

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Diagonalización y Valores Propios

Clase 10



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

La **diagonalización** es uno de los procesos más poderosos y fundamentales en **álgebra lineal**, que permite simplificar enormemente el estudio y la manipulación de **matrices cuadradas**. Este proceso transforma una matriz dada en una matriz diagonal que conserva las propiedades fundamentales de la matriz original, pero en una forma mucho más simple de trabajar. La clave de la diagonalización radica en la existencia de una **base de vectores propios** de la matriz, lo que permite que la transformación lineal asociada se represente de manera mucho más directa. Los **valores propios** de la matriz original se colocan en la diagonal de la nueva matriz diagonal, y estos valores propios son escalares que describen cómo los **vectores propios** se estiran o comprimen al aplicar la transformación. Este enfoque no solo simplifica los cálculos al elevar matrices a potencias o al resolver ecuaciones diferenciales lineales, sino que también permite una visión más profunda de la estructura interna de las **transformaciones lineales** y sus efectos en los **espacios vectoriales**. La diagonalización convierte una tarea computacionalmente compleja en algo mucho más accesible, especialmente cuando se trata de problemas que involucran matrices de gran tamaño o sistemas dinámicos complejos.

Los **valores propios** y **vectores propios** son esenciales en muchas aplicaciones científicas y tecnológicas, desempeñando un papel crucial en la interpretación y análisis de sistemas dinámicos y procesos naturales. En **ingeniería estructural**, por ejemplo, la diagonalización de matrices de **rigidez** y **masa** es fundamental para identificar los **modos normales de vibración** de una estructura. Este análisis es vital para evaluar cómo una estructura responde a cargas dinámicas y para evitar resonancias destructivas que podrían comprometer su integridad. En **física**, los valores propios se encuentran al estudiar **operadores lineales** que describen sistemas cuánticos, donde los **valores propios** corresponden a los **niveles de energía** posibles de los sistemas, mientras que los **vectores propios** representan los **estados cuánticos** asociados. Además, en **ciencias de la computación** y en el **análisis de datos**, técnicas como el **análisis de componentes principales (PCA)** se basan en la diagonalización para **reducir la dimensionalidad** de grandes volúmenes de datos, facilitando la identificación de patrones y simplificando modelos complejos sin perder información esencial. Este proceso de reducción de dimensionalidad es especialmente útil en áreas como el **aprendizaje automático**, la **inteligencia artificial** y el **procesamiento de señales**,

donde los datos multidimensionales deben analizarse de manera eficiente. Así, la diagonalización y el análisis de **valores propios** se han convertido en herramientas fundamentales no solo para resolver problemas matemáticos complejos, sino también para mejorar la comprensión y la optimización de sistemas multidimensionales en una amplia variedad de disciplinas científicas y de ingeniería.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
 - 2) Analizar los problemas relacionados al Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
-

Reto # (2)

Clase 10: Diagonalización y Valores Propios

La diagonalización es una técnica fundamental en álgebra lineal que permite simplificar la manipulación de matrices cuadradas. Esta técnica es especialmente útil para estudiar sistemas dinámicos, resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, realizar análisis espectral en física e ingeniería, y en muchas otras aplicaciones científicas. El proceso consiste en transformar una matriz cuadrada A en una matriz diagonal D mediante un cambio de base dado por una matriz invertible P , tal que:

$$P^{-1}AP = D$$

Donde D es una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son los eigenvalores (valores propios) de A .

Para comprender este proceso es esencial dominar los conceptos de **valores propios** y **vectores propios**, así como el proceso de encontrar estos elementos y entender bajo qué condiciones una matriz es diagonalizable.

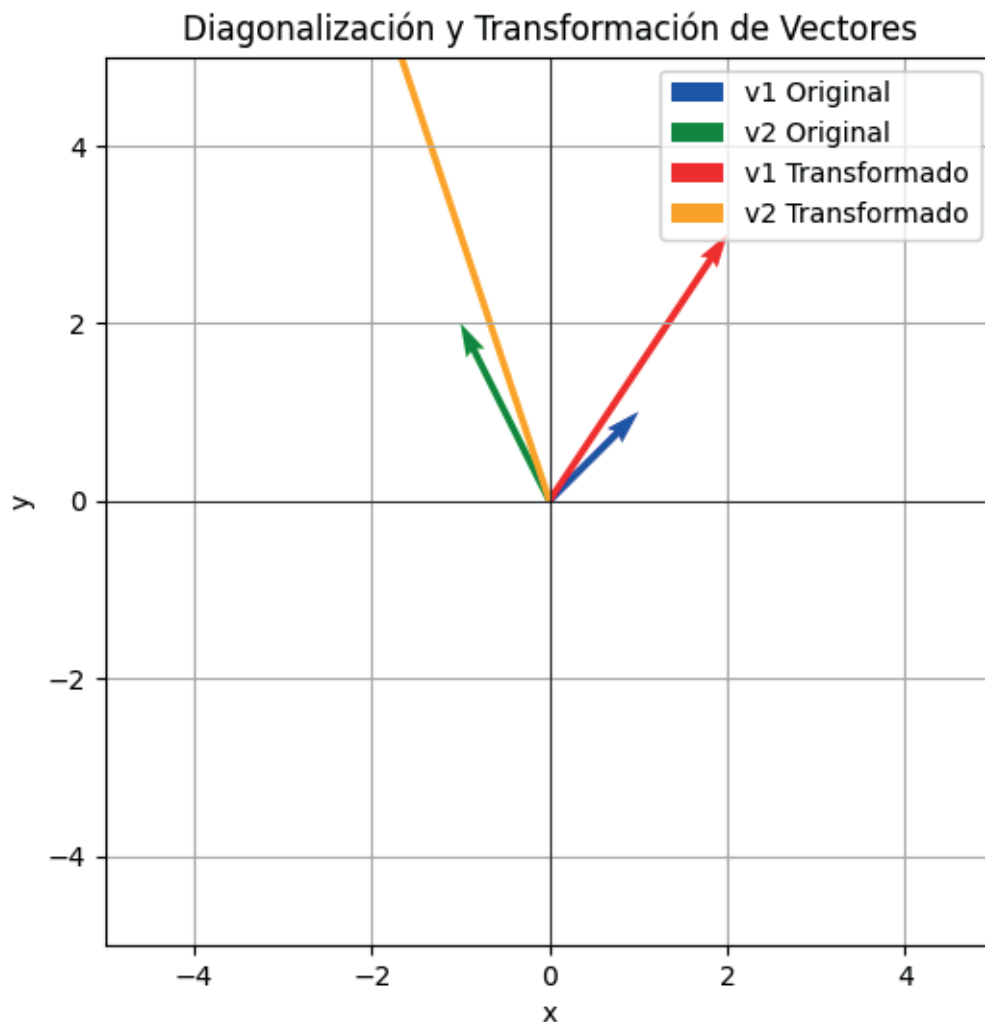


Gráfico 1: Representación visual de Diagonalización.

Creación propia.

La diagonalización es una herramienta poderosa que se utiliza en álgebra lineal para simplificar el estudio y la manipulación de matrices cuadradas. Este proceso transforma una matriz cuadrada en una forma más sencilla, es decir, una matriz diagonal, lo que facilita enormemente los cálculos relacionados con potencias de matrices, sistemas de ecuaciones diferenciales, análisis de estabilidad de sistemas dinámicos, y muchos otros problemas en física e ingeniería. La idea central detrás de la diagonalización es que las

matrices diagonales son mucho más fáciles de manejar que las matrices generales, ya que las operaciones de multiplicación y potencia de matrices se vuelven más directas y computacionalmente eficientes.

Para entender cómo se realiza la diagonalización de una matriz, es importante primero comprender dos conceptos clave: los valores propios y los vectores propios de una matriz. Los valores propios de una matriz son aquellos escalares que describen cómo la matriz afecta a ciertos vectores al ser multiplicados por ella. Los vectores propios, por otro lado, son los vectores cuya dirección no cambia cuando son transformados por la matriz, aunque su magnitud puede escalarse por el valor propio correspondiente. Estos vectores y valores propios son esenciales para el proceso de diagonalización, ya que la matriz diagonal resultante tiene en su diagonal los valores propios de la matriz original, y las columnas de la matriz que lleva a cabo la diagonalización están formadas por los vectores propios.

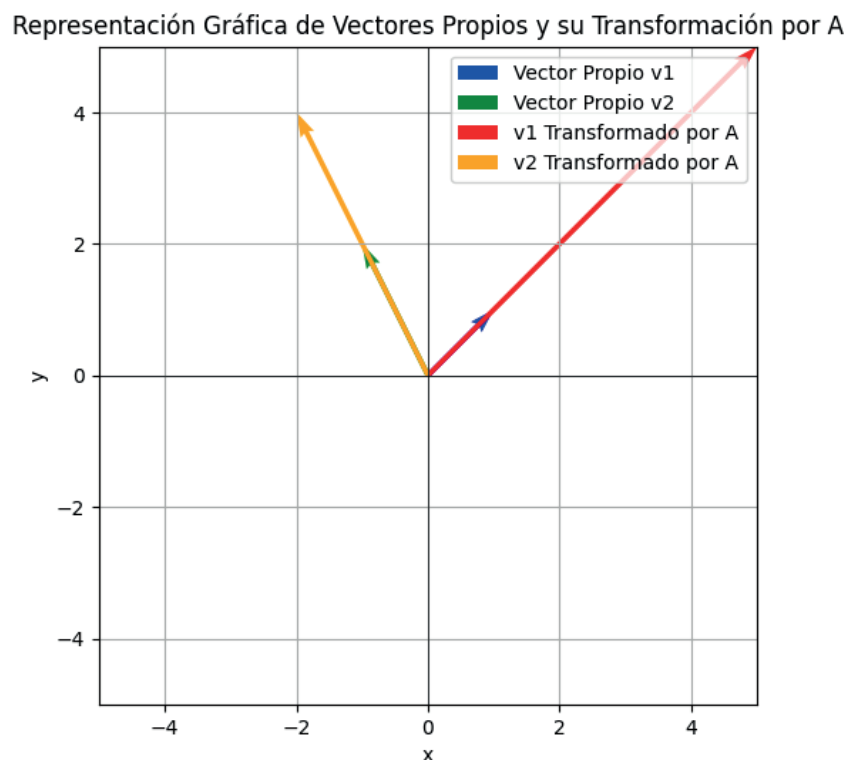


Gráfico 2: Representación visual de Valores y Vectores Propios.

Creación propia.

El proceso de diagonalización comienza con la búsqueda de los valores propios de la matriz original. Esto implica resolver el polinomio característico de la matriz, que se obtiene restando un valor escalar multiplicado por la matriz identidad a la matriz original, y luego calculando el determinante del resultado. Los valores propios se encuentran como las soluciones de esta ecuación. Una vez que se han encontrado los valores propios, el siguiente paso es determinar los vectores propios correspondientes a cada valor propio. Esto se hace resolviendo un sistema de ecuaciones lineales, y los vectores que satisfacen esta ecuación son los vectores propios.

Una vez que se han encontrado los vectores propios, se puede construir una matriz de vectores propios. Si la matriz original es diagonalizable, entonces los vectores propios formarán una base del espacio vectorial y la matriz de vectores propios será invertible. Con esta matriz invertible, se puede llevar a cabo la diagonalización de la matriz original, produciendo una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de la matriz original.

Sin embargo, no todas las matrices son diagonalizables. Para que una matriz sea diagonalizable, debe cumplir con una condición importante: debe tener un número suficiente de vectores propios linealmente independientes para formar una base del espacio vectorial. Esto sucede, por lo general, cuando la matriz tiene un número completo de valores propios distintos, aunque existen casos más complejos en los que matrices con valores propios repetidos también pueden ser diagonalizables si cumplen con la condición de tener suficientes vectores propios linealmente independientes. Si una matriz no tiene suficientes vectores propios linealmente independientes, no será diagonalizable, aunque en algunos casos se puede realizar una forma generalizada de diagonalización llamada "diagonalización de Jordan", que es un proceso más complejo.

La diagonalización tiene muchas aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. En física, por ejemplo, la diagonalización de matrices es fundamental en el estudio de sistemas cuánticos, ya que permite encontrar los estados propios de un sistema, lo cual es esencial para comprender el comportamiento del sistema en cuestión. En ingeniería, se usa en la resolución de sistemas dinámicos lineales, como los que describen el comportamiento de circuitos eléctricos, oscilaciones mecánicas o sistemas de control. La capacidad de diagonalizar una matriz facilita la solución de estos

sistemas, ya que las ecuaciones que describen su evolución temporal se vuelven mucho más simples cuando se trabaja con matrices diagonales.

Además, en la teoría de ecuaciones diferenciales, la diagonalización de matrices es útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, especialmente cuando estos sistemas están relacionados con matrices de coeficientes constantes. Al diagonalizar la matriz de coeficientes, el sistema se descompone en un conjunto de ecuaciones más simples que pueden resolverse de forma independiente, lo que permite obtener soluciones más fácilmente.

En el ámbito de la informática y la ciencia de datos, la diagonalización también tiene aplicaciones. Se utiliza en algoritmos de reducción de dimensionalidad, como el análisis de componentes principales (PCA), que es una técnica utilizada en el procesamiento de datos y el aprendizaje automático para reducir el número de variables en un conjunto de datos sin perder demasiada información. Esto se logra mediante la diagonalización de matrices de covarianza, lo que permite encontrar las direcciones principales de variabilidad en los datos.

Es importante destacar que, además de la diagonalización estándar, existen otros tipos de descomposición de matrices que se utilizan en álgebra lineal y que también están relacionadas con el estudio de los valores y vectores propios. Algunas de estas descomposiciones incluyen la descomposición en valores singulares (SVD), que se utiliza en áreas como la compresión de imágenes, la filtración de ruido y la resolución de sistemas sobredeterminados, y la descomposición de Jordan, que generaliza la diagonalización para matrices que no son diagonalizables en el sentido clásico.

10.1. Cálculo de eigenvalores y eigenvectores

Un **valor propio** o **eigenvalor** de una matriz A es un escalar λ tal que existe un vector no nulo $\mathbf{v}$, llamado **vector propio** o **eigenvector**, que satisface la ecuación:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Esto significa que aplicar la transformación lineal representada por la matriz A al vector $\mathbf{v}$ resulta en un vector colineal a $\mathbf{v}$, escalado por el factor λ .

Para encontrar los valores propios, es necesario resolver la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Donde I es la matriz identidad del mismo tamaño que A . Esta expresión genera un polinomio característico en λ , cuyas raíces son precisamente los eigenvalores.

La importancia de los eigenvalores radica en que describen las escalas en que la matriz actúa en distintas direcciones, mientras que los eigenvectores determinan esas direcciones.

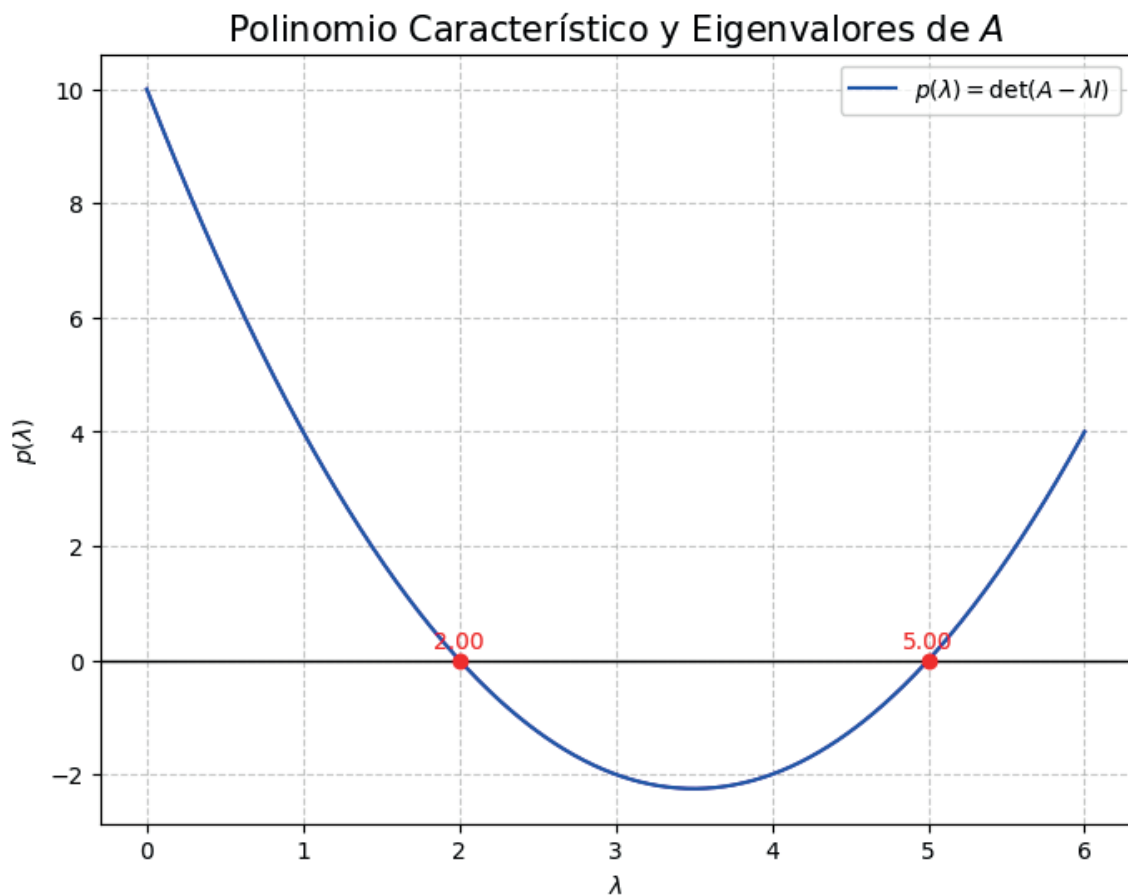


Gráfico 3: Representación visual del polinomio característico y sus raíces como eigenvalores.

Creación propia.

10.2. Proceso detallado para encontrar eigenvalores

Para ilustrar el proceso, consideremos una matriz cuadrada $n \times n$. El procedimiento es:

1. Construir la matriz $A - \lambda I$.
2. Calcular el determinante $\det(A - \lambda I)$, que es un polinomio de grado n en λ .
3. Resolver la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, que son los eigenvalores.

Ejemplo para una matriz 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

La solución se obtiene con la fórmula cuadrática.

Este polinomio característico es fundamental pues su grado iguala la dimensión de la matriz y refleja la complejidad del sistema.

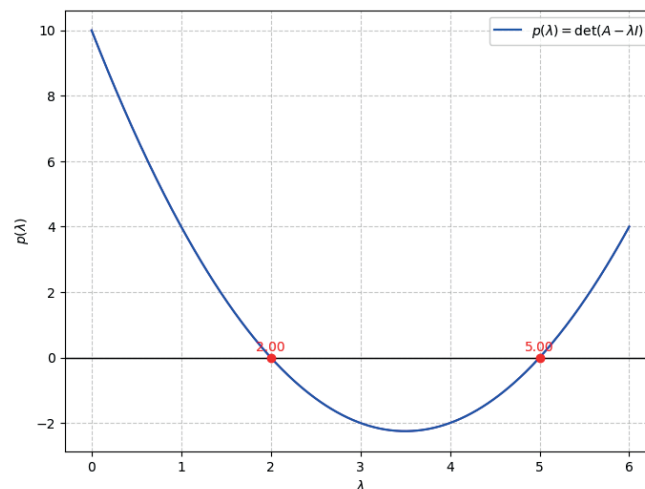


Gráfico 4: Ejemplo de cálculo del polinomio característico para una matriz 2x2.

Creación propia.

10.3. Proceso para encontrar eigenvectores

Una vez encontrados los eigenvalores, el siguiente paso es hallar los eigenvectores asociados a cada uno. Para cada eigenvalor λ , se debe resolver el sistema homogéneo:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Este sistema representa un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas. Como el determinante de $A - \lambda I$ es cero (por definición de eigenvalor), el sistema tiene soluciones infinitas no triviales.

La solución no trivial v es el eigenvector correspondiente a λ . Este vector pertenece al núcleo (kernel) de la matriz $A - \lambda I$.

El conjunto de todos los eigenvectores asociados a λ , junto con el vector cero, forman un subespacio vectorial llamado **espacio propio** o **eigenspace** de λ .

El cálculo de los eigenvectores se realiza generalmente por reducción de matrices (método de eliminación Gaussiana) sobre la matriz $A - \lambda I$.

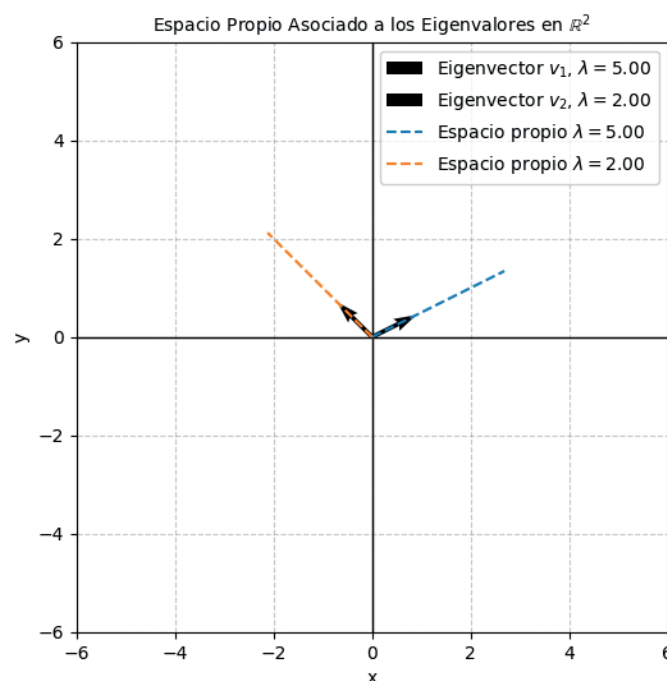


Gráfico 5: Visualización del espacio propio asociado a un eigenvalor en R^2 .

Creación propia.

10.4. Diagonalización: Concepto y procedimiento

Una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que:

$$P^{-1}AP = D$$

donde D es diagonal, y sus elementos diagonales son los eigenvalores de A .

El procedimiento para diagonalizar una matriz consta de:

1. Encontrar todos los eigenvalores de A .
2. Para cada eigenvalor, encontrar la base de su espacio propio (los eigenvectores).
3. Si el conjunto total de eigenvectores es linealmente independiente y tiene cardinalidad igual al tamaño de A , entonces se construye la matriz P con estos eigenvectores como columnas.
4. La matriz D es la matriz diagonal formada por los eigenvalores en el mismo orden de los eigenvectores en P .

Diagonalizar una matriz permite simplificar mucho los cálculos, en particular para:

- Calcular potencias A^n con facilidad, ya que:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

- Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Realizar análisis espectral en física y estadística.

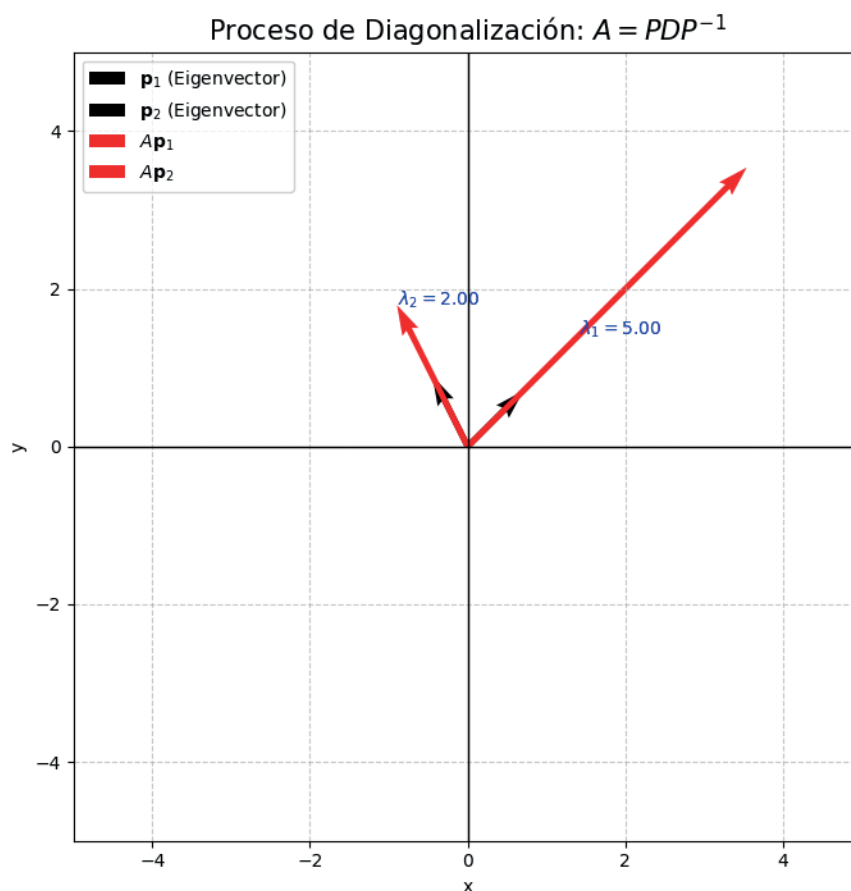


Gráfico 6: Proceso gráfico de diagonalización con matrices A , P , D , y P^{-1} .

Creación propia.

10.5. Condiciones necesarias y suficientes para la diagonalización

No todas las matrices son diagonalizables. Algunas condiciones clave son:

- Una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n eigenvectores linealmente independientes.
- Matrices con eigenvalores distintos siempre son diagonalizables.
- En matrices con eigenvalores repetidos, la diagonalización depende de la cantidad de eigenvectores asociados.
- Las matrices simétricas reales son siempre diagonalizables y poseen una base ortonormal de eigenvectores (teorema espectral).
- La diagonalización puede ser considerada como un cambio de base a un sistema de vectores propios.

Cuando estas condiciones no se cumplen, la matriz no es diagonalizable y puede tener una forma de Jordan.

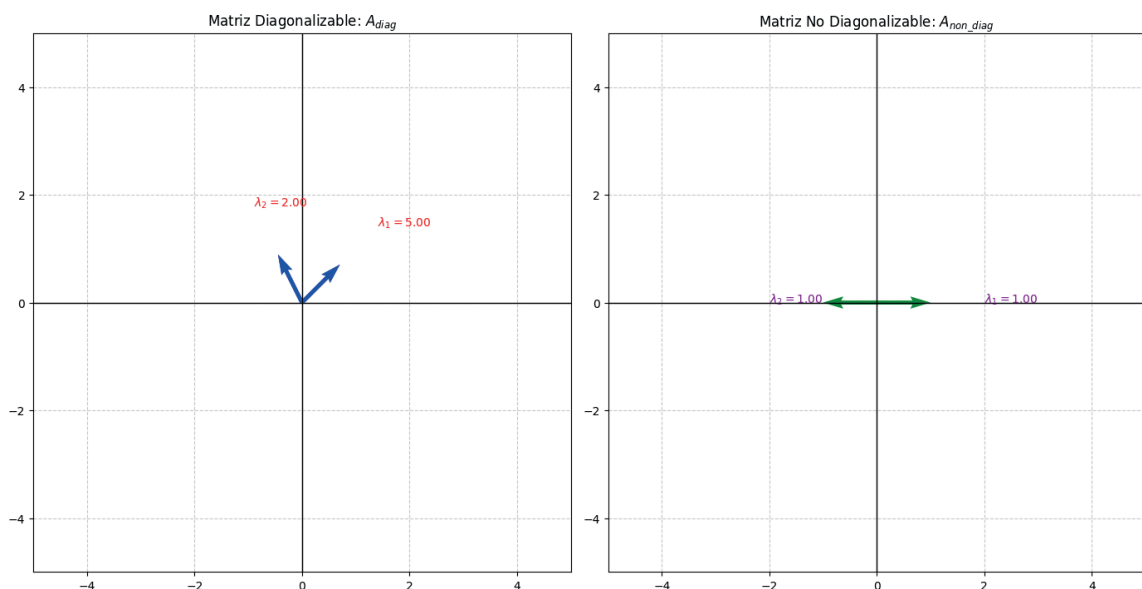


Gráfico 7: Condiciones visuales para diagonalización con ejemplos de matrices diagonalizables y no diagonalizables.

Creación propia.

10.6. Aplicaciones prácticas y ejemplos

Ejemplo 1: Diagonalización de una matriz 2x2

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Calcular el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Paso 2: Resolver para λ :

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Paso 3: Encontrar eigenvectores:

Para $\lambda_1 = 5$:

$$(A - 5I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} v = 0$$

Sistemas equivalentes dan $v_1 = v_2$. Un eigenvector asociado es $v_1 = (1, 1)^T$.

Para $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v = 0$$

De aquí $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$. Un eigenvector asociado es $v_2 = (1, -2)$.

Paso 4: Construir matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con esto,

$$P^{-1}AP = D$$

lo que confirma que A es diagonalizable.

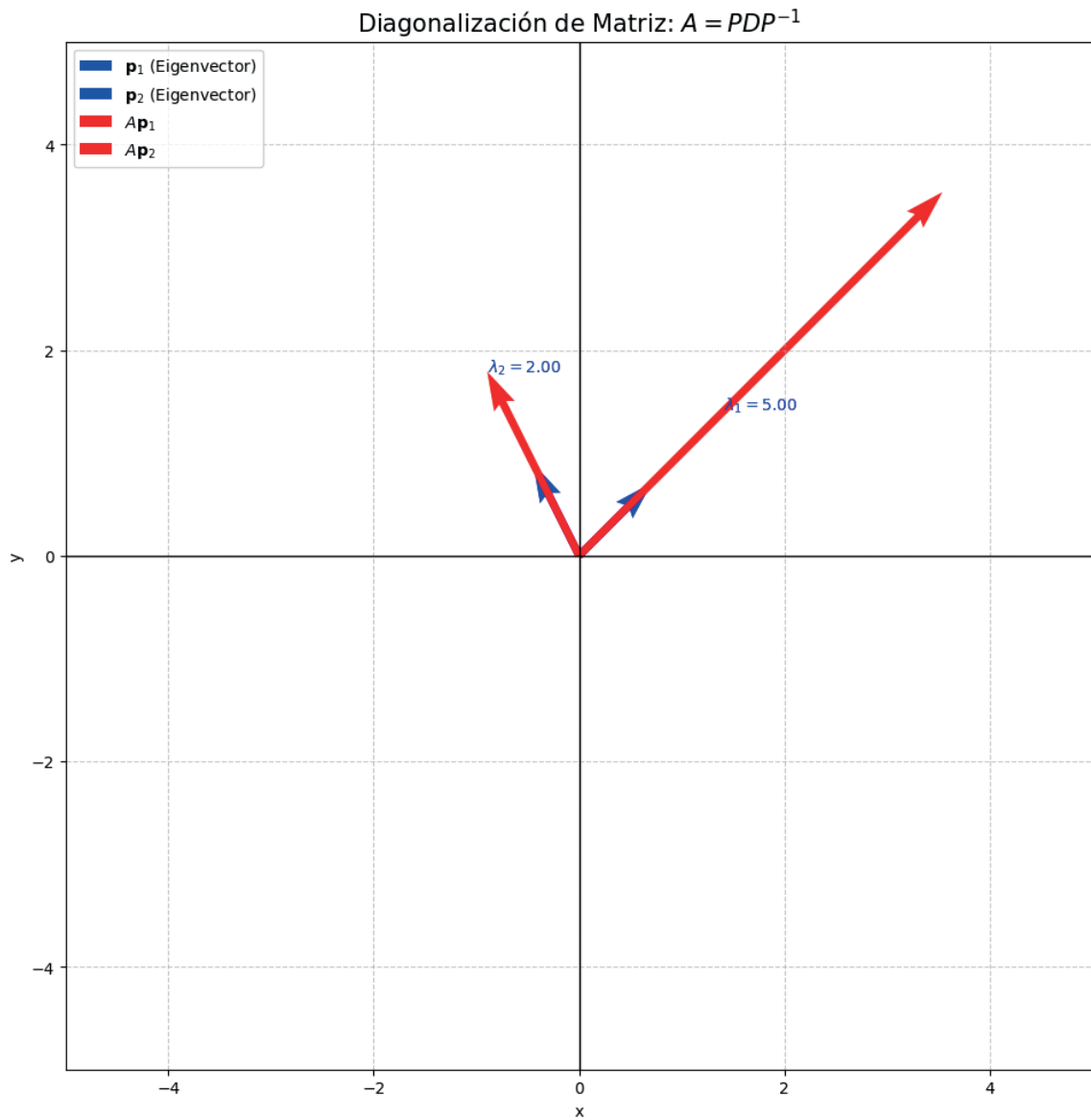


Gráfico 8: Ejemplo de diagonalización con matriz A , matriz P y matriz diagonal D .

Creación propia.

Aplicaciones prácticas adicionales

- **Sistemas de ecuaciones diferenciales:** La diagonalización permite resolver sistemas lineales con coeficientes constantes de forma directa al reducir la matriz del sistema a una matriz diagonal.
- **Estabilidad de sistemas dinámicos:** Los eigenvalores determinan la estabilidad y comportamiento a largo plazo del sistema.
- **Mecánica cuántica:** Los operadores hermíticos son diagonalizables y sus eigenvalores representan cantidades observables.
- **Análisis de vibraciones:** La diagonalización de matrices de masa y rigidez permite obtener modos normales de vibración.
- **Compresión de datos y reducción de dimensionalidad:** En análisis de componentes principales (PCA), se diagonaliza la matriz de covarianza para identificar direcciones principales de variación.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Este video ofrece una explicación clara y visual sobre los conceptos de eigenvalores, eigenvectores y cómo se realiza la diagonalización, con ejemplos prácticos.

[Video sobre diagonalización y valores propios](#)

Enlace 2:

Artículo detallado sobre el proceso de diagonalización, con aplicaciones en sistemas dinámicos y ejemplos de matrices diagonalizables y no diagonalizables.

[Artículo sobre diagonalización y aplicaciones](#)

Términos Subrayados y Definiciones

Eigenvalor (valor propio): Escalar λ que satisface la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para un vector no nulo $\mathbf{v}$.

Diagonalización: Proceso por el cual una matriz cuadrada se convierte en una matriz diagonal mediante un cambio de base formado por eigenvectores.

Referencias

- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and Its Applications* (5th ed.). Pearson.
 - Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
 - Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
 - Kolman, B., & Hill, D. R. (2005). *Álgebra lineal con aplicaciones* (6ª ed.). Pearson Educación.
 - Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2003). *Álgebra lineal* (4ª ed.). Pearson Educación.
-

Recursos de Profundización

Artículo 1: Diagonalización y Valores Propios

Descripción del enlace:

Este artículo profundiza en los conceptos fundamentales de la diagonalización de matrices y el cálculo de valores propios y vectores propios. Se aborda el proceso de encontrar los eigenvalores de una matriz, seguido del cálculo de los eigenvectores asociados. Además, se explica el proceso de diagonalización, que permite representar una matriz como el producto de tres matrices, una de las cuales es diagonal. Se analizan las condiciones necesarias para que una matriz sea diagonalizable y se presentan aplicaciones prácticas de la diagonalización, como la simplificación de cálculos y la resolución de sistemas lineales.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1Jn1p_8qawUlte3MdjLaldveIHjbYglQy/view?usp=sharing

Artículo 2: Ejercicios sobre Diagonalización y Valores Propios

Descripción del enlace:

Este artículo presenta cinco ejercicios prácticos sobre diagonalización, valores propios y vectores propios. A través de estos ejercicios, se refuerzan los conceptos teóricos aprendidos sobre cómo calcular los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz, cómo verificar si una matriz es diagonalizable, y cómo aplicar la diagonalización en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Cada ejercicio es acompañado de una solución detallada, lo que permite al lector comprender mejor el proceso y evitar errores comunes en la manipulación de matrices y valores propios.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1kokZ6o0lCjBrP2XRkipiRR5s_CB3oYOp/view?usp=sharing



La excelencia no se improvisa

síguenos

