Cálculo 1

Gráficas con Cálculo y Cálculo Integral

Clase 3

Ingeniería en ciberseguridad

Clase 3. Gráficas con Cálculo y Cálculo Integral

3.1 Gráficas con Cálculo

El estudio de las gráficas de funciones mediante herramientas del cálculo es fundamental para comprender el comportamiento y las propiedades de las funciones matemáticas. Este análisis incluye el uso de derivadas para identificar características clave como máximos, mínimos, puntos de inflexión y asíntotas, así como para entender el crecimiento y decrecimiento de las funciones.

3.1.1 Análisis de derivadas

Las derivadas juegan un papel crucial en el análisis de gráficas de funciones:

- **Primera derivada y crecimiento/decrecimiento**: La primera derivada de una función, $f'(x)$, indica la pendiente de la tangente a la curva en un punto dado. Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, la función está creciendo en ese intervalo; si $f'(x) < 0$, la función está decreciendo.
- **Segunda derivada y concavidad**: La segunda derivada, $f''(x)$, proporciona información sobre la concavidad de la función. Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo, lo que indica que la pendiente está aumentando. Si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo, indicando una pendiente decreciente.
- **Puntos críticos y puntos de inflexión**: Los puntos críticos ocurren donde la primera derivada es cero o no está definida, lo que indica posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Un punto de inflexión es donde la concavidad de la función cambia, identificable por el cambio de signo en la segunda derivada (Gómez & López, 2019).

3.1.2 Asíntotas

El cálculo también permite identificar asíntotas, que son líneas a las que la gráfica de la función se aproxima, pero nunca toca.

- **Asíntotas verticales**: Ocurren cuando el denominador de una función racional se acerca a cero, lo que hace que la función tienda a infinito.

- **Asíntotas horizontales**: Se encuentran observando el comportamiento de la función cuando x tiende a infinito positivo o negativo. Son particularmente útiles para funciones racionales.

Las integrales definidas se utilizan para calcular el área bajo una curva, lo cual es una aplicación crucial en muchos campos, incluida la economía y la física. La integral de una función en un intervalo específico también puede interpretarse como el acumulado neto de la función en ese intervalo.

3.1.3 Trazado de gráficas con herramientas computacionales

El uso de herramientas computacionales como Python (con bibliotecas como Matplotlib y Seaborn) facilita el trazado y análisis de gráficas de funciones.

Estas herramientas permiten:

- **Visualización precisa**: Trazado de curvas y líneas tangentes, identificación de puntos críticos y áreas bajo la curva.
- **Análisis numérico**: Aproximación de derivadas e integrales para funciones complejas que no tienen solución analítica simple.
- **Interactividad**: Modificación de parámetros en tiempo real para observar cómo cambian las características de la gráfica (Martínez & Torres, 2020).

Ejemplo Práctico

Para una función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, el análisis de sus derivadas puede ayudar a identificar máximos y mínimos locales, así como puntos de inflexión.

La primera derivada, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, y la segunda derivada, $f''(x) = 6x - 6$, se usan para este análisis.

3.1.4 Máximos y mínimos de funciones y aplicaciones a funciones en negocios

Los conceptos de máximos y mínimos de funciones son fundamentales en el cálculo y tienen aplicaciones cruciales en diversos campos, incluidos los negocios. Estas técnicas permiten identificar puntos de interés en funciones que modelan fenómenos económicos y empresariales, como costos, ingresos y beneficios.

Los máximos y mínimos de una función se refieren a los puntos donde la función alcanza sus valores más altos o más bajos, respectivamente. Estos puntos pueden ser locales (relativos a un intervalo específico) o globales (en todo el dominio de la función). Para identificar estos puntos, se utilizan principalmente dos criterios:

- **Criterio de la primera derivada**: Consiste en encontrar los puntos críticos donde la derivada de la función se anula o no existe. Luego, se analiza el signo de la derivada alrededor de estos puntos para determinar si son máximos o mínimos locales.
- **Criterio de la segunda derivada**: Se usa para confirmar la naturaleza de los puntos críticos, verificando la concavidad de la función en esos puntos. Si la segunda derivada es positiva, el punto crítico es un mínimo local; si es negativa, es un máximo local (Gómez & Pérez, 2019).

En el contexto de los negocios, encontrar los máximos y mínimos de funciones es esencial para la toma de decisiones estratégicas. Algunas aplicaciones clave incluyen:

- **Optimización de costos**: Determinar el nivel de producción que minimiza los costos totales. Por ejemplo, si $C(q)$ es la función de costo en términos de la cantidad producida q, encontrar q que minimiza $C(q)$ es crucial para la eficiencia operativa.
- **Maximización de ingresos**: Identificar el precio de venta óptimo o la cantidad de producto que maximiza los ingresos. Si $R(q) = p(q) \cdot q$ es la función de ingreso, donde $p(q)$ es el precio como función de la cantidad, el objetivo es maximizar $R(q)$ (López & Martínez, 2020).
- **Maximización de beneficios**: Las empresas buscan maximizar sus beneficios, definidos como la diferencia entre ingresos y costos. La función de beneficio $B(q)=R(q)-C(q)$ puede ser analizada para encontrar el nivel de producción q que maximiza el beneficio.

Estas aplicaciones permiten a las empresas tomar decisiones informadas sobre producción, precios y estrategias de mercado, optimizando así su desempeño financiero y competitivo (Rodríguez & Torres, 2018).

Ejemplo

Una empresa que produce un bien tiene la función de costo $C(q) = 50 + 3q + 0.5q^2$ y la función de ingreso $R(q) = 10q - 0.2q^2$. Para maximizar el beneficio, se derivan estas funciones y se aplican los criterios mencionados.

3.1.5 Asíntotas verticales y horizontales: costo promedio

En el análisis de funciones, las asíntotas verticales y horizontales son herramientas clave para entender el comportamiento de las funciones racionales y otros tipos de funciones. Estos conceptos también se aplican en el análisis de costos en contextos empresariales, especialmente en el cálculo del costo promedio.

Una **asíntota vertical** se presenta en una función *f(x)* cuando la función tiende a infinito positivo o negativo a medida que la variable independiente se aproxima a un valor específico desde la izquierda o la derecha.

Formalmente, si $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$, entonces $x = c$ es una asíntota vertical.

Las asíntotas verticales suelen ocurrir en funciones racionales, donde el denominador se anula. Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$, existe una asíntota vertical en $x = 2$ (López & Torres, 2019).

Las **asíntotas horizontales** describen el comportamiento de una función a medida que la variable independiente tiende a infinito positivo o negativo.

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, donde L es un número finito, entonces y=L es una asíntota horizontal.

Estas asíntotas son comunes en funciones donde el grado del numerador es menor o igual al grado del denominador. Por ejemplo, para $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, la asíntota horizontal es $y = 0$ (Martínez & Gómez, 2020).

El concepto de **costo promedio** se utiliza en economía y gestión de negocios para entender cómo varía el costo de producción por unidad a medida que se produce una mayor cantidad de bienes.

Se define como: $C_{avg}(q) = \frac{C(q)}{q}$ donde C(q) es el costo total de producir q unidades y $C_{avg}(q)$ es el costo promedio por unidad. El análisis de $C_{avg}(q)$ puede revelar la presencia de economías de escala, donde el costo promedio disminuye a medida que aumenta la producción (Pérez & Rodríguez, 2021).

Las asíntotas horizontales y verticales en el gráfico de la función de costo promedio pueden proporcionar información sobre los costos fijos y variables a largo plazo. Por ejemplo, una asíntota horizontal en el costo promedio sugiere un costo constante por unidad a medida que la producción se incrementa indefinidamente, lo cual es típico en industrias con costos variables bajos.

3.2 Cálculo integral

3.2.1 Integral indefinida y ejemplos

En esta clase, se introducirá el concepto de la integral indefinida. La definición formal de una integral indefinida nos dice que es el conjunto de todas las funciones F(x) cuyas derivadas son f(x). Es decir, la derivada de F(x) debe ser igual a f(x):

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Por lo tanto, $f_{(x)}$ se denomina primitiva de la función $f_{(x)}$.

La Integral como operación inversa

Se puede entender la integral indefinida como una operación inversa a la derivada. Mientras que en la derivada partimos de una función F(x) y obtenemos otra función f(x), en la integral indefinida hacemos lo contrario: partimos de f(x) y queremos encontrar F(x), su primitiva.

Para visualizar esto, imaginen que tienen una máquina (función F(x)) y solo conocen las piezas que la componen (función f(x)). Al juntar todas las piezas de manera correcta, obtenemos la máquina original. Aquí, las piezas representan la función $f_{(x)}$ y la máquina completa es $f_{(x)}$.

Una de las fórmulas fundamentales para la integral indefinida es:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

donde C es la constante de integración. Es importante que n sea diferente de -1 para evitar una indeterminación.

Ejemplo de Integración

Consideremos la función polinómica $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$.

Si se quiere hallar su integral indefinida, se procede de la siguiente manera:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 5x) \, dx = \int x^3 \, dx - \int 3x^2 \, dx + \int 5x \, dx$$

Se aplica la fórmula de la integral a cada término:

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} = \frac{1}{4} x^4$$

$$\int 3x^2 \, dx = 3\int x^2 \, dx = 3(\frac{1}{2+1} x^{2+1}) = 3(\frac{1}{3} x^3) = x^3$$

$$\int 5x \, dx = 5\int x \, dx = 5(\frac{1}{1+1} x^{1+1}) = 5(\frac{1}{2} x^2) = \frac{5}{2} x^2$$

Se combina estos resultados para obtener la integral completa:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 5x) \, dx = \frac{1}{4} x^4 - x^3 + \frac{5}{2} x^2 + C$$

Las integrales son fundamentales en diversas áreas, como los negocios, la economía y la ingeniería. Por ejemplo, en el análisis de costos, ingresos y beneficios, las funciones polinómicas se utilizan comúnmente para modelar diversas situaciones.

3.2.2 Integral definida: cálculo de áreas

En esta sección, abordaremos la integral definida como la última parte de nuestro primer reto. La integral definida nos permite calcular el área bajo una curva, representada por la función f(x), entre dos límites, a y b.

La integral definida se utiliza para encontrar el área bajo una curva $f_{(x)}$ entre los puntos a y b. Este concepto fue desarrollado por el matemático Riemann, quien propuso una técnica que utiliza rectángulos para aproximar el área bajo la curva.

3.2.2.1. Método de Riemann

Riemann sugirió que el área bajo la curva se puede aproximar sumando las áreas de múltiples rectángulos formados bajo la curva. Al aumentar el número de rectángulos, la aproximación se vuelve más precisa. La clave es que estos rectángulos tienen una base Δx y una altura f(x).

- Base del rectángulo: Δx
- Altura del rectángulo: f(x)

El área de cada rectángulo es Δx·f(x). Sumando las áreas de todos los rectángulos, obtenemos una aproximación del área total bajo la curva.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Hacia la integral definida

Mientras más rectángulos usemos, más pequeños serán los intervalos Δx, acercándose a cero. En ese punto, la sumatoria de áreas se convierte en una integral:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Esto representa el área exacta bajo la curva f(x) entre los límites a y b.

Ejemplo práctico

Para ilustrar este concepto, consideremos la función f(x)=x2 y calculemos el área bajo esta curva desde x=0 hasta x=3:

$$\int_0^3 x^2\,dx$$

Resolución paso a paso

1. **Encontrar la primitiva de f(x)**: La primitiva de x^2 es $\frac{x^3}{3}$.
2. **Evaluar la primitiva en los límites**: Se evalúa la primitiva en el límite superior y luego en el límite inferior:

$$[\frac{x^3}{3}]_0^3 = (\frac{3^3}{3}) - (\frac{0^3}{3})$$

3. **Simplificar la evaluación**:

$$(\frac{27}{3}) - 0 = 9$$

Por lo tanto, el área bajo la curva x^2 desde x = 0 hasta x = 3 es 9 unidades cuadradas.

La integral definida es una herramienta poderosa en cálculo que nos permite determinar áreas bajo curvas con precisión. En futuras sesiones, exploraremos más ejemplos y problemas que solidifiquen este concepto.

Referencias

Gómez, M., & Torres, A. (2020). *Jupyter y Python para análisis de datos*. Editorial Informática.

López, J., & Martínez, S. (2019). *Herramientas de desarrollo para Python: una guía práctica*. Editorial Técnica.

Pérez, L., & López, J. (2021). *Ciencia de datos en la nube con Google Colab*. Editorial Académica.

Glosario de los términos citados

La **integral definida** es una integral que calcula el área bajo la curva de una función en un intervalo específico [a, b]. Se denota como $\int_a^b \quad f(x)\,dx$ y proporciona el valor acumulado de la función entre los límites inferior (a) y superior (b).

La **integral indefinida** representa una familia de funciones antiderivadas de una función dada. No incluye límites de integración y se denota como $\int f(x)\,dx$, que es igual a $F(x) + C$, donde $F_{(x)}$ es la función antiderivada de $f_{(x)}$ y C es la constante de integración.

La excelencia no se improvisa

síguenos