

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Ecuaciones y Propiedades de las Elipses

Clase 13



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Las **elipses** son curvas geométricas de gran relevancia, definidas como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, denominados **focos**, es constante. Esto significa que, independientemente del punto seleccionado en la curva, la suma de las distancias entre ese punto y los dos focos siempre será la misma. Esta característica confiere a la elipse propiedades geométricas muy particulares, entre las cuales destacan dos ejes de simetría fundamentales: el **eje mayor**, que es el más largo y conecta los puntos más alejados de la curva, y el **eje menor**, que es perpendicular al eje mayor y conecta los puntos más cercanos. La forma de la elipse está determinada por dos parámetros claves: el **semieje mayor** (la mitad del eje mayor) y el **semieje menor** (la mitad del eje menor). Estos valores no solo dictan la "elongación" o "alargamiento" de la elipse, sino que también influyen en la **excentricidad** de la curva, un parámetro que describe cuán "aplanada" o "alargada" es la elipse. Cuanto mayor es la diferencia entre los semiejes, mayor es la excentricidad, lo que hace que la elipse sea más elongada y menos circular. Esta propiedad es esencial para caracterizar distintas formas de elipses, desde las casi circulares hasta aquellas con una gran elongación.

Las aplicaciones de las **elipses** son vastas y esenciales en muchas ramas de la ciencia y la ingeniería. En **astronomía**, por ejemplo, la **ley de Kepler** establece que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas, lo que es crucial para predecir las posiciones futuras de los cuerpos celestes. La forma elíptica de las órbitas se utiliza para calcular las distancias y tiempos de viaje de los planetas, así como para enviar misiones espaciales a otros planetas. En **óptica**, las elipses tienen una propiedad única: cualquier onda reflejada dentro de una elipse se concentrará en uno de sus focos. Esto es aprovechado en el diseño de **reflectores** y **antenas parabólicas**, así como en telescopios y otros dispositivos ópticos. En **ingeniería**, las elipses son utilizadas en el diseño de estructuras, como puentes y edificios, donde las trayectorias elípticas se emplean para distribuir fuerzas de manera eficiente. También en el análisis de **trayectorias de proyectiles**, las elipses juegan un papel crucial, especialmente en la balística, ya que las trayectorias de algunos proyectiles pueden aproximarse a una forma elíptica bajo ciertas condiciones. En **acústica**, la forma elíptica es utilizada para dirigir el sonido hacia un punto específico, aprovechando las propiedades de reflexión para

concentrar las ondas sonoras en un lugar determinado, lo cual es clave en el diseño de auditorios y sistemas de sonido de alta fidelidad. La versatilidad de las elipses en diversas disciplinas hace que su estudio no solo sea fascinante desde un punto de vista matemático, sino también esencial para resolver problemas prácticos y comprender fenómenos naturales y tecnológicos en una amplia gama de campos.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
-

Reto # (3)

Clase 13: Ecuaciones y Propiedades de las Elipses

La **elipse** es una figura geométrica que tiene numerosas aplicaciones tanto en matemáticas puras como en ingeniería, física, arquitectura y astronomía. Es fundamental en el estudio de las cónicas y presenta características geométricas clave que la hacen única entre otras figuras cónicas como la parábola y la hipérbola. Este tema abordará desde sus ecuaciones básicas hasta sus propiedades geométricas más importantes, incluyendo el cálculo de elementos clave como focos, vértices y excentricidad, así como aplicaciones en diversas áreas.

En términos de su ecuación estándar, la elipse tiene una representación algebraica simple cuando está centrada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Esta ecuación define su relación con los ejes coordenados y permite determinar diversos parámetros fundamentales como los **ejes mayor y menor**, que determinan el tamaño y la forma de la elipse. El **eje mayor** es el segmento de línea más largo que pasa por el centro de la elipse, mientras que el **eje menor** es perpendicular al eje mayor y tiene una

longitud más corta. La relación entre estos ejes es crucial para definir el **radio** de la elipse y sus dimensiones.

Un concepto importante al tratar con elipses es la **excentricidad**, que describe cuán "estirada" está la elipse. La excentricidad se define como la razón entre la distancia de los focos al centro y la longitud del eje mayor. Cuando la excentricidad es cero, la figura es un **círculo**, y a medida que la excentricidad aumenta, la elipse se alarga. La excentricidad, por lo tanto, permite clasificar las elipses en función de su forma, y se utiliza ampliamente en astronomía para describir las órbitas de los planetas alrededor del sol, que son elípticas.

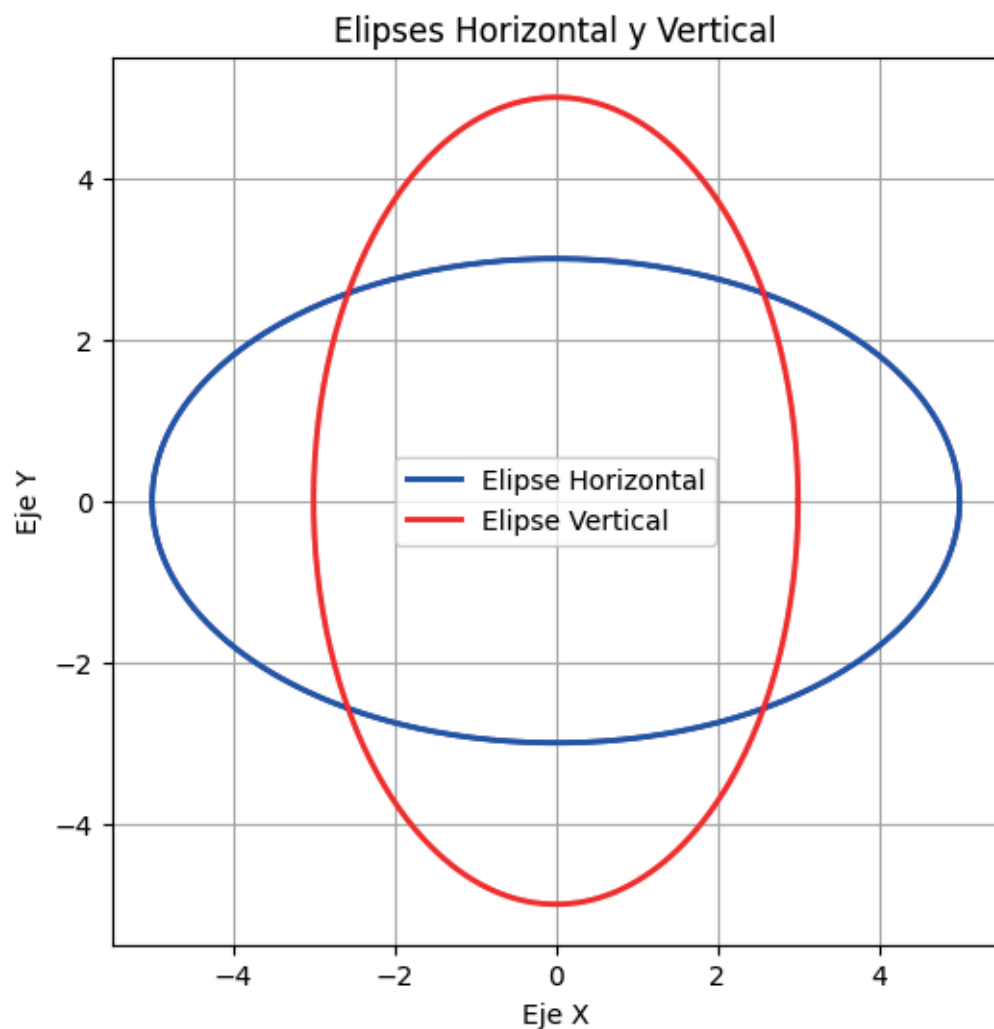


Gráfico 1: Representación de la de una elipse

Creación propia

En términos prácticos, la **elipse** tiene aplicaciones muy variadas en diferentes áreas. En **astronomía**, por ejemplo, la ley de Kepler establece que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses con el sol ubicado en uno de los focos. Esto no solo es una observación fundamental para la comprensión del sistema solar, sino que también influye en la predicción de las posiciones de los cuerpos celestes y el cálculo de sus trayectorias. De manera similar, las órbitas de cometas y satélites pueden ser modeladas utilizando la geometría de la elipse.

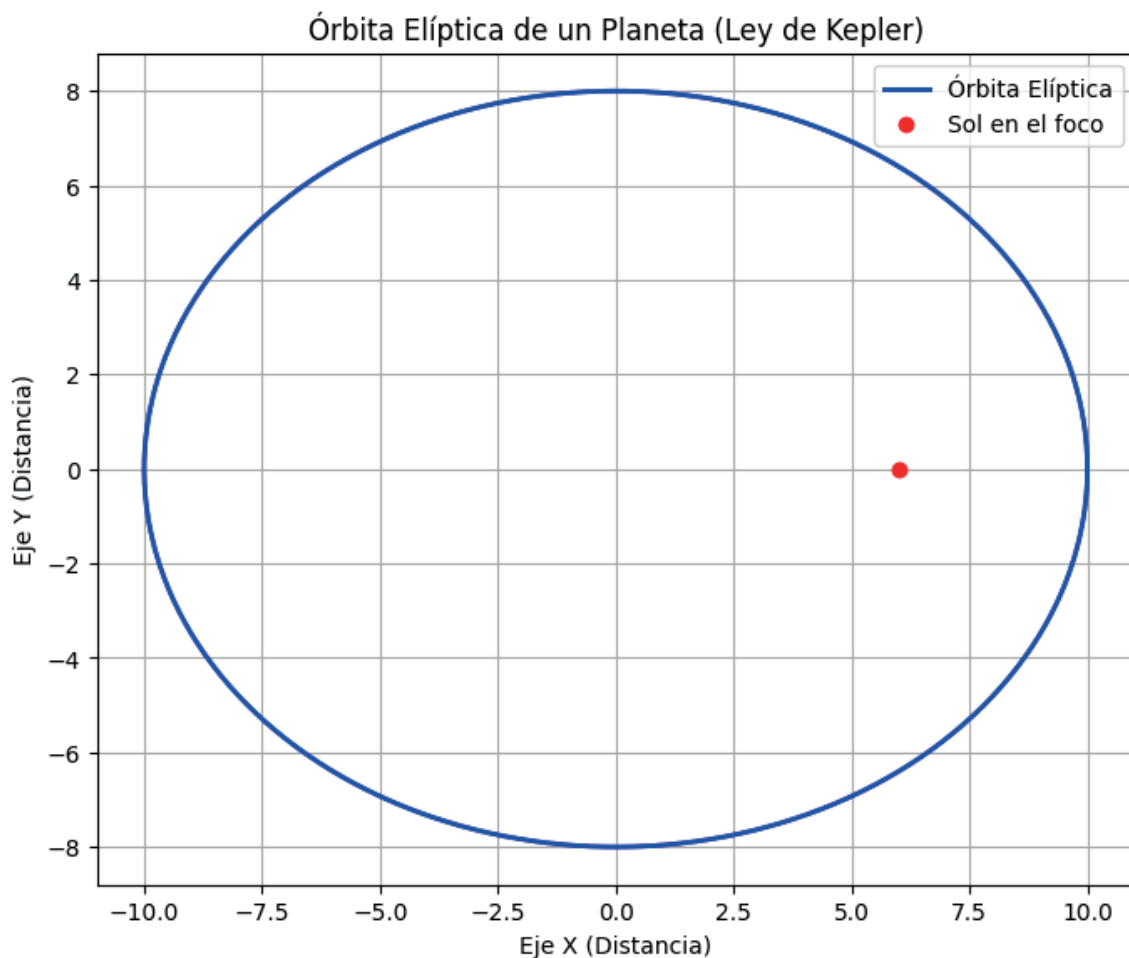


Gráfico 2: Órbita elíptica de un planeta.

Creación propia

En **ingeniería**, la elipse tiene una amplia gama de aplicaciones. Un caso clásico es su uso en el diseño de **antenas parabólicas** y otros dispositivos de **comunicación**. El principio de reflexión de la elipse, en el que los rayos de luz o señales que inciden en uno de los focos se reflejan hacia el otro foco, es crucial para el diseño eficiente de estos sistemas. Las propiedades geométricas de la elipse también se emplean en el diseño de estructuras de **puentes** y otras infraestructuras, ya que las elipses pueden proporcionar una distribución eficiente de fuerzas.

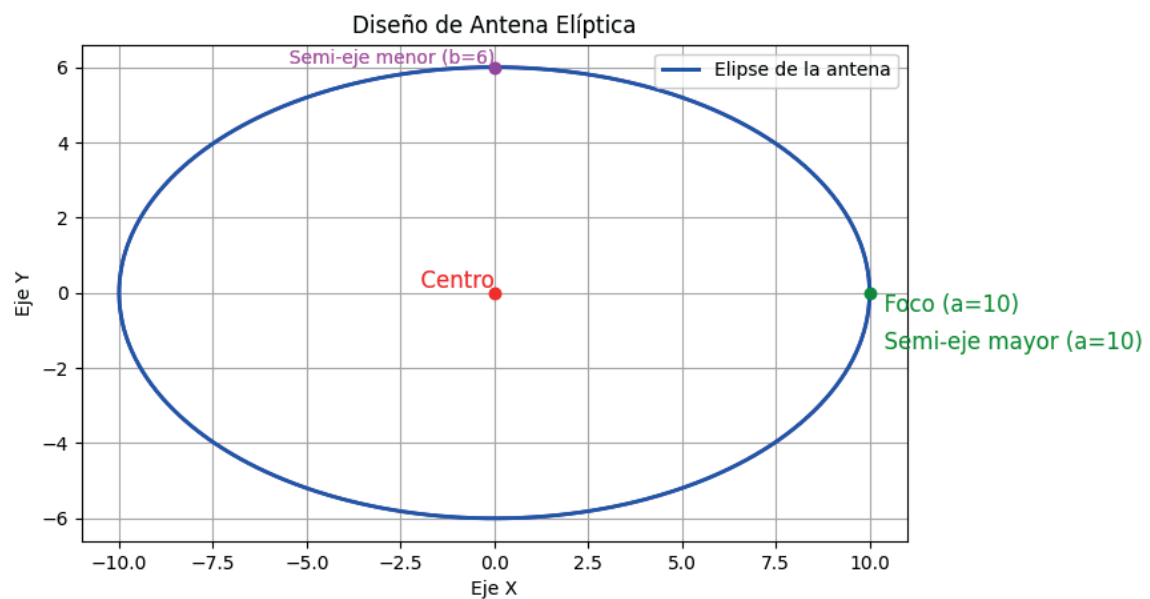


Gráfico 3: Antena elíptica.

Creación propia

En **óptica**, las lentes elípticas se utilizan para focalizar luz o reflejarla de manera más precisa en una amplia variedad de dispositivos, desde microscopios hasta telescopios. La propiedad de la elipse de concentrar la luz en un punto específico hace que sea una forma ideal para estos sistemas, maximizando la eficiencia de la captura de luz.

En **arquitectura**, el uso de elipses se extiende al diseño de **estructuras de soporte** y elementos decorativos. Desde la construcción de **teatros** y **salas de conciertos**, donde la elipse mejora la acústica al reflejar el sonido de manera más eficaz, hasta el diseño de **domos** y otras formas arquitectónicas, la elipse ofrece ventajas tanto estéticas como

funcionales. La capacidad de la elipse de distribuir fuerzas de manera equilibrada también la hace útil en el diseño de estructuras que requieren estabilidad y resistencia.

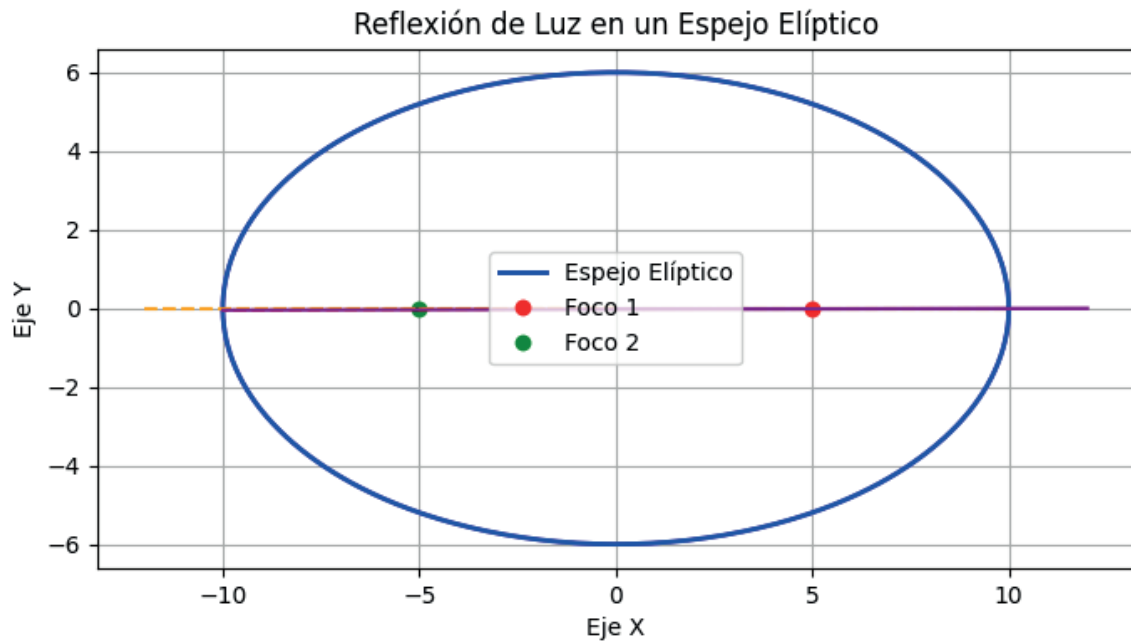


Gráfico 4: Aplicación en Óptica.

Creación propia

Además de su presencia en aplicaciones tangibles, la elipse también juega un papel en la **teoría de la relatividad** de Einstein. En la relatividad general, los movimientos de los cuerpos bajo la influencia de la gravedad pueden ser descritos como trayectorias elípticas, con el sol ubicado en uno de los focos de la órbita de los planetas. Este concepto es fundamental para entender los efectos gravitacionales en objetos a gran escala, como en la **astronomía** y el **estudio de agujeros negros**.

En la **geometría computacional**, las elipses también tienen aplicaciones significativas en el modelado y simulación de trayectorias, estructuras y superficies. La representación de formas elípticas en simulaciones por computadora es común en el diseño asistido por computadora (CAD) y en la ingeniería de simulación de **campos electromagnéticos**, donde las elipses pueden ser usadas para describir campos de radiación o materiales con propiedades anisotrópicas.

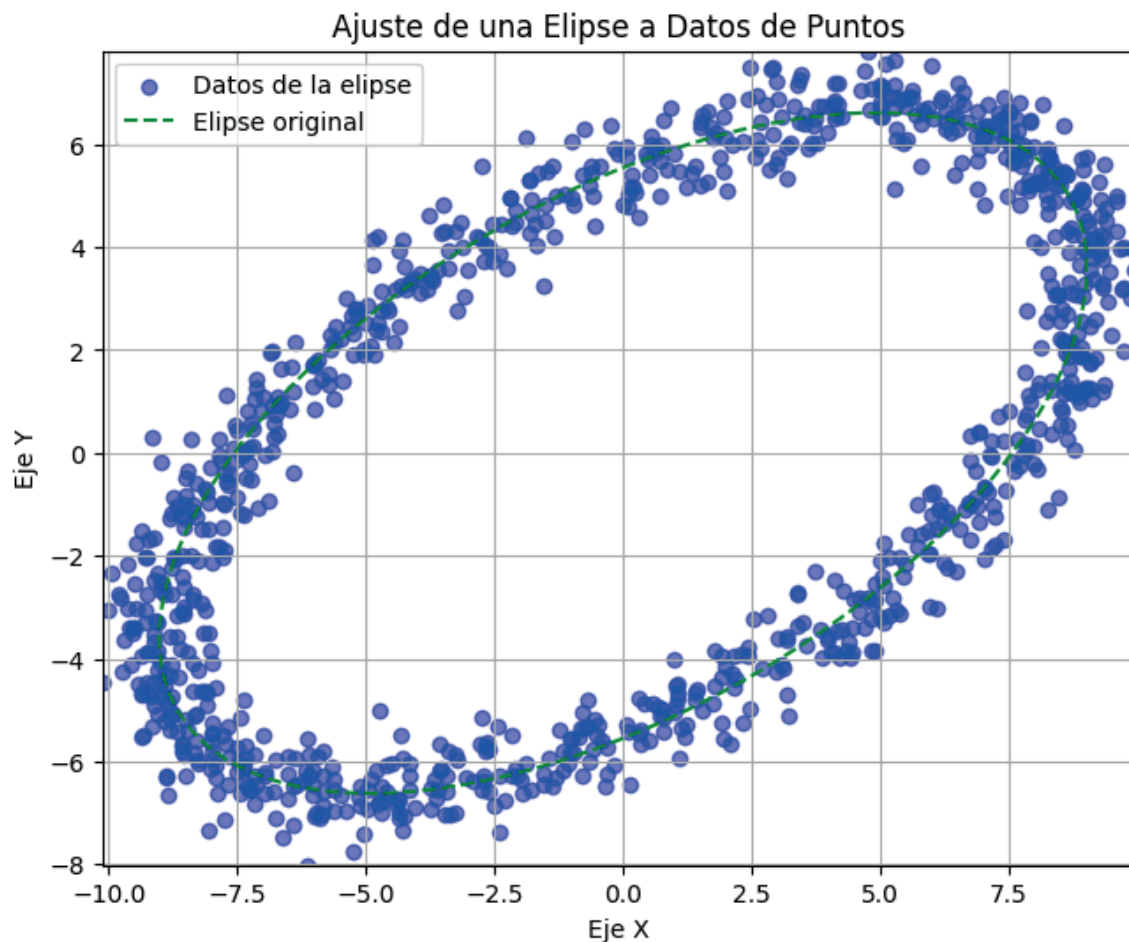


Gráfico 5: Aplicación en Computación Grafica.

Creación propia

En conclusión, la **elipse** no solo es una figura geométrica de interés teórico en matemáticas, sino que también es un componente clave en una variedad de aplicaciones prácticas en múltiples disciplinas. Desde la descripción de las órbitas planetarias en astronomía hasta el diseño de sistemas ópticos y arquitectónicos, la elipse sigue siendo una herramienta matemática poderosa con implicaciones en el mundo real. Su versatilidad y su estrecha relación con otros conceptos fundamentales de la geometría, como la parábola y la hipérbola, la convierten en una figura central en el estudio de las cónicas y su aplicación en problemas tanto abstractos como concretos.

13.1. Ecuación canónica y general

Las ecuaciones que definen a las elipses son de particular importancia, ya que determinan su forma, orientación y ubicación en el plano cartesiano. La **ecuación canónica** es la forma estándar utilizada cuando la elipse está centrada en el origen de coordenadas, con sus ejes alineados con los ejes coordenados.

Ecuación canónica:

La ecuación más simple de la elipse se obtiene cuando la elipse está centrada en el origen y sus ejes están alineados con los ejes x y y del plano cartesiano. La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aquí, a representa el semi-eje mayor y b el semi-eje menor. Si $a > b$, la elipse será más alargada en la dirección del eje x ; si $b > a$, la elipse será más alargada en la dirección del eje y . Es importante destacar que si $a = b$, la elipse se convierte en un **círculo**.

La **excentricidad** de la elipse se calcula a partir de los semi-ejes y se expresa con la fórmula:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Si la excentricidad e es cercana a 0, la elipse es casi circular. Por el contrario, si e se acerca a 1, la elipse se vuelve más alargada.

Ecuación general:

La **ecuación general** de una elipse puede ser mucho más compleja, especialmente si la elipse no está centrada en el origen o si sus ejes no están alineados con los ejes coordenados. La forma general de la ecuación de la elipse es:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Donde **A**, **B**, **C**, **D** y **E** son constantes que modifican la posición y orientación de la elipse. En este caso, se puede transformar la ecuación general en la forma canónica a través de rotaciones y traslaciones.

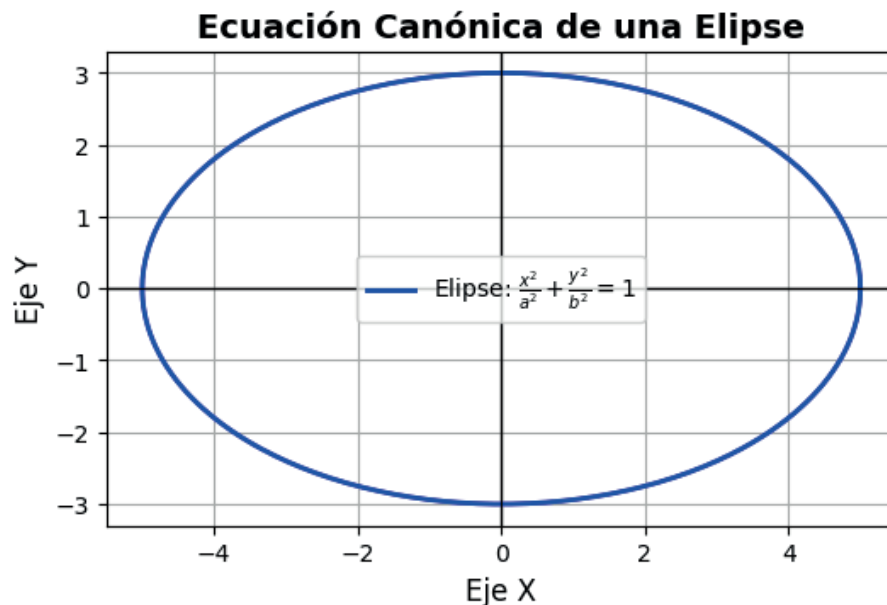


Gráfico 6: Representación de la ecuación canónica de una elipse

Creación propia

13.2. Propiedades geométricas

Las elipses tienen varias propiedades geométricas notables que las distinguen de otras figuras cónicas. Estas propiedades son clave tanto para el estudio teórico como para las aplicaciones prácticas en ingeniería y ciencias físicas.

1. **Simetría:** Las elipses son figuras simétricas tanto respecto al eje mayor como respecto al eje menor. Esto significa que la figura se refleja sobre estos ejes de manera idéntica.
2. **Focos:** Los **focos** son puntos fijos situados a lo largo del eje mayor de la elipse. La propiedad más característica de la elipse es que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los dos focos es constante. Esta propiedad es clave en muchas aplicaciones, como la órbita de los planetas en el sistema solar.

3. **Ejes:** Los dos ejes más importantes de la elipse son el **eje mayor** y el **eje menor**. El **eje mayor** conecta los dos vértices más alejados del centro de la elipse, mientras que el **eje menor** conecta los dos puntos más cercanos a través del centro.
4. **Centro:** El **centro** de la elipse es el punto de intersección de los dos ejes. En una elipse centrada en el origen, este punto será el origen (0,0).
5. **Excentricidad:** La **excentricidad** es una medida de la "forma" de la elipse. Cuanto mayor es la excentricidad, más alargada es la elipse. Se define como la distancia focal c dividida por el semi-eje mayor a :

$$e = \frac{c}{a}$$

Donde c es la distancia desde el centro hasta un foco. Cuando $e \rightarrow 0$, la elipse se aproxima a un círculo.

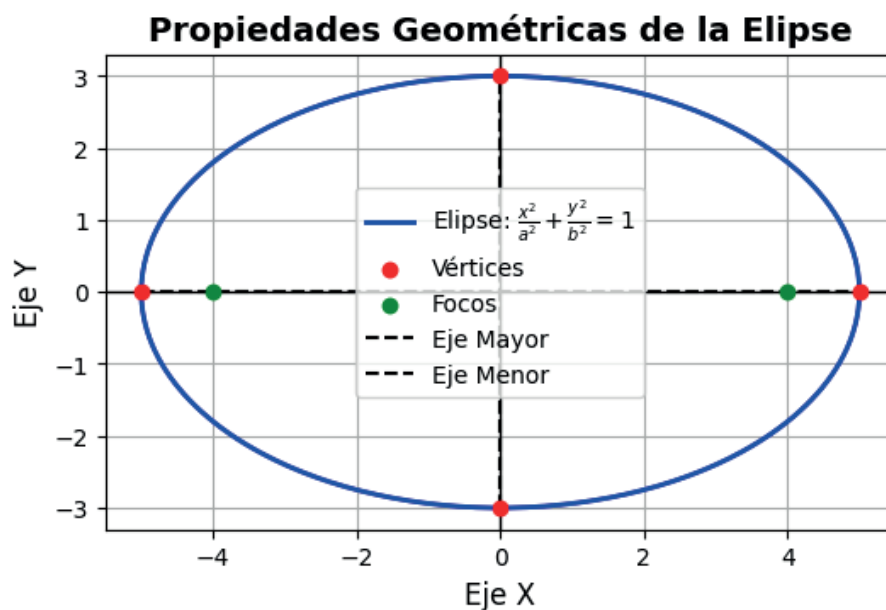


Gráfico 7: Propiedades geométricas de la elipse (focos, vértices, ejes)

Creación propia

13.3. Focos, vértices, centro y excentricidad

En esta sección, profundizamos en la definición y la ubicación de algunos de los elementos clave de la elipse: los focos, los vértices, el centro y la excentricidad.

- **Focos:** Los focos son dos puntos fijos en la elipse, ubicados a lo largo del eje mayor. La distancia desde el centro hasta cada foco es dada por la relación:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Los focos se encuentran en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, si la elipse está centrada en el origen.

- **Vértices:** Los vértices son los puntos más alejados del centro a lo largo del eje mayor. En una elipse centrada en el origen, los vértices están ubicados en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, donde a es el semi-eje mayor.
- **Centro:** El centro es el punto de intersección de los ejes mayor y menor. En una elipse centrada en el origen, este punto es el origen de coordenadas $(0,0)$.
- **Excentricidad:** La excentricidad de la elipse mide cuánto se aleja de la forma circular. La excentricidad se calcula utilizando la fórmula mencionada anteriormente. Cuanto más alta es la excentricidad, más estirada es la elipse.

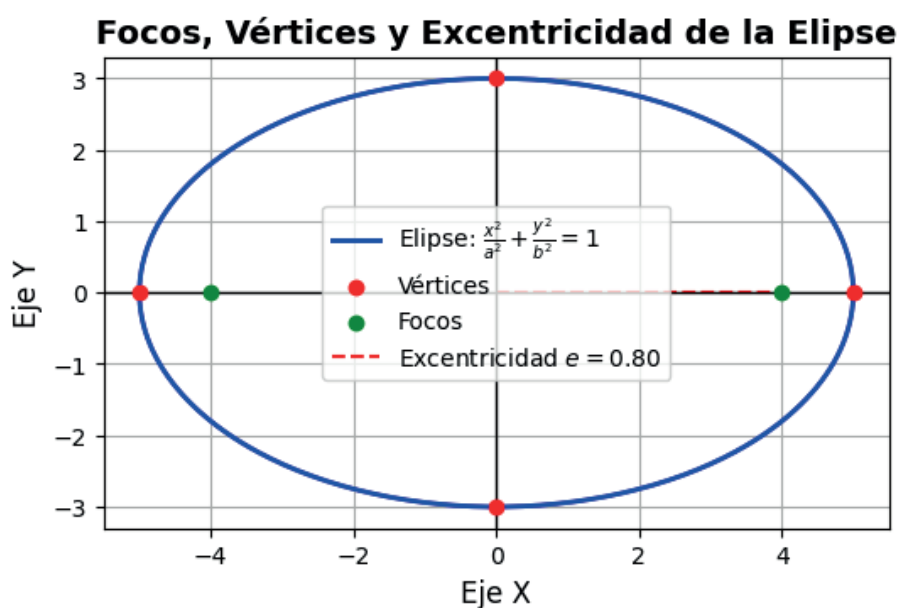


Gráfico 8: Focos, vértices y excentricidad de la elipse

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Para profundizar en la **ecuación canónica y general** de las elipses, se presenta un video que explica cómo derivar la ecuación de la elipse a partir de su forma general y cómo simplificarla a su forma canónica. Este material es útil para estudiantes que busquen comprender las transformaciones algebraicas y geométricas involucradas en las elipses.

- Enlace: [Video sobre Ecuaciones de Elipses](#)

Enlace 2:

Este artículo explora las **propiedades geométricas** de las elipses, con un enfoque especial en sus **focos, vértices, centro y excentricidad**. Además, se discute cómo estas propiedades afectan aplicaciones prácticas, especialmente en el diseño de ópticas y sistemas de comunicación. Un recurso ideal para quienes desean comprender la influencia de las elipses en contextos ingenieriles.

- Enlace: [Artículo sobre Propiedades Geométricas de las Elipses](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Foco: Puntos fijos a lo largo del eje mayor de la elipse, cuya propiedad característica es que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta los focos es constante.

Vértice: Puntos más alejados del centro en la dirección del eje mayor de la elipse.

Excentricidad: Medida de la elongación de la elipse. Se calcula como $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, donde a es el semi-eje mayor y b es el semi-eje menor.

Referencias

- Stewart, J. (2017). *Cálculo de determinantes y transformaciones lineales* (7ª ed.). Cengage Learning.
- Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10ª ed.). Wiley.
- Cheng, D., & Jian, J. (2018). *Structural Analysis and Design with Matrix Methods*. Springer.

Recursos de Profundización

Tabla: Ecuaciones de cónicas

Cónica	Ecuación	Características Principales
Círculo	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	– Centro en (h, k). – Todos los puntos a distancia r del centro. – Excentricidad $e = 0$. – Diámetro de $2r$. – Los radios son perpendiculares entre sí.

Elipse	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	– Centro en (h, k). – Ejes mayor a y menor b. – Focos a distancia c del centro: $c^2 = a^2 - b^2$. – Excentricidad $e = \frac{c}{a}$, donde $e < 1$. – Los puntos sobre la elipse cumplen la propiedad de que la suma de las distancias a los dos focos es constante.
Hipérbola	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	– Centro en (h, k). – Eje transversal de longitud $2a$ (conecta los vértices). – Eje conjugado de longitud $2b$. – Focos a distancia c del centro: $c^2 = a^2 + b^2$. – Excentricidad $e = \frac{c}{a}$, donde $e > 1$. – Asintóticas que son rectas que aproximan la hipérbola.
Parábola	$y = ax^2 + bx + c$	– Tiene un solo foco y una directriz. – El vértice es el punto más cercano a la directriz. – Excentricidad $e = 1$. – La distancia desde cualquier punto de la parábola a su foco es igual a la distancia a su directriz. – La parábola tiene una simetría axial con respecto a su eje de simetría.

Tabla 1: Ecuaciones de cónicas
Carlos Julio Mayorga. (2025).



Descripción del enlace: Con esta herramienta de **Desmos**, podrás visualizar diferentes **cónicas** como círculos, elipses, hipérbolas y parábolas. Puedes modificar los coeficientes de la ecuación general de las cónicas y ver cómo cambian las gráficas en tiempo real. Ideal para entender la geometría analítica de estas figuras.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.desmos.com/calculator/q01dlalinm?lang=es>



La excelencia no se improvisa

síguenos

