidad de producto vendido y el precio unitario, permitiendo la planificación de ingresos y estrategias de ventas (Pérez & Sánchez, 2018).

1.3.4. Función de lucro (L)

El lucro o beneficio es la diferencia entre el ingreso total (R) y el costo total (C). Matemáticamente, se expresa como:

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

Esta función es fundamental para evaluar la rentabilidad de un negocio. Un análisis detallado de la función de lucro permite a las empresas tomar decisiones informadas sobre producción, precios y estrategias de mercado (Torres & Castillo, 2021).

1.4 Límites y asíntotas verticales y horizontales

En este tema se aborda la definición de límite, sus aplicaciones en diversos campos, como la ingeniería, y algunos ejemplos prácticos con funciones racionales y polinómicas

1.4.1. ¿Qué es un límite?

El límite es un concepto fundamental en cálculo y análisis matemático. Sirve como base para definir ideas cruciales como la continuidad, las derivadas y las integrales. El límite de una función en un punto describe el comportamiento de esa función cuando sus entradas se aproximan a un valor específico, aunque nunca alcancen ese valor exacto.

Aplicaciones prácticas de los límites

Los límites tienen múltiples aplicaciones prácticas en campos como:

- **Ingeniería**: Permiten calcular la eficiencia máxima de una máquina en condiciones ideales.
- **Física**: Ayudan a modelar fenómenos naturales y comportamientos físicos.
- **Economía**: Se utilizan para modelar el crecimiento o decrecimiento hacia un punto de estabilidad.

Definición matemática de límite

Matemáticamente, el límite de una función se expresa como sigue:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esto significa que el valor de $f_{(x)}$ se puede hacer tan cercano como se desee a un número L, siempre que x esté suficientemente cerca de a, pero no necesariamente igual a *a*.

Ejemplos de límites

A continuación, se presentan algunos ejemplos para entender mejor cómo funcionan los límites.

Ejemplo 1: Función Lineal

Calculemos el límite de la función 3x+1 cuando x tiende a 2:

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)$$

Simplemente reemplazamos *x* por 2 en la función:

$$3(2)+1=6+1=7$$

Por lo tanto, el límite es 7.

Ejemplo 2: Función con infinito

Calculemos el límite de la función 1x−5 cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-5}$$

Si x es un número muy grande, x−5 sigue siendo muy grande, y la fracción se aproxima a cero:

$$\frac{1}{un\ número\ muy\ grande}\approx 0$$

Por lo tanto, el límite es 0.

Ejemplo 3: Función racional

Calculemos el límite de la función x2−9x−3 cuando x tiende a 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Primero, sustituimos *x* por 3, lo que nos da una indeterminación *0/0*. Para resolverlo, factorizamos el numerador:

$$x^2-9=(x-3)\,(x+3)$$

Sustituyendo en la función original, obtenemos:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Simplificamos:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

Ahora, calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

Por lo tanto, el límite es 6.

Los límites son una herramienta esencial en cálculo y tienen aplicaciones prácticas en múltiples disciplinas. En la próxima clase, se continuará explorando más ejemplos y problemas para afianzar estos conceptos.

Referencias

Blanco, F., & García, J. (2019). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Matemáticas Avanzadas.

Gómez, A., & Rodríguez, M. (2019). *Análisis de costos y rentabilidad en empresas*. Editorial Económica.

López, S., & Torres, R. (2020). *Fundamentos de álgebra y funciones*. Editorial Académica.

Martínez, C., & Pérez, L. (2018). *Matemáticas aplicadas a las ciencias e ingenierías*. Editorial Técnica.

Martínez, J., & López, S. (2020). *Estrategias de precios en mercados competitivos*. Editorial Mercados.

Pérez, L., & Sánchez, D. (2018). *Introducción al análisis financiero*. Editorial Financiera.

Torres, E., & Castillo, R. (2021). *Fundamentos de la administración financiera*. Editorial Gestión Empresarial.

Glosario

Expresiones matemáticas: Conjunto de números, símbolos y operadores agrupados de acuerdo con las reglas de la matemática para representar un valor, una relación o una operación. Las expresiones matemáticas pueden ser algebraicas, aritméticas, lógicas, entre otras, y son fundamentales para la formulación y resolución de problemas matemáticos.

Asíntota: Línea recta a la que una función se aproxima cada vez más a medida que la variable independiente tiende al infinito o a un punto específico.

PUCE Virtual

La excelencia no se improvisa

síguenos