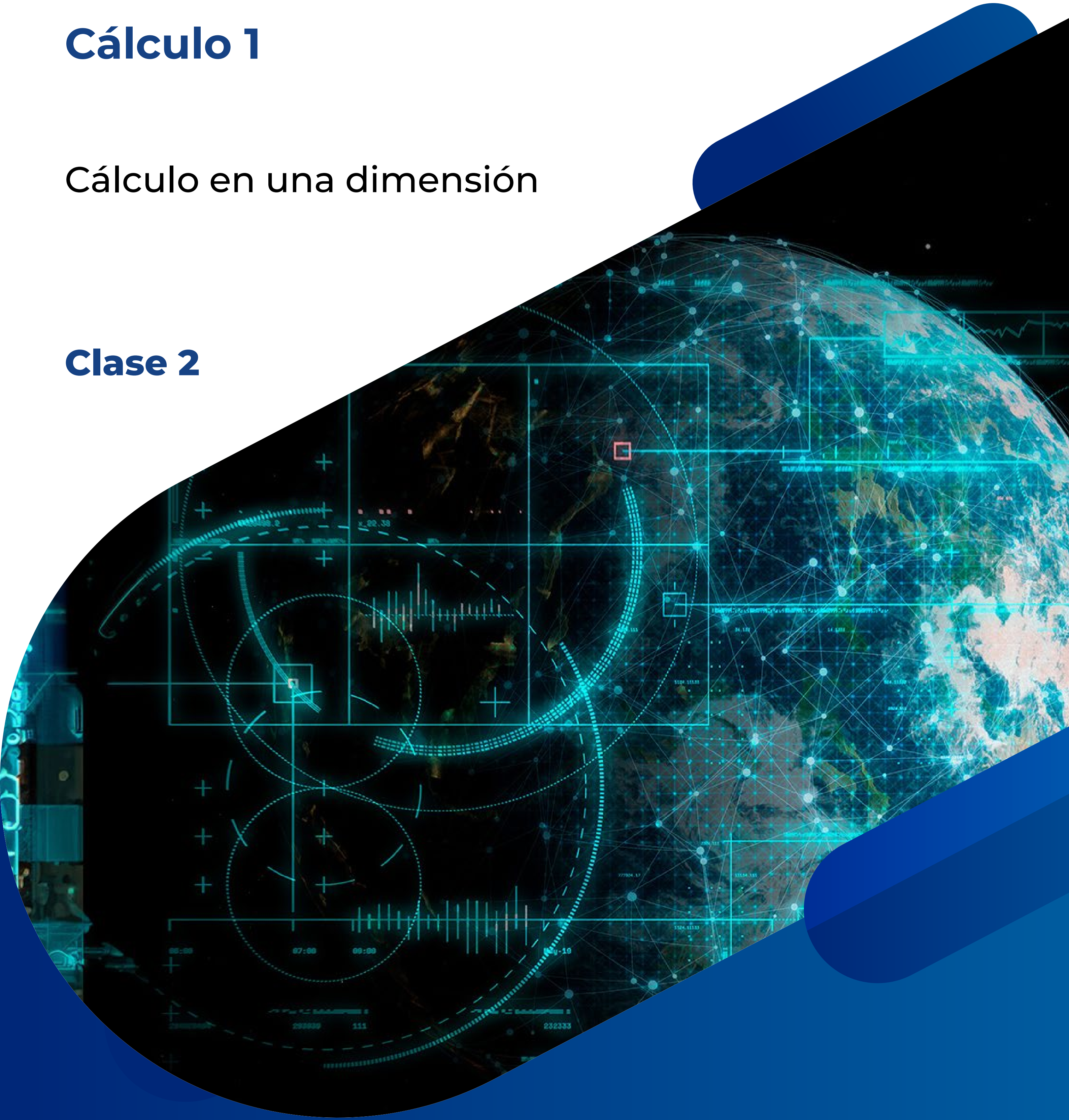
PUCE Virtual

Cálculo 1

Cálculo en una dimensión

Clase 2



Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa

Clase 2. Cálculo en una dimensión

El cálculo en una dimensión, también conocido como cálculo diferencial e integral de funciones de una variable, es una rama fundamental de las matemáticas que se enfoca en el estudio de las tasas de cambio y la acumulación de cantidades. A continuación, se presentan los conceptos clave y las aplicaciones principales de este campo. Los límites son la base del cálculo diferencial.

Un límite describe el valor al que una función se aproxima a medida que la variable independiente se acerca a un cierto punto. La continuidad de una función en un punto significa que el límite de la función en ese punto es igual al valor de la función en ese punto (García & Rodríguez, 2019).

Ejemplo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

En este caso, $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a c.

2.1 Derivada: concepto y derivadas de funciones racionales, polinómicas y exponenciales

En esta sección, se ingresará al fascinante mundo de las derivadas y su conexión con los límites. Se analizarán sus características principales, se revisarán tablas de fórmulas y se aprenderá cómo aplicarlas en situaciones del mundo real.

Las derivadas son una herramienta fundamental en el cálculo diferencial. Permiten estudiar cómo cambian las funciones cuando sus variables de entrada también cambian. La derivada de una función en un punto específico puede interpretarse como la pendiente de la línea tangente a la gráfica de la función en ese punto. La derivada de una función mide la tasa de cambio instantánea de la función con respecto a una variable. Se define como el límite del cociente incremental cuando el incremento tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las derivadas tienen múltiples aplicaciones, incluyendo la determinación de máximos y mínimos de funciones, el estudio del comportamiento de funciones y la resolución de problemas de optimización (Pérez & Torres, 2020).

Por ejemplo, si se tiene una función f(x), la derivada en un punto dado nos ayuda a encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto. Esta pendiente es crucial en diversos campos, como la física.

Matemáticamente, la derivada es el límite de la razón de cambio promedio en un intervalo cada vez más pequeño.

La derivada de una función $f_{(x)}$ en el punto $x=a$ se define como:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En esta definición, h representa un incremento muy pequeño en la variable x. Imagine medir la velocidad de un automóvil: si se quiere saber su velocidad exacta en un instante específico, se necesita un intervalo de tiempo extremadamente pequeño.

A medida que ese intervalo h tiende a cero, la razón de cambio promedio se convierte en la derivada.

Ejemplo práctico: Derivada de x^2

Tomemos la función $f_{(x)} = \boldsymbol{x^2}$ y calculemos su derivada usando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Se desarrolla la expresión en el numerador:

$$(x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Luego, se simplifica:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Por lo tanto, la derivada de $\boldsymbol{x^2}$ es 2x. Este proceso puede parecer largo, pero nos proporciona una comprensión profunda de cómo funcionan las derivadas.

Aunque se puede calcular derivadas utilizando la definición de límite, este proceso puede ser tedioso para funciones más complejas. Por eso, se utilizan tablas de derivadas que resumen los resultados de estas operaciones. En la siguiente parte del curso, se revisará cómo usar estas tablas para simplificar el cálculo de derivadas de diversas funciones.

2.2. Derivadas y puntos críticos

En esta sección, se aborda uno de los conceptos centrales en el estudio de las derivadas: las derivadas y los puntos críticos.

Para comenzar, se explica cómo se calcula la derivada de una función polinómica utilizando la fórmula básica $f(x) = ax^n$.

$$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{(n-1)}$$

donde a y n son números reales.

Ejemplo de derivada polinómica

Considera la función f(x)=3x4+1. Se quiere hallar su derivada.

Las constantes que multiplican a x simplemente se mantienen, y se aplica la fórmula a la derivada de x^4: $f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^{(4-1)} = 12x^3$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = 3x^4 + 1$ es $f'(x) = 12x^3$.

Derivada de funciones racionales

Ahora, considera la función $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2}$, una función racional, ya que es el cociente entre dos funciones polinómicas. Se utiliza la fórmula para la derivada de un cociente de funciones:

$$(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

En este caso, $u(x) = 3x^2 + 2$.

Se calculan las derivadas:

$$u'(x) = 6x$$
$$v'(x) = 2x$$

Se aplican estas derivadas a la fórmula del cociente:

$$f'(x) = \frac{(6x)(x^2) - (3x^2 + 2)(2x)}{(x^2)^2}$$

Se simplifican los términos:

$$f'(x) = \frac{6x^3 - (6x^3 + 4x)}{x^4} = \frac{6x^3 - 6x^3 - 4x}{x^4} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2}$ es $f'(x) = -\frac{4}{x^3}$.

2.3. Herramientas tecnológicas para el cálculo de derivadas

Para facilitar el cálculo de derivadas, podemos utilizar herramientas como Wolfram Alpha. Esta plataforma permite calcular derivadas, integrales y más utilizando entradas matemáticas.

La versión gratuita proporciona resultados, aunque para ver los pasos detallados es necesario optar por la versión de pago. Esta herramienta puede ser de gran ayuda en la resolución de problemas relacionados con derivadas.

Los puntos críticos de una función son aquellos en los que la derivada es cero o no existe. Para encontrarlos, utilizamos el criterio de la primera derivada. Derivamos la función y luego igualamos la derivada a cero. Los valores de x que satisfacen esta ecuación son los puntos críticos.

Considera la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Se deriva la función:

$$f'(x) = 2x + 2$$

Se iguala la derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

Por lo tanto, $x = -1$ es un punto crítico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

2.4. Regla de la cadena

En cálculo, la regla de la cadena y el concepto de tasa de cambio son fundamentales para comprender cómo varían las funciones compuestas y cómo se miden los cambios en una variable con respecto a otra. La regla de la cadena es una fórmula utilizada para calcular la derivada de una función compuesta.

Si se tiene dos funciones, $f_{(u)}$ y $g_{(x)}$, donde $u=g_{(x)}$, entonces la derivada de la función compuesta *f(g(x))* con respecto a x se calcula como:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Es decir, la derivada de la función externa *f* evaluada en la función interna *g(x),* multiplicada por la derivada de la función interna *g(x).* Este método es esencial para el cálculo de derivadas en funciones donde una variable depende de otra (López & Pérez, 2019).

Ejemplo:

Si $y = (3x^2 + 2)^5$, entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$ se calcula usando la regla de la cadena.

2.5. Tasa de Cambio

La tasa de cambio de una función describe cómo una cantidad varía en relación con otra. Matemáticamente, se expresa como la derivada de la función. En el contexto de una función $y = f(x)$, la tasa de cambio de y con respecto a x se da por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

La tasa de cambio puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en un punto dado. Es útil en numerosos campos para describir fenómenos como velocidad, aceleración, crecimiento económico, entre otros (Gómez & Sánchez, 2020).

2.6. Máximos y mínimos: criterio de la primera y segunda derivada

En cálculo, identificar los puntos donde una función alcanza máximos y mínimos es fundamental para el análisis de funciones. Estos puntos pueden ser máximos o mínimos locales o globales y se determinan utilizando los criterios de la primera y segunda derivada.

El criterio de la primera derivada se utiliza para identificar los puntos críticos de una función, donde la pendiente de la tangente es cero o no existe. Un punto crítico ocurre cuando $f'(x)=0$ o $f'(x)$ no está definida. Para determinar si estos puntos son máximos, mínimos o puntos de inflexión, se sigue el siguiente procedimiento:

1. **Encontrar la derivada de la función** $f'(x)$
2. **Solucionar $f'(x)=0$** para encontrar los puntos críticos.
3. **Determinar el signo de $f'(x)$** a la izquierda y derecha de cada punto crítico:
    - Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, el punto crítico es un máximo local.
    - Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, el punto crítico es un mínimo local.

El criterio de la primera derivada ayuda a analizar el comportamiento de una función y a encontrar los intervalos de aumento y disminución (Martínez & López, 2019).

El criterio de la segunda derivada se utiliza para determinar la concavidad de la función y confirmar si los puntos críticos son máximos o mínimos locales. Se basa en el análisis de la segunda derivada, $f''(x)$:

1. **Calcular la segunda derivada** $f''(x)$
2. **Evaluar $f''(x)$** en los puntos críticos encontrados:
   - Si $f''(x)>0$ en un punto crítico, la función tiene un mínimo local en ese punto.
   - Si $f''(x)<0$ en un punto crítico, la función tiene un máximo local en ese punto.
   - Si $f''(x)=0$, el criterio es inconcluso, y se necesita más análisis.

Este criterio es útil para confirmar los resultados obtenidos con el criterio de la primera derivada y para entender la curvatura de la función (Gómez & Rodríguez, 2020).

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, aplicamos estos criterios para identificar y clasificar los puntos críticos.

Referencias

Gómez, M., & Sánchez, D. (2020). *Aplicaciones del cálculo: Ciencia e ingeniería*. Editorial Técnica.

López, J., & Pérez, A. (2019). *Cálculo diferencial e integral en una variable*. Editorial Académica.

Torres, E., & Castillo, R. (2021). *Fundamentos de la matemática avanzada*. Editorial Científica.

Glosario de los términos citados

Dimensión: En matemáticas, una dimensión es un número que describe el tamaño o la extensión de un objeto en un espacio determinado. Por ejemplo, una línea tiene una dimensión, un plano tiene dos dimensiones y un objeto tridimensional tiene tres dimensiones. Las dimensiones pueden extenderse a valores mayores en contextos más abstractos, como el espacio-tiempo en física o los espacios de alta dimensión en matemáticas aplicadas.

Punto crítico en derivadas: Un punto crítico de una función es un valor de la variable independiente en el cual la derivada de la función es cero o no está definida. En estos puntos, la función puede tener máximos, mínimos o puntos de inflexión. Los puntos críticos son fundamentales para el análisis de la optimización y el comportamiento de funciones en cálculo diferencial.

PUCE Virtual

La excelencia no se improvisa

síguenos

ICYS - 12 - 241