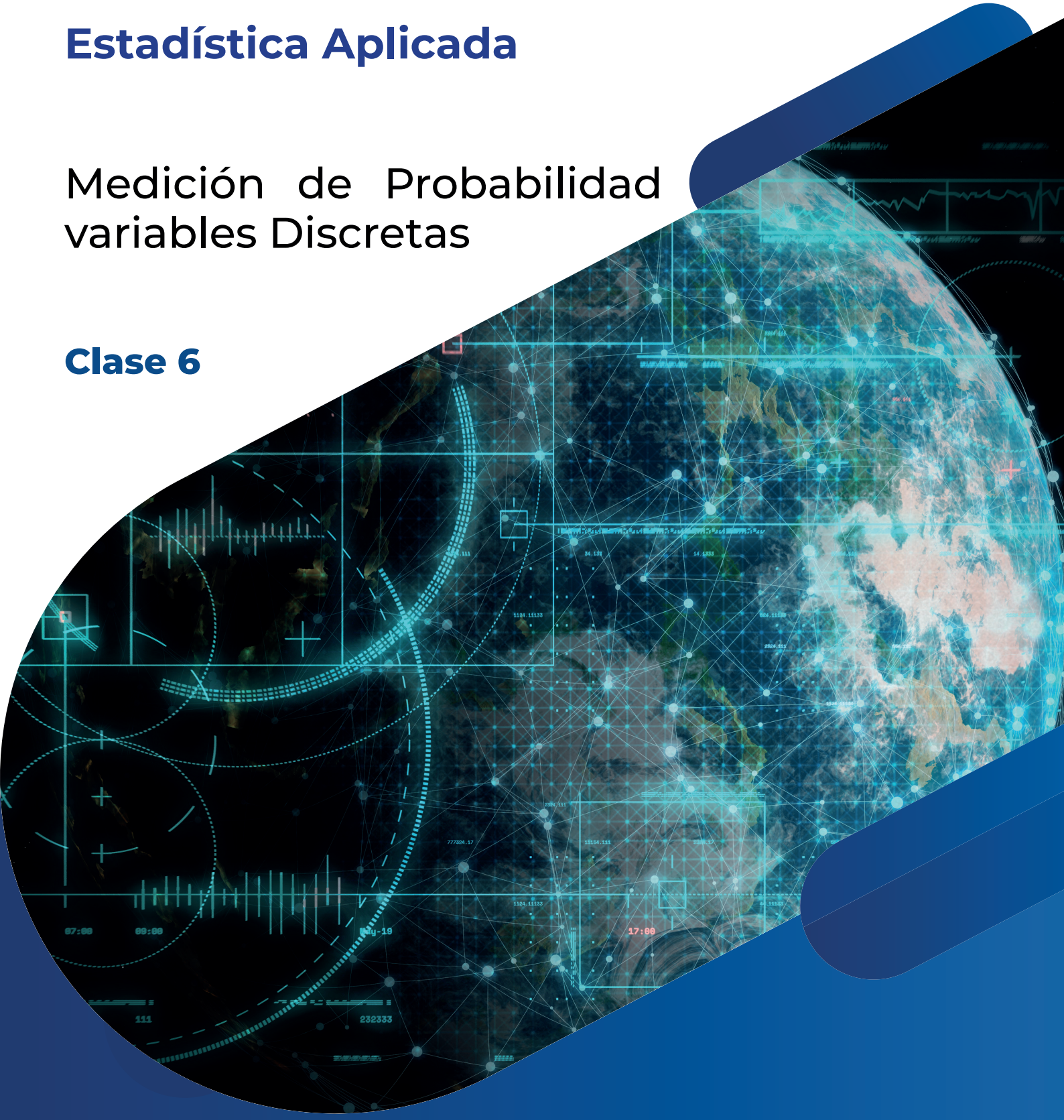
Estadística Aplicada

Medición de Probabilidad variables Discretas

Clase 6



Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa

1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

La distribución normal y T vistas en clases anteriores corresponden a distribuciones en las cuales las variables han sido numéricas continuas. En estas, si el valor de la variable aleatoria se incrementa, incluso en una cantidad pequeña, se esperaría que su probabilidad de ocurrencia aumente o disminuya, aunque sea en una cantidad mínima.

En la práctica, hay muchos fenómenos, eventos o casos en los cuales las variables no son continuas sino discretas y no responden a este comportamiento. En estos casos, las fórmulas de probabilidad y distribución vistas anteriormente para el cálculo de PDF o CDF no aplican. En esta clase, veremos dos de estos casos conocidos como la distribución binomial y una variante de esta, llamada la distribución de Bernoulli.

Clase 6:

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase: **Analizar información contextual sobre hábitat, infraestructura y movilidad, mediante técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales, para la adecuada toma de decisiones**

Reto # 3

6) Medición de probabilidad variables discretas

6.1) Distribución binomial

Empecemos por definir algunos conceptos:

¿Que un proceso de experimentación?

Definimos los procesos de experimentación como la acción de medir u observar una actividad con el fin de recopilar datos. Supongamos que nuestro experimento de interés implica que un jugador de fútbol profesional lanza tiros libres al arco. Cada tiro libre se consideraría un ensayo para el experimento. Para este experimento en particular, solo tenemos dos resultados posibles para cada ensayo: el tiro libre entra o no entra al arco.

A estos resultados se conocen como un éxito o fracaso. A este tipo de experimento llamaremos experimento binomial. Por otro lado, la distribución multinomial representa las probabilidades de varios posibles resultados a través de múltiples experimentos.

¿Qué es un ensayo en distribución binomial?

Los resultados de la distribución binomial se denominan éxito o fracaso. La palabra éxito no necesariamente significa un resultado positivo. Es solo el resultado que nos interesa. Del mismo modo, la palabra fracaso no necesariamente significa un resultado negativo; es solo un resultado que no nos interesa, o que no está mencionado explícitamente en los enunciados de los problemas.

Veamos algunos ejemplos:

- ✓ Comprobar si una parte manufacturada es defectuosa
- ✓ Observar la cantidad de respuestas correctas en un examen de opción múltiple

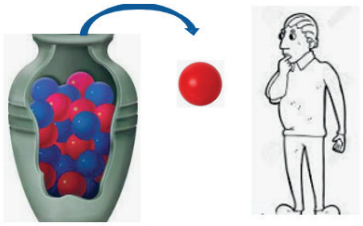
¿Qué es una prueba con reemplazo?

Decimos que la distribución binomial es una distribución con reemplazo. El concepto es el siguiente. Supongamos que se tiene un ánfora llena de bolas rojas y azules, y tenemos una persona sacando una bola a la vez. Intuitivamente, diríamos que, si ya ha retirado tres bolas rojas, la probabilidad de volver a sacar más bolas

rojas disminuye. Este sería un ejemplo de una distribución sin sustitución. Por otro lado, una distribución en la que no importa la cantidad de bolas rojas o azules ya extraídas previamente, si la probabilidad de volver a obtener el mismo color no cambia, se dice que es "con reemplazo."

Figura 1

Distribución binomial con reemplazo.



¿Qué es el experimento binomial?

De acuerdo con Webster(2020) Un experimento binomial tiene las siguientes características:

- ✓ El experimento consiste en un número fijo de ensayos, denotado por **n**; este es un valor entero mayor que 0
- ✓ Cada ensayo tiene solo dos resultados posibles, un éxito o un fracaso
- ✓ La probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso son constantes durante todo el experimento y están denotados por π
- ✓ Cada experimento indica la cantidad de éxitos que se desea obtener, denotado por x

Funciones matemáticas de la distribución binomial

Supongamos que la probabilidad de aprobar un examen de estadística es solo el 60%, por lo que la probabilidad de reprobar es del 40 por ciento. Esto representa un experimento binomial, con p = 0,60 (la probabilidad de un "éxito") y q = 0,40 (la probabilidad de un "fracaso").

Podemos calcular la probabilidad puntual de obtener x éxitos en n ensayos utilizando la función PMF como se muestra en la siguiente figura

Figura 2

PMF de la distribución binomial

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

Enlace relacionado

Explicación de la fórmula binomial

Enlace

Vale la pena recordar para este cálculo que 0!=1 y que $x^0=1$

Así como en la clase 2 se mostró como obtener la media de un vector de datos, también se puede determinar la media de una distribución de probabilidad. La media aritmética de una distribución de probabilidad se llama el valor esperado E(X), y se halla multiplicando n por la probabilidad como se muestra en la siguiente figura.

Figura 3

Media de la distribución de probabilidad discreta

$$\mu=E(X)=n\pi$$

Y la varianza de la distribución se muestra en la siguiente figura

Figura 4

Varianza de la distribución binomial

$$\sigma^2=n\pi(1-\pi)$$

Generalmente, es mejor visualizar la probabilidad para entender la distribución de los datos. A diferencia de las distribuciones continuas en las que preferíamos representarlo mediante un diagrama de densidad, para las distribuciones binomiales usaremos un diagrama de barras.

Veamos un ejemplo concreto:

De acuerdo con un estudio de educación universitarias, el 40% de los estudiantes trabajan durante el verano para ganar dinero para su colegiatura del siguiente semestre.

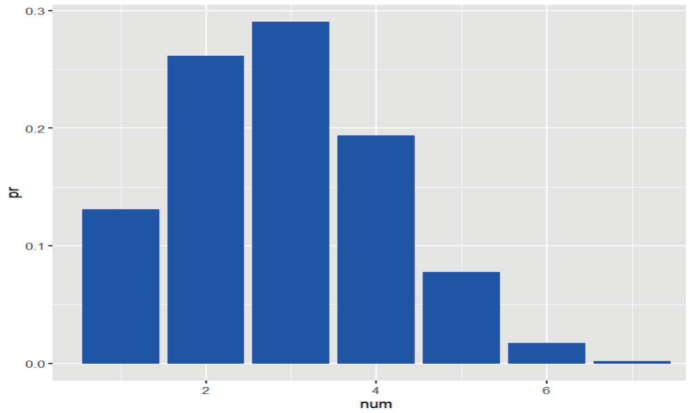
Si 7 estudiantes se seleccionan de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7 estudiantes trabajen?

La solución consiste en encontrar 7 probabilidades binomiales para cada uno de los valores, con lo cual obtenemos el siguiente resultado. Note que la suma de todas las probabilidades es siempre igual a 1, lo cual es un requisito para todas las distribuciones de probabilidad.

Figura 5

Solución del problema

Creación autor Alfonso Prado



Por otro lado, es interesante mencionar como se aplica el teorema del límite central a este tipo de distribuciones. Recordando el teorema establece que a medida que n se vuelve más grande, la distribución de las medias muestrales se aproxima a una distribución normal con una media de μ y un error estándar de $\sigma/\sqrt{n}$.

Para esto, graficaremos 3 distribuciones binomiales con valores de cantidad de éxitos de 10 , 100 y 1000 , con una probabilidad π=0.3, y graficamos. Notaremos cómo la distribución se va aproximando a una distribución gaussiana.

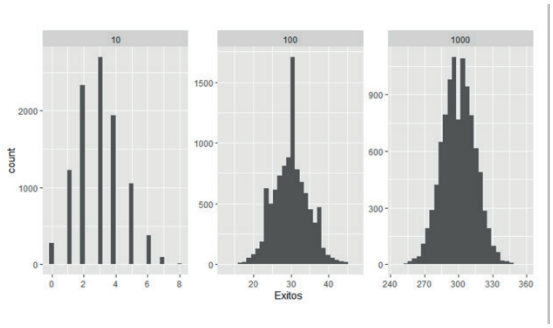
El siguiente código nos permite visualizar la aplicación del teorema del límite central.

```
#Aproximación a la distribución normal


df_10 <- data.frame(Exitos = rbinom(n=10000, size =10 ,prob=.3 ),Size=10)

df_10

df_100 <- data.frame(Exitos = rbinom(n=10000, size =100 ,prob=.3 ),Size=100)

df_100

df_1000 <- data.frame(Exitos = rbinom(n=10000, size =1000 ,prob=.3 ),Size=1000)

df_1000


todo<- rbind(df_10, df_100, df_1000)

head(todo)

tail(todo)

ggplot (data=todo , aes(x=Exitos))+ geom_histogram() +

 facet_wrap(~Size, scales="free")
```

Figura 6

Demostración del teorema del límite central en distribución binomial

Creación autor Alfonso Prado



Un caso especial de la distribución binomial es cuando n=1; esto es conocido como el ensayo de Bernoulli. Si solo hay un ensayo con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso 1-p, esto se llama distribución de Bernoulli.

La siguiente figura muestra la probabilidad de éxito y fracaso derivadas de las fórmulas anteriores

Figura 7

Probabilidad de éxito (a) y fracaso (b) en un ensayo de Bernoulli

(a)	(b)
$P(X=1)=\binom{1}{1}p^1(1-p)^{1-1}=p$	$P(X=0)=\binom{1}{0}p^0(1-p)^{1-0}=1-p$

6.2) Funciones programáticas de la distribución binomial

De igual manera que en la distribución normal, para el caso binomial tenemos las funciones que nos ayudan a calcular los resultados de un experimento puntual, que sería el PMF, o resultados acumulativos CDF. También, de la misma forma, la nomenclatura sigue los mismos lineamientos de la distribución normal, solo que en este caso sustituiremos el sufijo de norm por binom.

Enlace relacionado

Describe en detalle el uso de la funciones programáticas

Enlace

Tabla 1

Funciones programáticas

Función de Distribución	Distrib. Binomial	
PMF	dbinom()	dbinom(x, size, prob, log = FALSE)
CDF	pbinom()	pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
Inverso CDF	qbinom()	qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)

Función para obtener un set de datos de la distribución	Distrib. Binomial	
	rbinom()	rbinom(n, size, prob)

Donde:

x, q vector de cuantiles.

p vector de probabilidades.

n número de observaciones.

prob probabilidad de éxito en cada prueba

size número de pruebas.

lower.tail TRUE (default), probabilidad de P [X ≤ x] , FALSE P [X >x]

Función dbinom

Esta función devuelve la densidad de probabilidad (PMF) de la distribución binomial, dada una determinada cantidad que representa el número de resultados positivos deseados (argumento x), en función de una cierta cantidad de ensayos (size) y de una probabilidad de éxito constante en cada ensayo (prob).

Veamos un ejemplo

```
#Supongamos que los ítems producidos en una fábrica tienen una probabilidad de 0.005

#de ser defectuosos. Pero estos ítems se envían en cajas de cartón con 25 unidades

#La fábrica produce 1500 ítems diarios. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja de cartón elegida al azar contenga exactamente un ítem defectuoso?

#En este caso el valor de 1500 ítems no tiene ninguna importancia, porque se está preguntando por caja


dbinom(x=1, size=25, prob=0.005)

[1] 0.1108317
```

Función pbinom

Esta función devuelve el valor de la función de densidad acumulada (CDF) de la distribución binomial, dada una variable aleatoria q que representa el valor discreto a partir del cual se desea acumular la probabilidad. El número de ensayos se indica mediante el argumento “size”, y la probabilidad de éxito en cada ensayo se define con el argumento “prob”. Para determinar si la probabilidad se acumula hacia la cola izquierda o derecha, se utiliza el argumento lower.tail. Este es un valor lógico: si es TRUE, la acumulación es desde el valor discreto q hacia abajo (P [X ≤ x]); caso contrario, la acumulación es P([X >x]).

Veamos un ejemplo

#Un fabricante de discos USB externos para computadora entrega su producto en cajas de 20 discos. La tasa de fallos en los discos es del 10% . se desea saber cuál es la probabilidad de que 2 o más de los discos estén defectuosos y asumiendo esa probabilidad cual variación que el cliente esperaría encontrar de una caja a otra?

```
n=20

prob=.1

x=3


p<- pbinom(x,n,prob=prob, lower.tail=FALSE)

var= 20*p*(1-p)

var

[1] 2.305535
```

Función qbinom

Esta función devuelve el valor de la función de densidad acumulativa inversa (CDF) de la distribución binomial, dada una determinada variable aleatoria p, que representa la probabilidad acumulada, que un número de ensayos (size) y una probabilidad de éxito en cada ensayo (prob). El valor devuelto es el cuantil p-ésimo, es decir, el valor debajo del cual (o sobre el cual) se acumula dicha probabilidad. El argumento lower.tail se utiliza de la misma forma que en la función pbinom.

Veamos un ejemplo

#Sobre el mismo ejemplo anterior de la fábrica

#Cuál es la cantidad de ensayos que tengo que hacer para obtener una probabilidad de 30% ,teniendo un universo=10 y cuando cada prueba tiene una probabilidad del 40%

```
qbinom(p=.3 , size=10 ,prob=.4)

[1] 3
```

Función rbinom

Esta función genera un vector de variables aleatorias distribuidas binomialmente dada una longitud de vector n, una cantidad de ensayos, dada por el argumento, “size” y una probabilidad de éxito en cada ensayo “prob”.

Veamos un ejemplo:

#Suponga que está a cargo del QC de una fábrica. La fábrica hace 150 ítems por día.

#Los ítems defectuosos deben ser re elaborados. Sabemos que hay una tasa de error histórico del 5%. Queremos estimar cuantos ítems necesitaremos arreglar cada día esta semana (laboral).

#Usamos rbinom para generar una serie con estas características, porque rbinom y no rnorm, bueno el enunciado es que ya sea el item o está bien manufacturado o no, esto hace que usemos la distribución binomial

rbinom (n=5 , size=150 , prob=.05)

#por que n=5? Es para poner en la misma unidad, si fabricamos 150 por semana, queremos 5 muestras en la semana para tener una diaria, cada muestra representará la cantidad de pruebas con ítems malos.

size y prob son obvios

#Veamos casos extremos(tendríamos que reparar casi todos)

rbinom (n=5 , size=150 , prob=.9)

#Para n=1 solo una prueba que es la distribución de Bernoulli

rbinom (n=1 , size=10 , prob=.5)

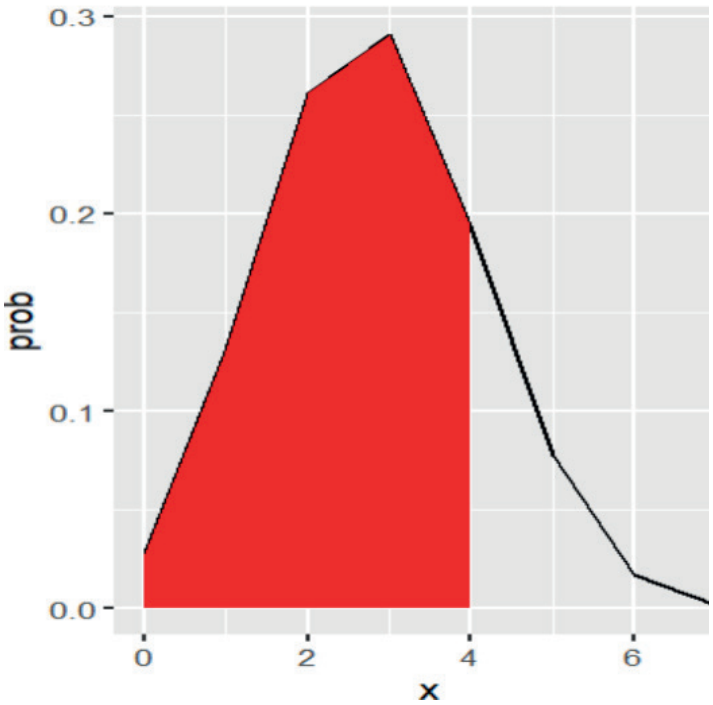
Visualización de la probabilidad acumulativa

La mejor forma de visualizar estas probabilidades acumulativas es a través de la función geom_ribbon. El siguiente código ilustra cómo lograrlo a partir de los valores obtenidos en la figura 5.

```
#Primero debemos obtener un dataset que contenga el valor de x y su probabilidad
df0 <- data.frame(x=NULL , prob=NULL)
for ( a in seq(from=0, to=7, by=1))
{
 print(a)
 prob= dbinom(a,7,0.4)
 dfline=data.frame(x=a, prob=prob)
 df0 <- rbind(df0, dfline)


}
df0
#La vista del dataset nos presenta las probabilidades puntuales para cada valor de x
#Ahora nos interesa saber la probabilidad acumulada para el valor de 4, implícitamente se estaría usando lower.tail=TRUE
 x   prob
1 0 0.0279936
2 1 0.1306368
3 2 0.2612736
4 3 0.2903040
5 4 0.1935360
6 5 0.0774144
7 6 0.0172032
8 7 0.0016384


pbinom(4,7,0.4, lower.tail=TRUE)
[1] 0.903744
#Creamos un subset de las probabilidades obtenidas
```

Figura 8

Probabilidad acumulativa en distribución binomial



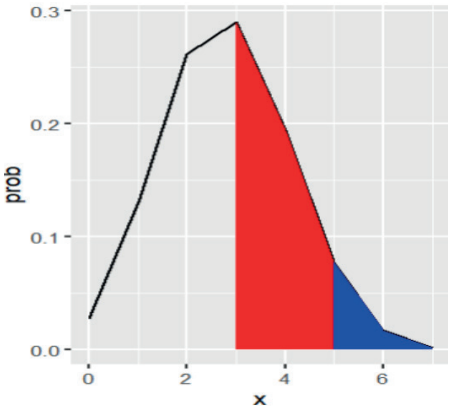
En otros casos se busca conocer la probabilidad acumulativa para un rango de valores, por ejemplo: De acuerdo con un estudio de educación universitarias, el 40% de los estudiantes trabajan durante el verano para ganar dinero para su colegiatura del siguiente semestre.

Si 7 estudiantes se seleccionan de manera aleatoria, cual es la probabilidad de que entre 3 y 5 estudiantes trabajen. Esto lo podemos mediante una diferencia de probabilidades binomiales.

```
#Primero debemos obtener un dataset que contenga el valor de x y su probabilidad
df0 <- data.frame(x=NULL , prob=NULL)
for ( a in seq(from=0, to=7, by=1))
{
 print(a)
 prob= dbinom(a,7,0.4)
 dfline=data.frame(x=a, prob=prob)
 df0 <- rbind(df0, dfline)


}
df0
#La vista del dataset nos presenta las probabilidades puntuales para cada valor de x
#Ahora nos interesa saber la probabilidad acumulada para el valor de 4, implícitamente se estaría usando lower.tail=TRUE
 x   prob
1 0 0.0279936
2 1 0.1306368
3 2 0.2612736
4 3 0.2903040
5 4 0.1935360
6 5 0.0774144
7 6 0.0172032
8 7 0.0016384



dfsub <- subset(df0, x>= 3 & x<= 5)
dfsub7 <- subset(df0, x>= 5 )
```

Figura 9

Visualización de rango de probabilidades binomiales



Referencias citadas en la Clase 1.

Webster A., (2000), Estadística aplicada a los negocios, Irwin Professional Publishing

Definición de los términos citados en la Clase 1.

Distribución Bernoulli	La distribución de Bernoulli es una distribución discreta que está relacionada con muchas distribuciones, tales como la distribución binomial, geométrica y binomial negativa. La distribución de Bernoulli representa el resultado de 1 ensayo. Las secuencias de ensayos de Bernoulli independientes generan las demás distribuciones: la distribución binomial modela el número de éxitos en n ensayos, la distribución geométrica modela el número de fallas antes del primer éxito y la distribución binomial negativa modela el número de fallas antes del éxito $x^{ésimo}$
Ensayos	Piense en los ensayos como repeticiones de un experimento. La letra n denota el número de ensayos. Solo hay dos resultados posibles, llamados “éxito” y “fracaso”, para cada ensayo. La letra p denota la probabilidad de éxito en un ensayo y q denota la probabilidad de fracaso en un ensayo. $p+q=1$ $p + q = 1$.

Profundización Clase 1.

Video

Presenta casos de distribución binomial

Enlace

PUCE Virtual

La excelencia no se improvisa

síguenos