

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Introducción a las Cónicas: Elipse, Parábola e Hipérbola

Clase 12



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Las **cónicas** son curvas geométricas que surgen cuando un plano corta un cono en diferentes ángulos. Dependiendo de la inclinación y la posición del plano con respecto al cono, se pueden obtener tres tipos principales de cónicas: la **elipse**, la **parábola** y la **hipérbola**, cada una con propiedades geométricas y algebraicas únicas. Estas curvas son fundamentales en álgebra y geometría analítica, y se describen mediante ecuaciones de segundo grado. La **elipse** tiene dos ejes de simetría y es la figura que describe la trayectoria de los planetas en el espacio, de acuerdo con las leyes de Kepler. La **parábola**, por su parte, es una curva con un solo eje de simetría y aparece en fenómenos como la trayectoria de los proyectiles en física, así como en el diseño de reflectores y antenas parabólicas. Finalmente, la **hipérbola** se caracteriza por tener dos ramas separadas y es crucial para describir fenómenos en los que intervienen velocidades relativas altas o en la representación de ciertos tipos de ondas, como las ondas acústicas o electromagnéticas.

El estudio de las cónicas no solo se limita a la geometría pura, sino que tiene aplicaciones prácticas en diversas disciplinas de la ciencia y la ingeniería. En **astronomía**, las órbitas de los planetas son elípticas, lo que permite predecir sus movimientos y estudiar la interacción gravitacional entre cuerpos celestes. En **ingeniería**, la parábola se utiliza en el diseño de reflectores y antenas, donde la propiedad de que los rayos paralelos se reflejan en un único punto focal es aprovechada para concentrar señales, luz o energía. Las **hipérbolas** son fundamentales en la navegación y en el análisis de trayectorias, especialmente cuando se trata de la propagación de ondas o el estudio de sistemas de control de tráfico aéreo, donde la velocidad relativa entre dos objetos puede describirse mediante una hipérbola. Además, las cónicas tienen un papel esencial en **óptica** y **teoría de la radiación**, ya que se utilizan para modelar el comportamiento de la luz y las ondas al interactuar con superficies reflectantes o refractivas. En resumen, el estudio de las cónicas permite no solo entender formas geométricas, sino también aplicar este conocimiento a una variedad de campos científicos y tecnológicos.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
 - 2) Analizar los problemas relacionados al Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
 - 3) Aplicar distintos tópicos del algebra Lineal y la Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
-

Reto # (3)

Clase 12: Introducción a las Cónicas: Elipse, Parábola e Hipérbola

Las **cónicas** son curvas fundamentales en la geometría que se originan por la intersección de un plano con un cono de revolución. Según el ángulo de corte entre el plano y el cono, se generan diferentes tipos de curvas conocidas como **elipse**, **parábola** e **hipérbola**. Estas curvas tienen aplicaciones muy diversas en campos como la física, la astronomía, la ingeniería y la óptica, entre otros. A lo largo de este tema, se analizarán los conceptos fundamentales de las cónicas, sus diferencias y aplicaciones, así como su relevancia en el mundo moderno.

Las cónicas, como curvas geométricas generadas por la intersección de un plano con un cono de revolución, son una parte esencial de la geometría y tienen una profunda influencia en diversas disciplinas científicas y tecnológicas. Dependiendo de la inclinación del plano respecto al cono, se forman diferentes tipos de cónicas: la elipse, la parábola y la hipérbola. Cada una de estas curvas posee propiedades geométricas particulares que las hacen únicas y útiles para una amplia gama de aplicaciones.

La **elipse**, por ejemplo, es una curva cerrada que puede ser descrita como el conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta propiedad la convierte en una herramienta clave en la descripción de órbitas planetarias.

De hecho, el movimiento de los planetas alrededor del Sol sigue una trayectoria elíptica, como lo describió la ley de Kepler. Además, las elipses se encuentran en el diseño de antenas parabólicas, telescopios y en aplicaciones de óptica, ya que tienen la propiedad de que cualquier rayo que incida en uno de sus focos se reflejará hacia el otro foco.

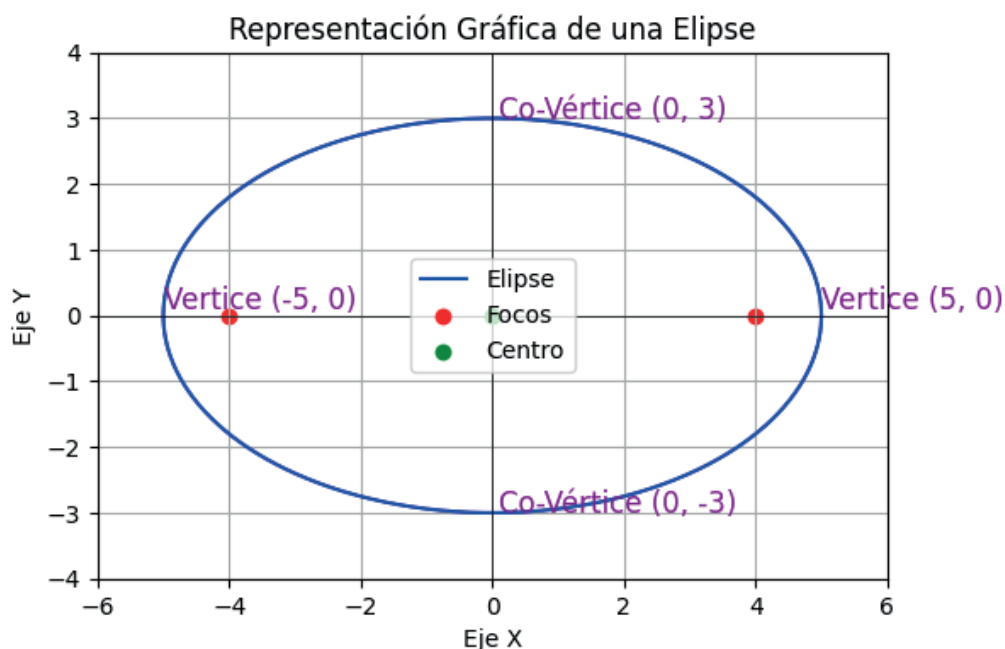


Gráfico 1: Representación de una elipse.

Creación propia.

Por otro lado, la **parábola** es una curva abierta que posee una simetría única, caracterizada por su propiedad de que cualquier rayo paralelo a su eje de simetría se refleja en un único punto, conocido como el vértice. Esta característica se utiliza de manera efectiva en el diseño de espejos parabólicos, como los que se encuentran en telescopios y parabólicas de comunicaciones, donde se requiere enfocar la luz o señales en un punto preciso. En física, las trayectorias de proyectiles en ausencia de resistencia del aire siguen una parábola, lo que hace que el estudio de las parábolas sea esencial en la balística y en la ingeniería de sistemas de lanzamientos.

La **hipérbola**, por su parte, es una curva abierta que tiene una relación especial con las elipses, pero con características muy distintas. En una hipérbola, la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Este tipo de curva se puede observar en fenómenos como las trayectorias de objetos que se mueven a velocidades

cercanas a la de la luz, como ocurre en la teoría de la relatividad de Einstein. Además, las hipérbolas son cruciales en el estudio de fenómenos de propagación de ondas en la física, como las ondas acústicas y electromagnéticas. En óptica, los sistemas de espejos hiperbólicos son empleados para enfocar la luz de manera eficiente en aplicaciones como telescopios y dispositivos de comunicaciones.

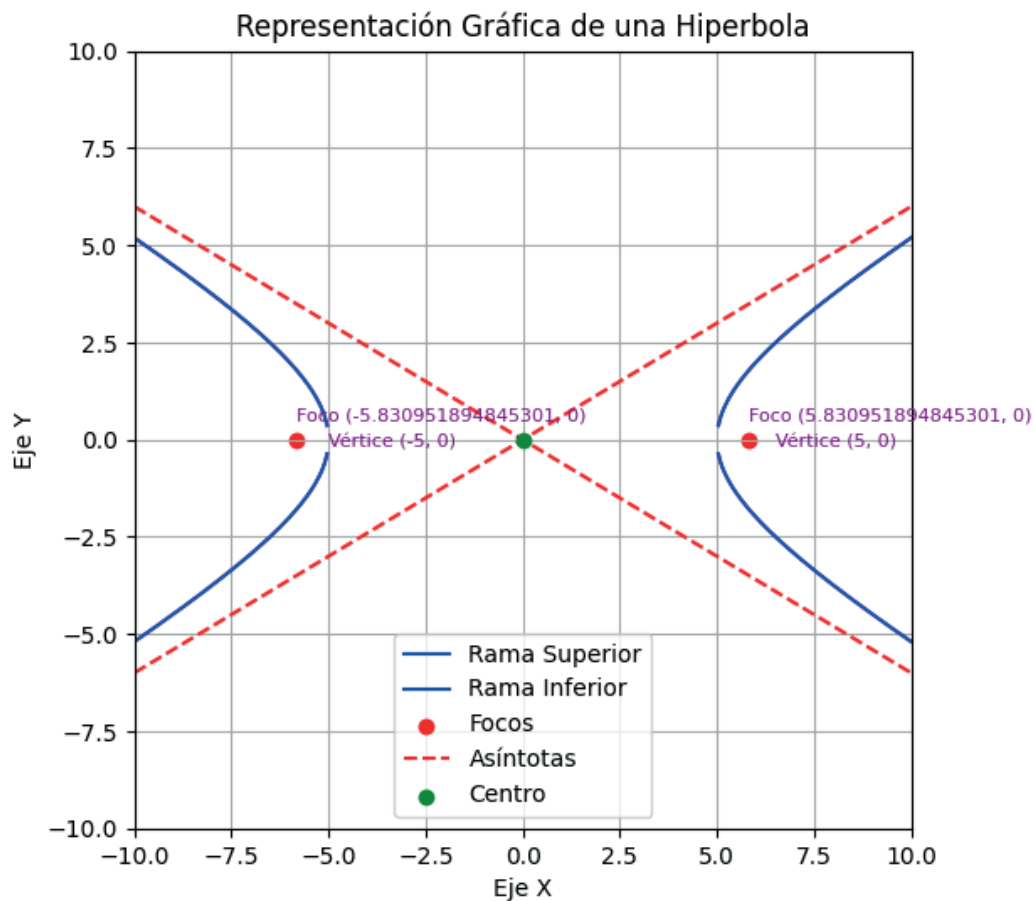


Gráfico 2: Representación de una hipérbola.

Creación propia.

Una de las características que comparten todas las cónicas es que tienen una ecuación general en el plano cartesiano que puede tomar diferentes formas dependiendo de las condiciones iniciales del corte entre el plano y el cono. La simetría y las propiedades geométricas de estas curvas permiten su uso en el análisis de diversos fenómenos naturales y artificiales. En astronomía, como se mencionó, las órbitas planetarias y la trayectoria de cometas están gobernadas por elipses, mientras que, en las telecomunicaciones, las parábolas se emplean en antenas satelitales y sistemas de radar. Además, el análisis de cónicas es esencial en la navegación y en el estudio de satélites,

donde las trayectorias pueden ser modeladas con precisión utilizando ecuaciones de cónicas.

En ingeniería civil y arquitectura, las cónicas también encuentran aplicación en el diseño de estructuras de soporte, como puentes y túneles, donde las formas geométricas derivadas de cónicas pueden proporcionar estabilidad y resistencia. De hecho, el uso de estructuras que imitan la geometría de las cónicas permite optimizar el uso de materiales, maximizando la eficiencia de los recursos.

La **óptica** es otra disciplina en la que las cónicas juegan un papel esencial. Los sistemas ópticos, como lentes y espejos, utilizan las propiedades de las cónicas para dirigir y enfocar luz de manera precisa. Los telescopios, por ejemplo, se basan en espejos parabólicos o elípticos para capturar la mayor cantidad de luz posible de objetos distantes, lo que facilita la observación astronómica. Además, en la fabricación de sistemas ópticos, como cámaras y proyectores, las cónicas son utilizadas para evitar aberraciones ópticas y lograr imágenes de alta calidad.

Otro campo relevante es la **geometría computacional**, donde las cónicas se utilizan para modelar y analizar curvas en dos y tres dimensiones. Este tipo de geometría es importante en el diseño asistido por computadora (CAD), que se emplea en ingeniería y arquitectura para crear representaciones digitales de objetos y estructuras. La capacidad de modelar superficies complejas utilizando cónicas permite crear diseños más precisos y eficientes, lo que facilita el proceso de fabricación de piezas y estructuras.

Finalmente, las cónicas también tienen aplicaciones en el **campo de la navegación y geodesia**, donde se utilizan para modelar trayectorias de objetos, como aviones y satélites, que siguen órbitas elípticas o hiperbólicas. Las trayectorias parabólicas son importantes en la ingeniería de misiles y proyectiles, y las ecuaciones cónicas permiten predecir la ubicación y el tiempo de llegada de estos objetos con alta precisión. En resumen, las cónicas son más que una curiosidad matemática: son herramientas poderosas que permiten comprender y resolver una amplia gama de problemas en la ciencia, la ingeniería y la tecnología.

12.1. Conceptos generales

Las cónicas se generan al cortar un cono con un plano. Dependiendo de cómo el plano intersecte el cono, las diferentes configuraciones resultan en tres tipos de curvas principales: elipse, parábola e hipérbola. El tipo de cónica que se genera depende del ángulo de intersección entre el plano y el eje del cono.

- **Elipse:** La elipse es una curva cerrada y simétrica que se obtiene cuando el plano corta el cono de forma oblicua, pero no de manera perpendicular al eje del cono. Esta forma se puede describir como una versión "aplanada" de un círculo, en el que dos focos están involucrados. La distancia total de cualquier punto en la elipse a estos dos focos permanece constante.
- **Parábola:** La parábola es una curva abierta que se genera cuando el plano corta el cono paralelo a una de las generatrices del cono. Se caracteriza por tener una simetría única en la que cualquier punto en la curva está a la misma distancia de un foco y una directriz, que es una línea recta fija.
- **Hipérbola:** La hipérbola es otra curva abierta que resulta cuando el plano corta el cono en un ángulo tal que se genera una intersección que forma dos ramas. La hipérbola está definida por la propiedad de que la diferencia de las distancias de cualquier punto sobre la curva a dos focos es constante.

Ecuaciones de las cónicas en coordenadas cartesianas:

1. **Elipse:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es el semi-eje mayor y b es el semi-eje menor.
2. **Parábola:** $y^2 = 4px$, donde p es la distancia entre el vértice y el foco de la parábola.
3. **Hipérbola:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es la distancia desde el centro al vértice y b se refiere a la longitud del semi-eje transversal.

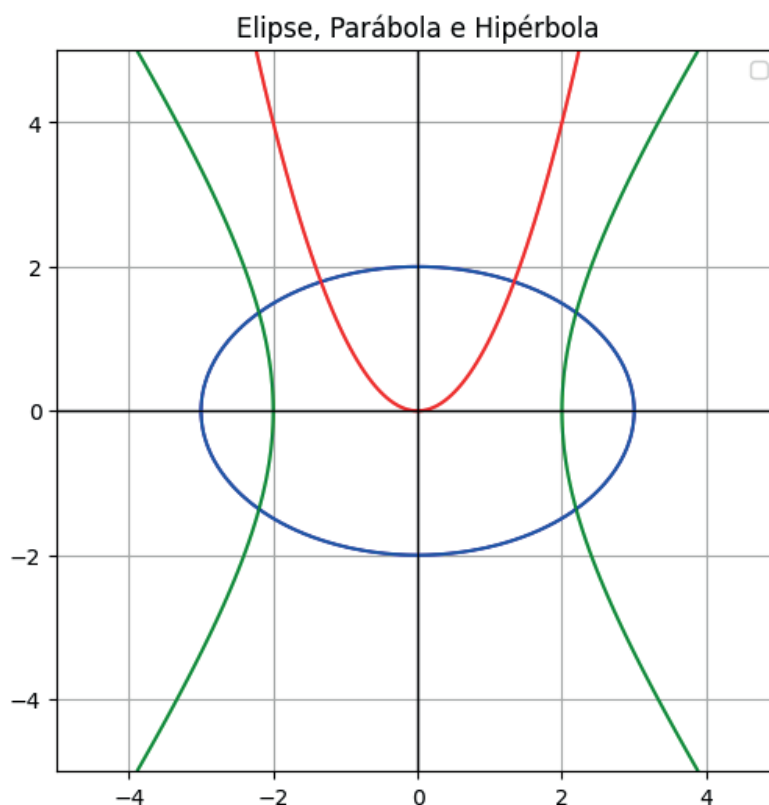


Gráfico 3: Representación de una elipse, parábola e hipérbola.

Creación propia.

12.2. Definiciones y diferenciaciones

Para comprender mejor las diferencias entre estas tres cónicas, es necesario estudiar sus definiciones más detalladamente y cómo se diferencian geoméricamente:

- **Elipse:**

Una **elipse** es una curva cerrada en la que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante para cualquier punto en la elipse. Esta propiedad la convierte en una figura crucial en la astronomía, ya que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses. La elipse tiene dos ejes: el **eje mayor** (el más largo) y el **eje menor** (el más corto). La forma elíptica también se observa en dispositivos como **lentes elípticas** utilizadas en óptica.

- **Parábola:**

La **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de un foco y de una línea recta llamada **directriz**. Es una

curva abierta, lo que significa que no tiene un borde cerrado. La ecuación más común que representa una parábola es $y^2 = 4px$. Las parábolas tienen aplicaciones importantes en ingeniería, por ejemplo, en el diseño de **antenas parabólicas**, que son capaces de enfocar las señales hacia un punto específico (el foco) para una mayor eficacia en la transmisión y recepción de señales.

- **Hipérbola:**

La **hipérbola** es el lugar geométrico de todos los puntos cuyo **valor absoluto** de la diferencia de las distancias a dos focos fijos es constante. La hipérbola tiene dos ramas que se abren en direcciones opuestas, y está definida por sus **asíntotas**, que son las líneas a las que las ramas de la hipérbola se acercan, pero nunca tocan. La ecuación estándar de una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Las aplicaciones de la hipérbola incluyen la **navegación**, donde se usan técnicas basadas en esta figura geométrica para la triangulación, y en **óptica**, en sistemas de **lentes hiperbólicas**.

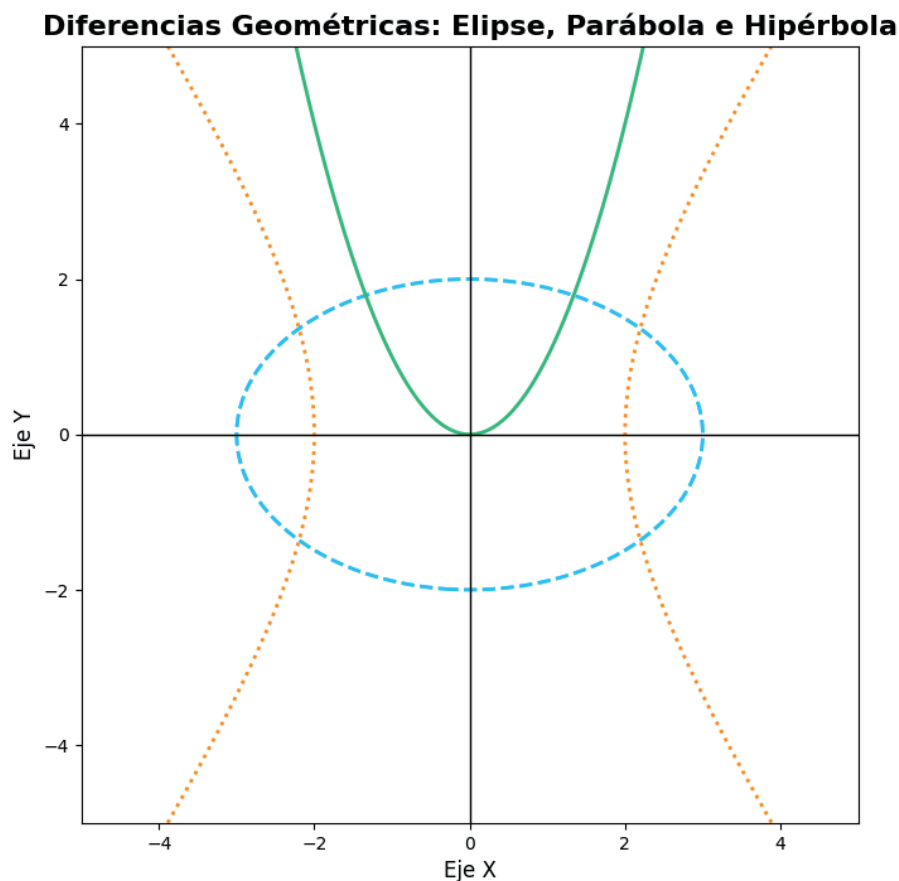


Gráfico 4: Diferencias geométricas entre una elipse, parábola e hipérbola.

Creación propia.

12.3. Aplicaciones iniciales

Las cónicas tienen una serie de aplicaciones en diversos campos, desde la astronomía hasta la ingeniería. En particular, la elipse, la parábola y la hipérbola son fundamentales en el estudio de trayectorias y en el diseño de dispositivos ópticos y arquitectónicos.

- **Astronomía:** La ley de Kepler, que describe cómo los planetas se mueven alrededor del Sol, establece que las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en uno de los focos. Esta relación se deriva directamente de las propiedades geométricas de la elipse, y ha sido clave para el desarrollo de la teoría heliocéntrica del sistema solar.
- **Óptica:** Como mencionamos, los espejos parabólicos y las lentes elípticas tienen propiedades ópticas muy útiles. Por ejemplo, los **telescopios** utilizan espejos parabólicos para enfocar la luz de los astros en un único punto, lo que permite obtener imágenes más nítidas y de mayor resolución. Los **espejos hiperbólicos** se utilizan para dispersar la luz de manera controlada en sistemas ópticos.
- **Arquitectura e ingeniería:** Las formas de las cónicas también son de gran importancia en la arquitectura. Los **puentes parabólicos** y las **cúpulas elípticas** son ejemplos de cómo se aprovechan las propiedades estructurales de las cónicas. Las curvas parabólicas en los **puentes** ayudan a distribuir el peso de manera más eficiente, lo que permite diseños más resistentes. Las **cúpulas elípticas** se utilizan en grandes espacios como iglesias y estadios debido a su capacidad para resistir cargas distribuidas.

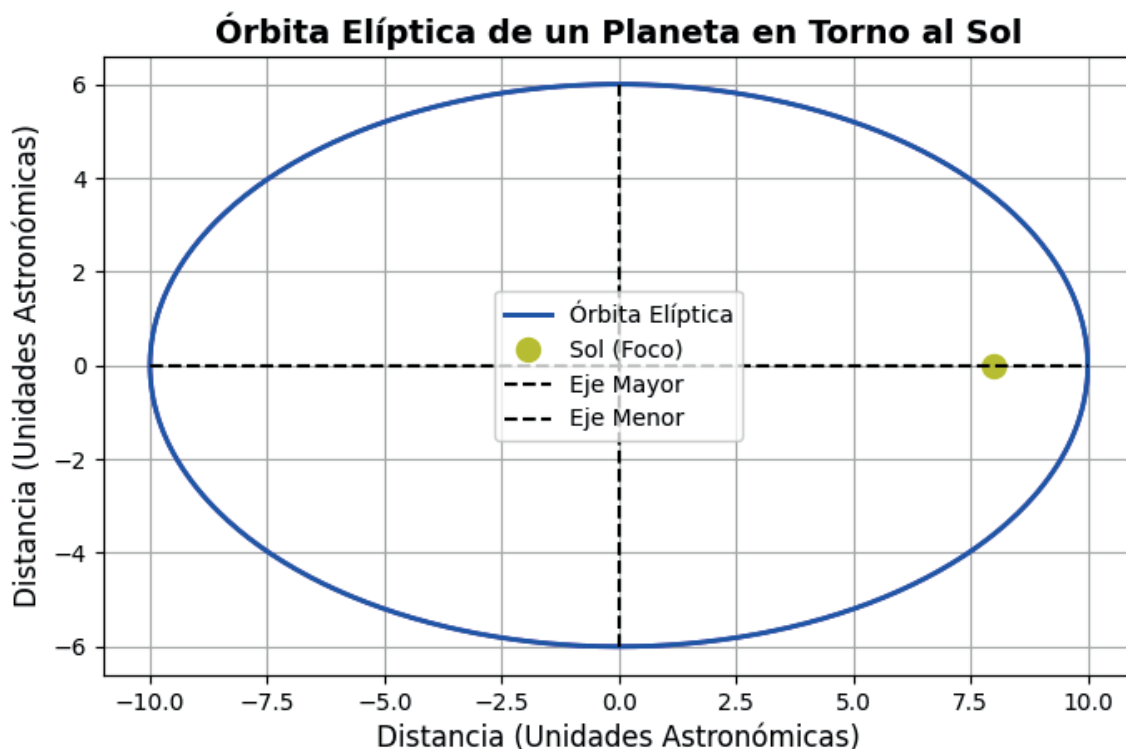


Gráfico 5: Órbita elíptica de un planeta en torno al sol.

Creación propia.

12.4. Uso en óptica

La óptica es el estudio de la luz y sus interacciones con los materiales. Las cónicas juegan un papel fundamental en la **óptica geométrica** debido a sus propiedades de reflexión y refracción.

- **Espejos parabólicos:** Un espejo parabólico es una superficie reflectante cuya forma sigue una parábola. Esta configuración permite que los rayos paralelos que inciden sobre él se reflejen y converjan en un solo punto, conocido como el foco. Esta propiedad se utiliza en **antenas parabólicas** para concentrar señales y también en **telescopios astronómicos** para obtener imágenes de cuerpos celestes con mayor precisión.
- **Lentes elípticas:** Las lentes elípticas tienen la capacidad de focalizar los rayos de luz en un único punto, lo que resulta útil en dispositivos ópticos como cámaras fotográficas, **microscopios** y **lentes de contacto**. Los **lentes elípticos**

también se utilizan para mejorar la calidad de las imágenes y enfocar la luz en la retina, ayudando a las personas a ver más claramente.

- **Lentes hiperbólicas:** En algunos sistemas ópticos avanzados, como en ciertos tipos de **lentes dispersoras**, se utilizan curvas hiperbólicas. Estas lentes pueden dispersar los rayos de luz, lo que es útil en situaciones donde se necesita que la luz se distribuya en un área más amplia, como en **pantallas LED** o **dispositivos de proyección**.

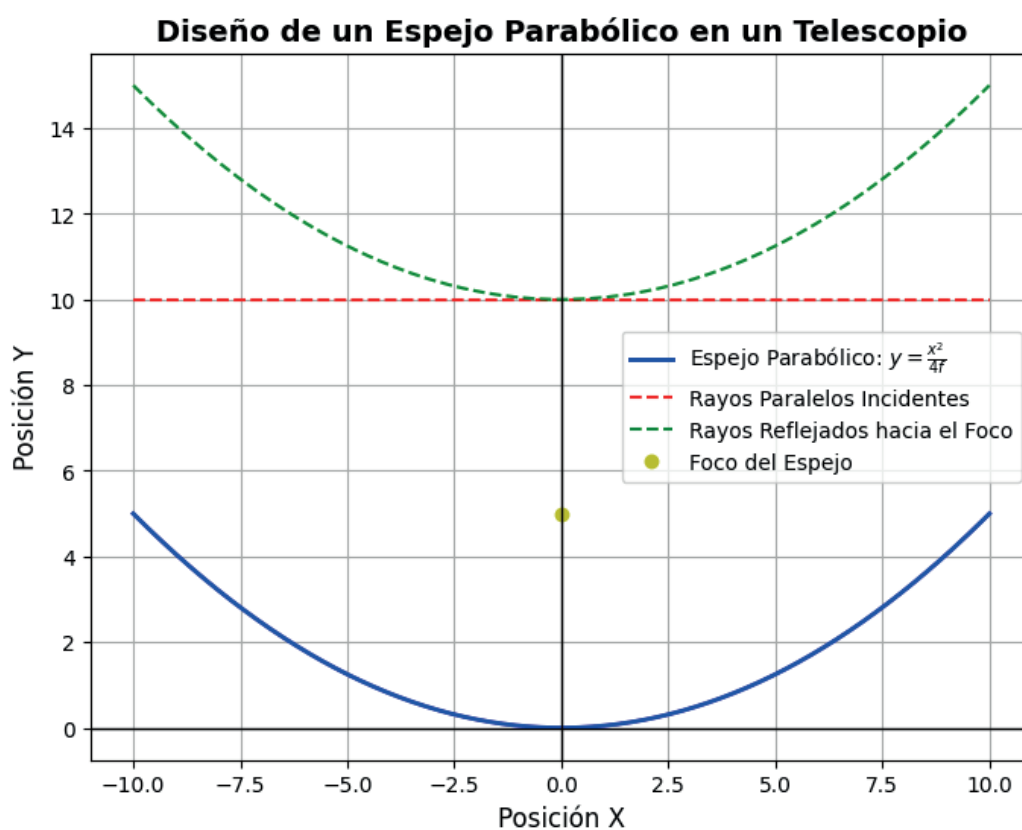


Gráfico 6: Diseño de un espejo parabólico en un telescopio.

Creación propia.

12.5. Uso en diseño de estructuras

El uso de las cónicas en el diseño de **estructuras** arquitectónicas y de ingeniería se extiende a la creación de formas que pueden soportar cargas de manera eficiente. Las

curvas parabólicas y elípticas son comúnmente utilizadas en estructuras que deben ser capaces de distribuir fuerzas de manera óptima.

- **Puentes parabólicos:** Un ejemplo clásico de la aplicación de la parábola en la ingeniería es el diseño de **puentes parabólicos**, donde la forma parabólica se utiliza para distribuir las fuerzas de compresión de manera más eficiente. Este tipo de diseño no solo es funcional, sino también estéticamente atractivo.
- **Cúpulas elípticas:** Las **cúpulas elípticas** son ampliamente utilizadas en la construcción de **iglesias** y otros edificios grandes. La forma elíptica de la cúpula permite que las fuerzas se distribuyan a lo largo de toda la estructura, evitando la acumulación de tensiones en puntos específicos.

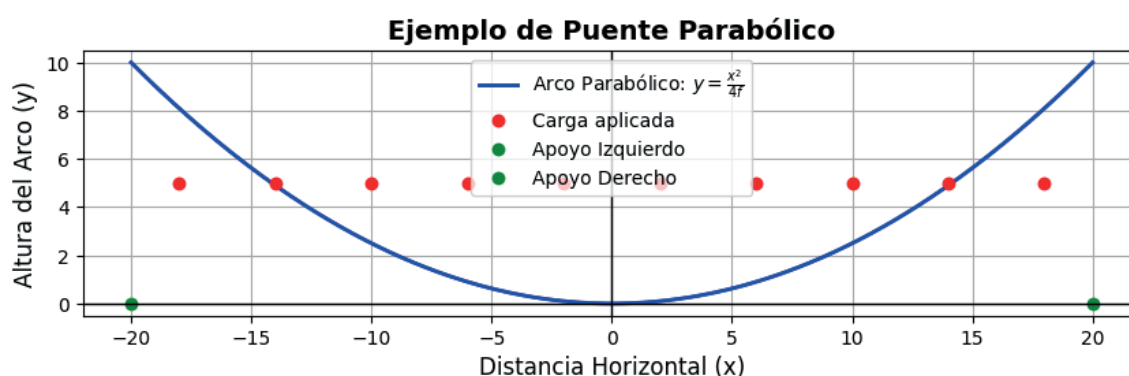


Gráfico 7: Ejemplo de puente parabólico.

Creación propia.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Video sobre el Uso de las Cónicas en Óptica: En este video se muestra cómo las cónicas, especialmente la elipse y la parábola, juegan un papel clave en la óptica, explicando el fenómeno de reflexión y focalización de la luz que ocurre en superficies cónicas.

- **Enlace:** [Ver Video sobre Óptica y Cónicas](#)

Enlace 2:

Artículo sobre el Diseño de Estructuras con Cónicas: Este artículo explora cómo las cónicas, en especial la elipse y la hipérbola, se aplican en el diseño de estructuras arquitectónicas, como puentes y edificios, donde su resistencia y propiedades de distribución de carga son clave.

- **Enlace:** [Leer Artículo sobre Diseño de Estructuras con Cónicas](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Cónica: Curva generada por la intersección de un cono de revolución con un plano.

Foco: Puntos fijos importantes para la definición de las cónicas, especialmente en las elipses y las hipérbolas.

Directriz: Línea fija utilizada en la definición de una parábola.

Referencias

- Stewart, J. (2017). *Cálculo de determinantes y transformaciones lineales* (7ª ed.). Cengage Learning.
 - Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
 - Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10ª ed.). Wiley.
 - Cheng, D., & Jian, J. (2018). *Structural Analysis and Design with Matrix Methods*. Springer.
-

Recursos de Profundización

Descripción del enlace: Este simulador en **GeoGebra** te permite explorar la **recta en el plano cartesiano**, observando cómo se calculan pendientes, intersecciones y cómo la ecuación de la recta varía al modificar sus parámetros. Es una herramienta interactiva para entender la relación entre la geometría y el álgebra en el plano.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/am3qknp4>

Descripción del enlace: Esta simulación interactiva de **GeoGebra** permite trabajar con la **distancia entre puntos**, la **pendiente de la recta** y la **ecuación general de la recta**. Ideal para practicar la derivación de ecuaciones y entender el comportamiento geométrico en el plano cartesiano.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/gfjnkxts>

Descripción del enlace: En este simulador de **Wolfram Alpha**, puedes experimentar con la **ecuación de la recta** en 2D y 3D, y analizar el comportamiento de las intersecciones de rectas y planos. El simulador también incluye herramientas para calcular distancias, ángulos y otros conceptos fundamentales de la geometría analítica.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://colab.research.google.com/drive/1LbcJMIkc8bRrCSm9VYm59CFf43qIqhRQ?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

