Cálculo 1

Uso de herramientas de cálculo diferencial e integral para visualización de costos, lucros e ingresos y cantidades marginales

Clase 7

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa

Clase 7. Uso de herramientas de cálculo diferencial e integral para visualización de costos, lucros e ingresos y cantidades marginales

7.1 Uso de herramientas de cálculo diferencial e integral para visualización de costos, lucros e ingresos y cantidades marginales

Las funciones racionales son aquellas que se expresan como el cociente de dos polinomios.

Un ejemplo de función racional es: $\frac{8}{x^2-4}$

En estas funciones, una característica importante son las asíntotas. Una asíntota es una línea a la cual la función tiende a aproximarse, pero nunca alcanza. Es la línea recta a la que una función se aproxima cada vez más a medida que la variable independiente tiende hacia el infinito o hacia un punto específico, pero que nunca llega a tocar.

Para visualizar esta definición, considere el siguiente gráfico de la función utilizando Python.

Figura 4

Gráfica de la función utilizando Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definir la función
def f(x):
    return 1 / (x - 2)

# Crear un rango de valores para x
x = np.linspace(-10, 10, 400)
x = x[x != 2]  # Excluir x = 2 para evitar la división por cero
y = f(x)

# Graficar la función
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x, y, label='$f(x) = \\frac{1}{x-2}$', color='blue')
plt.axvline(x=2, color='red', linestyle='--', label='Asíntota vertical $x=2$')
plt.axhline(y=0, color='green', linestyle='--', label='Asíntota horizontal $y=0$')
plt.title('Gráfica de la función $f(x) = \\frac{1}{x-2}$')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.ylim(-10, 10)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Nota. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas, dependiendo de la naturaleza de la función y su comportamiento a largo plazo (Stewart, 2018).

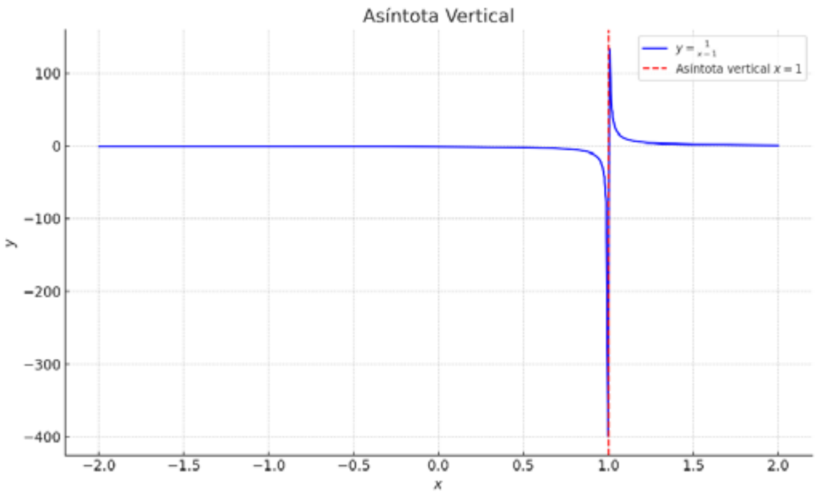
7.1.1 Tipos de asíntotas

Existen tres tipos principales de asíntotas:

Asíntotas verticales: Ocurren cuando el denominador de la función se iguala a cero y el numerador no se anula en esos puntos.

Figura 5

Asíntotas verticales

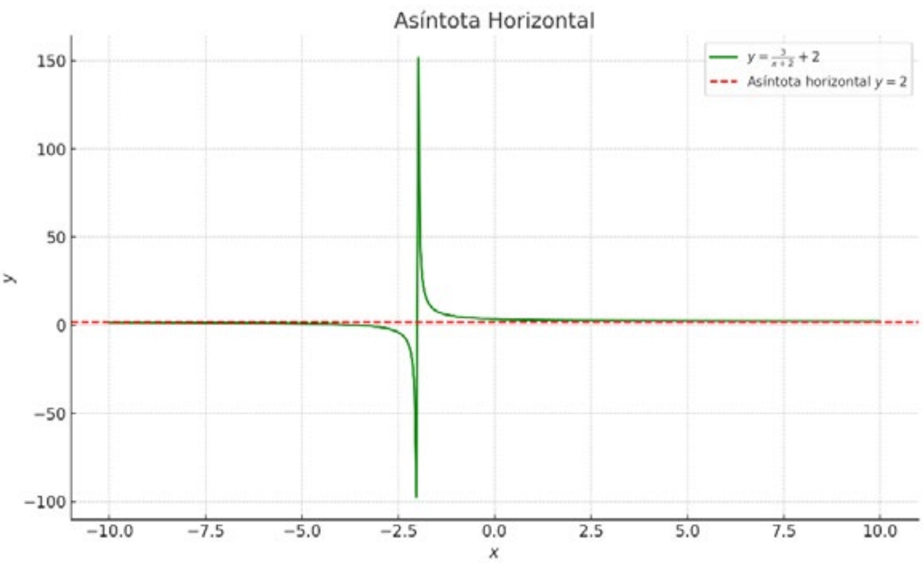


Nota. Gráfica extraída de Geogebra

Asíntotas horizontales: Se determinan por el comportamiento de la función cuando x tiende al infinito.

Figura 6

Asíntota Horizontal

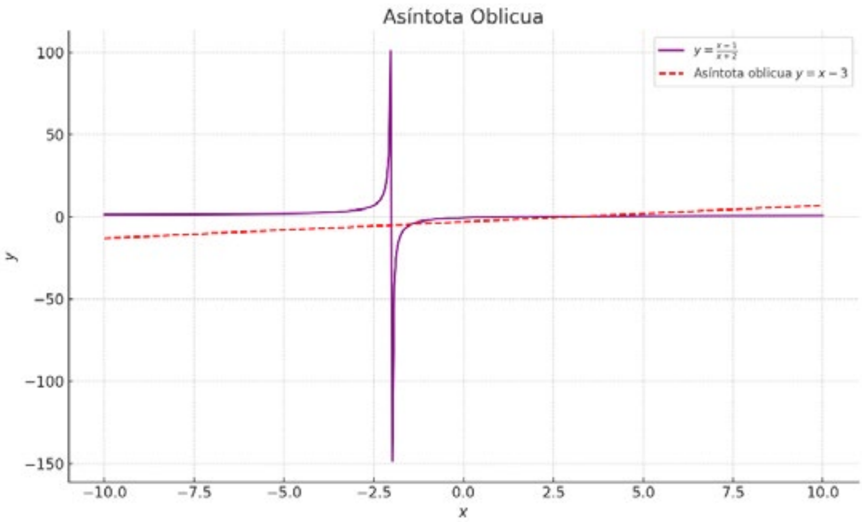


Nota. Gráfica extraída de Geogebra

Asíntotas inclinadas: Ocurren cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

Figura 7

Asíntota oblicua



Nota. Gráfica extraída de Geogebra

Determinación de asíntotas

Para encontrar las asíntotas verticales, se iguala el denominador a cero y se resuelve para x.
Si: $d_{(x)} = 0$ entonces x = c es una asíntota vertical.

Para encontrar las asíntotas horizontales, se comparan los grados del numerador y del denominador:

- Si el grado del numerador $n_{(x)}$ es menor que el grado del denominador $d_{(x)}$, entonces y = 0 es la asíntota horizontal.
- Si los grados son iguales, la asíntota horizontal es: $y=ab$ donde a y b son los coeficientes principales de $n_{(x)}$ y $d_{(x)}$, respectivamente.
- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, no existe asíntota horizontal.

La aplicación en negocios se puede ilustrar con un ejemplo. Supongamos que una compañía fabrica tablas de nieve con costos fijos de $200 por día y costos totales de $3800 por día al producir 20 tablas.

La función de costo $C_{(x)}$ es:

$$C_{(x)} = 200 + 180x$$

La función de costo promedio se define como:

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200 + 180x}{x} = \frac{200}{x} + 180$$

Gráfico del costo promedio

Al graficar la función de costo promedio, se pueden determinar las asíntotas:

- **Asíntota vertical**: Se presenta en x = 0, ya que la función se indetermina en ese punto.
- **Asíntota horizontal**: Es y = 180, ya que, al dividir el coeficiente principal del numerador por el del denominador, se obtiene 180.

La asíntota horizontal en y = 180 indica que, a medida que la producción aumenta, el costo promedio por tabla tiende a ser $180.

Esto es crucial para entender que, aunque la producción se incremente significativamente, el costo promedio no superará los $180 por tabla.

Aquí tienes el texto corregido:

Ejercicio de aplicación

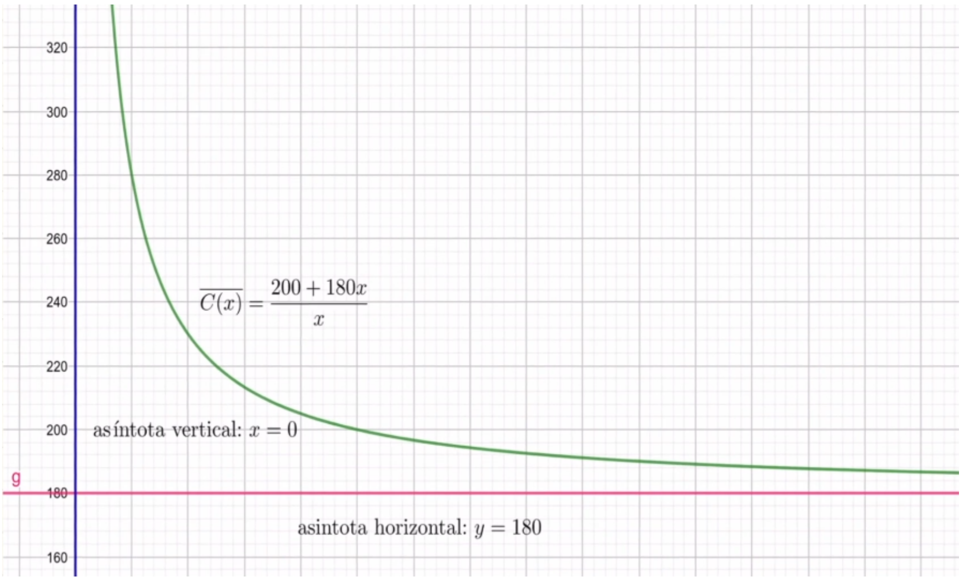
Supongamos una compañía fábrica tablas de nieve con los siguientes datos:

- Costos fijos: $200 por día.
- Costos totales: $3800 por día para 20 tablas.

1. Función de costo: $C(x) = 200 + 180x$
2. Función de costo promedio: $\bar{C}(x) = \frac{200+180x}{x} = \frac{200}{x} + 180$
3. Gráfico del costo promedio:
    - Asíntota vertical: *x=0*
    - Asíntota horizontal: *y=180*

Figura 8

Gráfica del ejemplo



Nota. Las asíntotas en funciones racionales son fundamentales para entender el comportamiento a largo plazo de las funciones aplicadas en los negocios.

En el caso del costo promedio de fabricación, sabemos que, al incrementar la producción, el costo promedio se estabilizará en $180 por tabla, lo que proporciona una guía importante para la toma de decisiones en producción y ventas.

Referencias

Gómez, M., & Rodríguez, J. (2019). *GeoGebra y su aplicación en la enseñanza de las matemáticas*. Editorial Educativa.

Martínez, S., & Torres, A. (2020). *Simulación y modelado en ingeniería: Herramientas y aplicaciones*. Editorial Técnica.

Pérez, L., & López, J. (2021). *Tecnologías educativas: Integración de software en la enseñanza de las ciencias*. Editorial Académica.

Glosario de los términos citados

Asíntota vertical: Es una línea vertical x = a, a la cual se aproxima una función cuando el valor absoluto de y tiende a infinito al acercarse x al valor a. Indica que la función no está definida en ese punto y presenta un comportamiento asintótico.

Asíntota horizontal: Es una línea horizontal y = b que representa el valor al que se aproxima una función cuando x tiende a infinito positivo o negativo. Indica el comportamiento de la función en los extremos del dominio.

PUCE Virtual

La excelencia no se improvisa

síguenos

ICYS - 12 - 241