

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Ecuaciones y Propiedades de las Elipses

Clase 14



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Las **elipses** son curvas geométricas que se definen como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos fijos, denominados **focos**, es constante. Esta propiedad, conocida como la propiedad focal, es la base para entender su forma y comportamiento. Las elipses tienen dos ejes de simetría: el **eje mayor**, que es el más largo, y el **eje menor**, que es más corto y perpendicular al eje mayor. El centro de la elipse se encuentra en la intersección de estos dos ejes. A medida que los valores de estos ejes cambian, la forma de la elipse varía: si el semieje mayor es mucho más largo que el semieje menor, la elipse se vuelve más alargada; en el caso contrario, si ambos semiejes son iguales, la elipse se convierte en un círculo. Las elipses son una de las cónicas más importantes en geometría, y su ecuación general en coordenadas cartesianas permite representar su forma de manera precisa, reflejando la relación entre el eje mayor, el eje menor y los focos.

Las **propiedades geométricas** de las elipses tienen aplicaciones fundamentales en una variedad de campos científicos y tecnológicos. En **astronomía**, las órbitas de los planetas y otros cuerpos celestes, como los satélites artificiales, siguen trayectorias elípticas debido a la influencia gravitacional del sol y otros cuerpos. Este comportamiento se describe en las leyes de Kepler, que establecen que la órbita de un planeta es elíptica, con el sol en uno de los focos. En el campo de la **óptica**, las elipses se utilizan en el diseño de reflectores y lentes, ya que poseen la propiedad de que los rayos reflejados desde cualquier punto de la elipse se concentran en un único foco. Este principio es crucial en la fabricación de antenas parabólicas, telescopios y otros dispositivos ópticos. Además, las elipses tienen aplicaciones en **ingeniería**, especialmente en el diseño de trayectorias de proyectiles o en la construcción de infraestructuras que requieren un análisis detallado de las tensiones y fuerzas distribuidas, como puentes o caminos curvos. En **acústica**, también se aprovecha la forma elíptica para concentrar el sonido en un punto específico, lo que es utilizado en dispositivos como cámaras acústicas y sistemas de megafonía.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Álgebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

Reto # (3)

14. Tema: Ecuaciones y Propiedades de las Elipses

Las **elipses** son una de las secciones cónicas más importantes en matemáticas, con aplicaciones en astronomía, física, ingeniería y otras disciplinas. La elipse tiene una rica geometría y una serie de propiedades que la distinguen de otras cónicas, como la parábola y la hipérbola. Este tema abarca los fundamentos de las elipses, incluyendo sus ecuaciones estándar, propiedades geométricas y elementos clave como los focos, los vértices y las directrices.

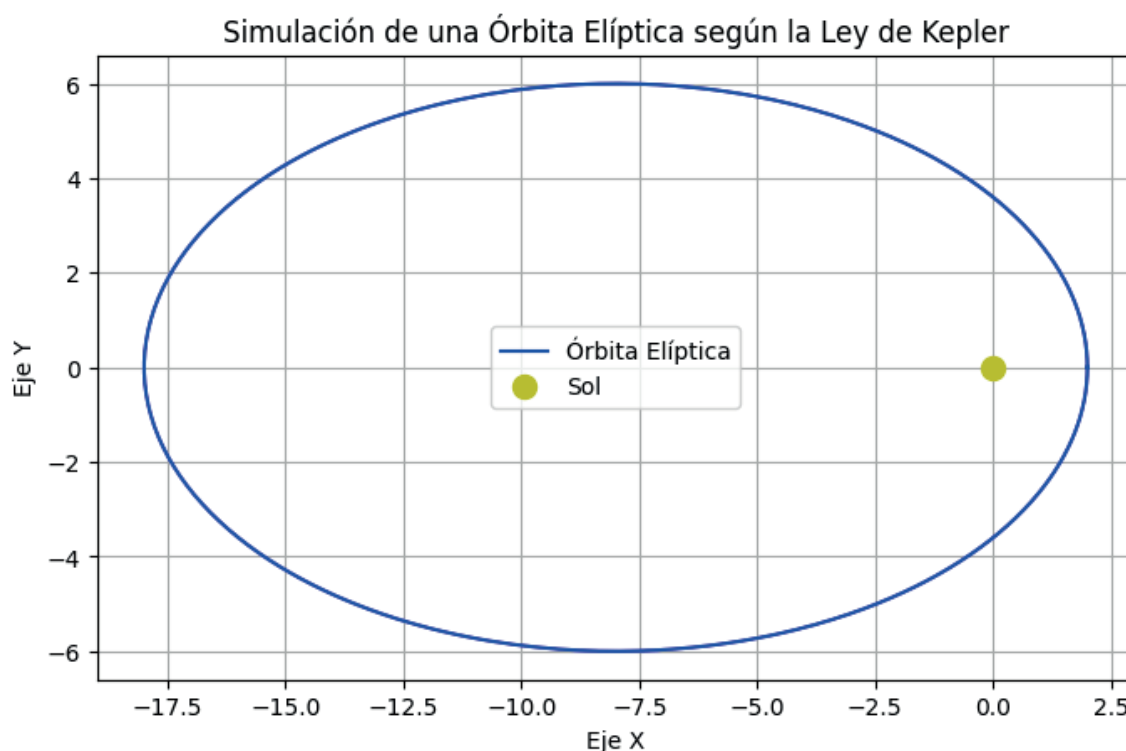


Gráfico 1: Aplicación Física de Elipse

Creación propia

Las elipses son una de las figuras geométricas más fundamentales dentro de la familia de las cónicas. Se originan a partir de la intersección de un cono de revolución con un plano. Dependiendo del ángulo de corte, pueden formarse otras figuras cónicas como la parábola o la hipérbola, pero lo que distingue a la elipse es su capacidad para describir sistemas naturales y geométricos con propiedades muy especiales. A lo largo de este tema, se exploran las ecuaciones que definen a la elipse, sus propiedades geométricas más significativas y su relación con los focos, los vértices y las directrices, entre otros elementos.

Una de las formas más comunes de representar una elipse es mediante su ecuación estándar en un sistema de coordenadas cartesianas. Si la elipse está centrada en el origen y sus ejes están alineados con los ejes coordenados, se define por una ecuación que relaciona sus ejes mayor y menor. En este caso, el eje mayor es la línea que pasa por los puntos más distantes de la elipse y el eje menor es perpendicular a este. Estos ejes determinan el tamaño y la forma de la elipse, y sus longitudes son claves para caracterizarla.

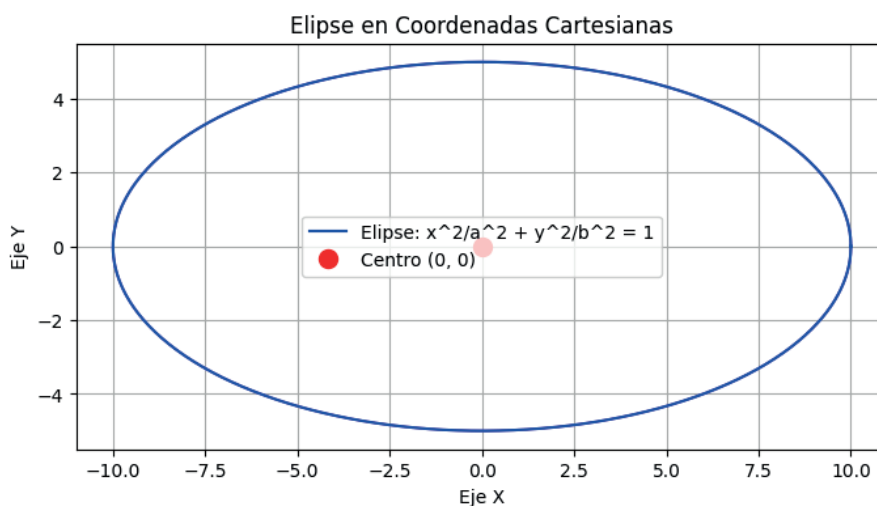


Gráfico 2: Elipse en Coordenadas Cartesianas.

Creación propia

Cuando la elipse no está centrada en el origen o sus ejes no están alineados con los ejes coordenados, la ecuación se ajusta para reflejar estas modificaciones. Si el centro de la elipse está en un punto determinado, la ecuación cambiará para incorporar las coordenadas de dicho centro.

La característica más distintiva de la elipse es que está definida por dos puntos fijos llamados **focos**. La propiedad geométrica esencial de la elipse es que, para cualquier punto de la curva, la suma de las distancias a estos dos puntos es constante. Esta propiedad permite entender cómo se distribuyen los puntos de la elipse respecto a los focos y cómo estos influyen en su forma. La distancia entre los focos está relacionada con la **excentricidad** de la elipse. La excentricidad es un valor que indica cuán alargada está la elipse. Cuando los focos están más cerca del centro, la elipse tiene una forma más circular, y cuando están más alejados, la elipse se vuelve más alargada. En el caso de un círculo, la excentricidad es cero, ya que los focos coinciden con el centro.

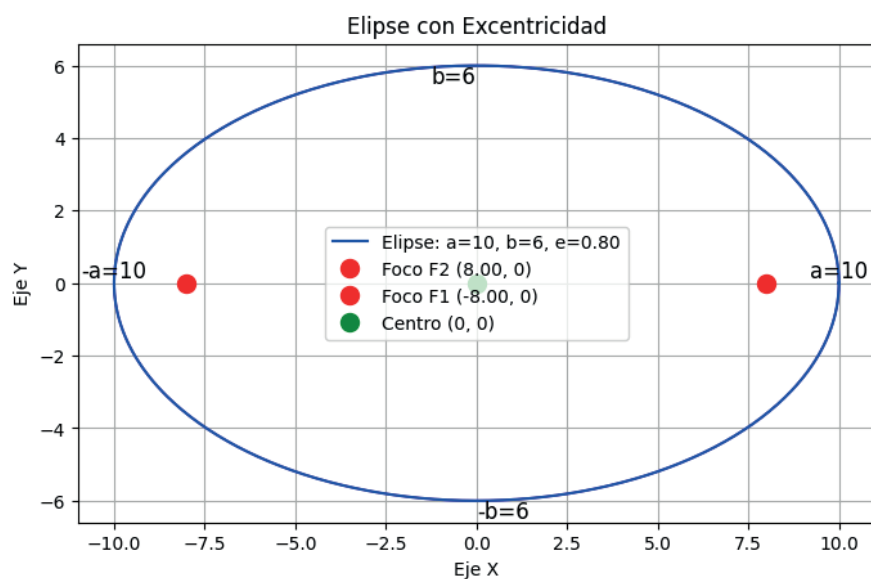


Gráfico 3: Elipse (Excentricidad).

Creación propia

Los **vértices** de la elipse son los puntos en los que la figura alcanza su máxima y mínima distancia desde el centro. El vértice principal se encuentra sobre el eje mayor, mientras que el vértice más cercano se encuentra sobre el eje menor. Estos vértices son cruciales para comprender la orientación y las dimensiones de la elipse, ya que marcan los puntos extremos de la curva.

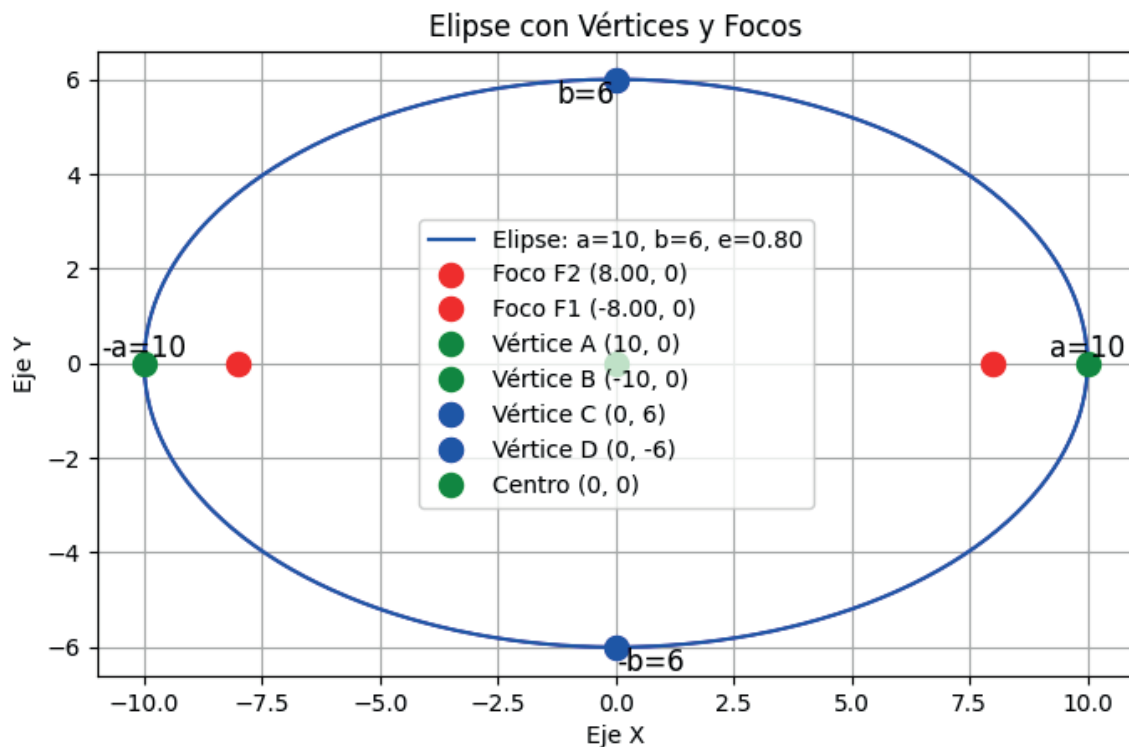


Gráfico 3: Elipse (Vértices).

Creación propia

Otro concepto fundamental en el estudio de la elipse es la **directriz**. Cada elipse tiene dos líneas fijas llamadas directrices, que son cruciales para entender la relación entre los puntos de la elipse, los focos y la excentricidad. La directriz está relacionada con la forma en que se distribuyen los puntos de la elipse, ya que cualquier punto de la elipse mantiene una relación de distancia constante con el foco y la directriz. En términos geométricos, esta propiedad puede ser utilizada en la construcción de ciertas figuras ópticas, como los reflectores elípticos.

En cuanto a sus aplicaciones, las elipses tienen una enorme importancia en diversos campos. En **astronomía**, las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas, de acuerdo con las leyes de Kepler. La elipse es también fundamental en el estudio de las trayectorias de cometas y satélites, lo que permite predecir sus posiciones y movimientos con alta precisión. En **óptica**, los espejos y lentes elípticos se emplean

para enfocar la luz, aprovechando la propiedad geométrica de que los rayos de luz paralelos que inciden en uno de los focos se reflejan en el otro foco, lo que permite crear sistemas ópticos de alta eficiencia.

En el campo de la **ingeniería**, las elipses también juegan un papel esencial en el diseño de estructuras. Por ejemplo, en la construcción de cúpulas y puentes, la forma elíptica permite una distribución más equilibrada de las fuerzas. Además, en el diseño de ciertos dispositivos, como antenas y reflectores, las elipses se utilizan para optimizar la captación y transmisión de señales.

En **arquitectura**, la forma elíptica se emplea no solo por sus propiedades estructurales, sino también por sus cualidades estéticas. El uso de elipses en el diseño de interiores o en la construcción de edificios permite crear espacios armónicos, aprovechando la simetría y la eficiencia estructural que ofrece esta figura geométrica.

En resumen, las elipses son una figura geométrica clave no solo en matemáticas, sino también en ciencias aplicadas, como la **astronomía**, la **óptica**, la **ingeniería** y la **arquitectura**. Su rica estructura matemática, combinada con sus propiedades geométricas únicas, las convierte en una herramienta indispensable para resolver una amplia gama de problemas prácticos en diversas disciplinas.

14.1. Ecuación canónica y general

La **ecuación canónica** de una elipse es la forma más sencilla de representar una elipse, cuando está centrada en el origen de coordenadas. La forma estándar de esta ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En esta ecuación, **a** representa el **semi-eje mayor** y **b** el **semi-eje menor**. La elipse es más ancha a lo largo del eje x si $a > b$ y más alta si $b > a$. Si $a = b$, la elipse se convierte en un círculo.

Para el caso de una elipse desplazada de su centro o con orientación diferente, la **ecuación general** tiene la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Este tipo de ecuación describe elipses que no están necesariamente centradas en el origen o alineadas con los ejes coordenados. Sin embargo, mediante transformaciones geométricas, como traslaciones y rotaciones, esta ecuación puede convertirse en la forma canónica. Es decir, se puede simplificar a la ecuación estándar mencionada anteriormente.

Además, es importante mencionar que la **excentricidad** de la elipse, denotada como e , se calcula a partir de los semi-ejes a y b mediante la siguiente fórmula:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Si e es cercano a 0, la elipse se aproxima a un círculo. Si e se acerca a 1, la elipse será muy alargada.

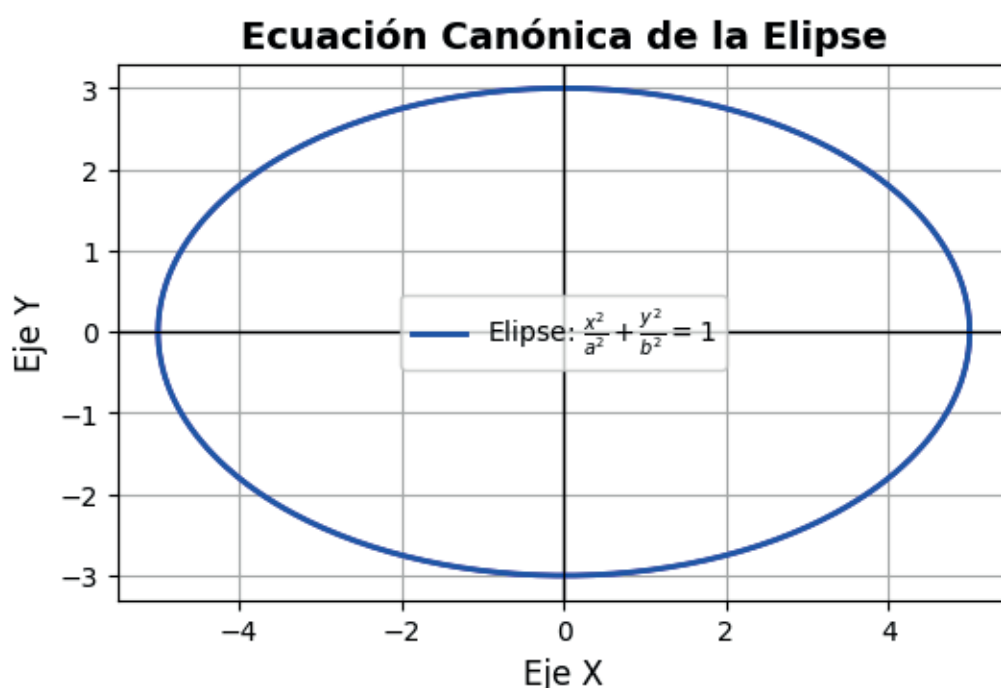


Gráfico 5: Representación de la ecuación canónica de una elipse

Creación propia

14.2. Propiedades geométricas

Las elipses tienen varias propiedades geométricas fundamentales. Estas propiedades permiten comprender su forma y comportamiento. A continuación, se analizan algunas de las propiedades más importantes:

1. **Simetría:** Una de las propiedades clave de la elipse es su simetría. La elipse es simétrica respecto a dos ejes: el **eje mayor** y el **eje menor**. Estos ejes se cruzan en el **centro** de la elipse. La simetría implica que, si reflejamos la elipse a través de cualquiera de estos ejes, la forma de la elipse no cambiará. En otras palabras, la elipse se puede dividir en dos partes que son imágenes especulares una de la otra.
2. **Focos:** Los **focos** de una elipse son dos puntos situados sobre el eje mayor. Una propiedad fundamental de la elipse es que para cualquier punto P en la elipse, la **suma de las distancias** desde P hasta los dos focos es **constante**. Esta propiedad es la que define una elipse. Si los focos están ubicados en el eje x , entonces la distancia de cada foco al centro está dada por:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Donde c es la distancia desde el centro de la elipse hasta cada foco. Si la distancia c es pequeña, la elipse será casi circular. Si c es grande, la elipse será más alargada.

3. **Vértices:** Los **vértices** son los puntos más alejados del centro de la elipse a lo largo del eje mayor. En una elipse centrada en el origen, los vértices estarán ubicados en las coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ si la elipse está alineada con el eje x .
4. **Centro:** El **centro** de la elipse es el punto de intersección de los ejes mayor y menor. En la forma canónica de la ecuación de la elipse, el centro está ubicado en el origen $(0,0)$.
5. **Longitud de la elipse:** La longitud de la elipse se refiere al perímetro de la figura. Calcular el perímetro exacto de una elipse es complicado debido a la forma matemática involucrada, pero se puede aproximar usando la fórmula de Ramanujan:

$$L \approx \pi \left(3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right)$$

Esta fórmula es útil cuando se requiere una aproximación precisa de la longitud de una elipse en aplicaciones de ingeniería y física.

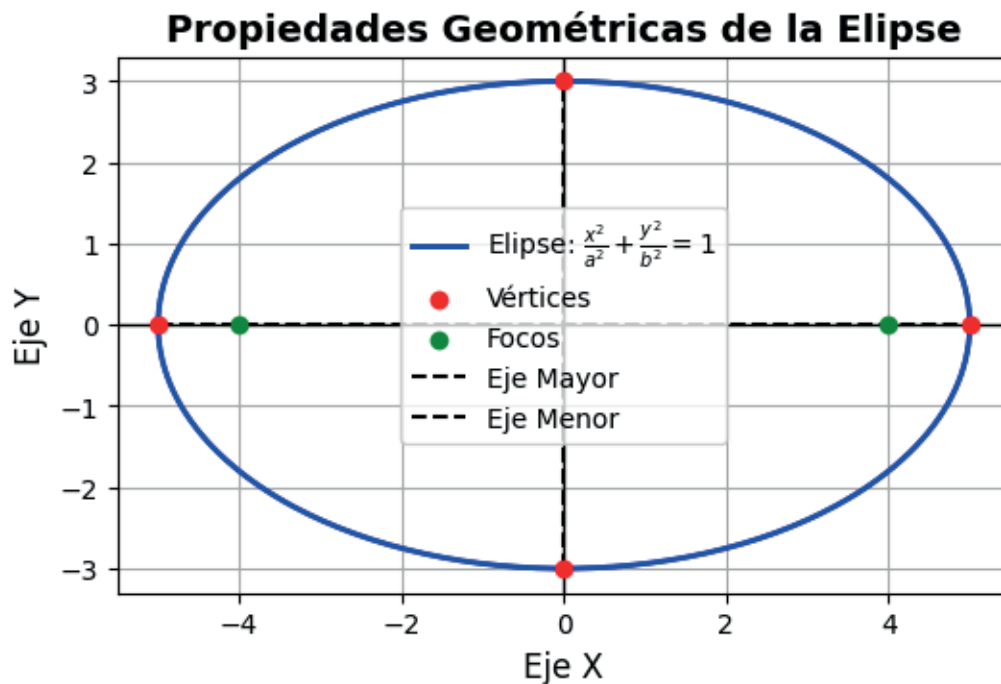


Gráfico 6: Propiedades geométricas de la elipse

Creación propia

14.3. Foco, directriz, vértice

El estudio de las elipses no estaría completo sin discutir tres componentes fundamentales: el **foco**, la **directriz** y el **vértice**. A continuación, se describen en detalle:

1. **Foco:** Los **focos** de la elipse son los puntos donde la suma de las distancias a cualquier punto de la elipse es constante. Si el centro de la elipse está en el origen, los focos están ubicados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Los focos son esenciales para la definición de la elipse y son fundamentales para entender su geometría.

2. **Directriz:** La **directriz** es una línea recta utilizada en la definición de la elipse. Se dice que cualquier punto en la elipse cumple con la propiedad de que la razón entre la distancia de ese punto a un foco y la distancia de ese punto a la directriz es constante e igual a la **excentricidad** de la elipse. La directriz se encuentra a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro de la elipse, y su ubicación depende de la orientación de la elipse.
3. **Vértice:** Los **vértices** son los puntos de la elipse donde la distancia desde el centro es máxima. En una elipse centrada en el origen, los vértices estarán ubicados en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, en el eje x , si la elipse está alineada de esa manera. La distancia entre los vértices es igual a $2a$, lo que indica el largo del eje mayor de la elipse.

Focos, Vértices, Centro y Excentricidad de la Elipse

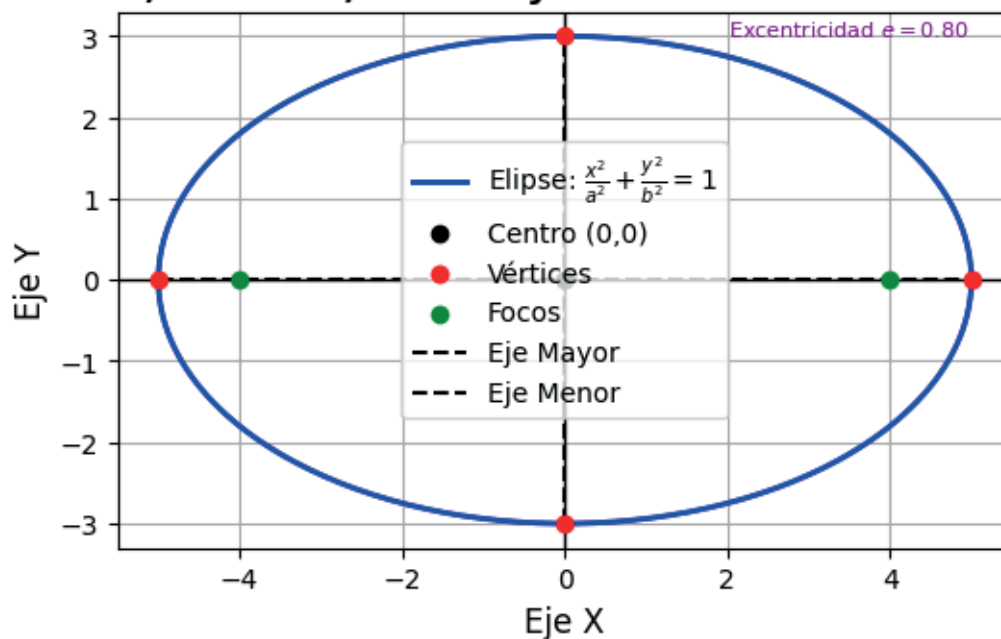


Gráfico 7: Focos, vértices, centro y excentricidad de una elipse

Creación propia

Las elipses son figuras geométricas fundamentales dentro de las cónicas, y sus propiedades están profundamente relacionadas con elementos como los focos, la directriz y los vértices. Estos elementos no solo son importantes para la descripción

teórica de la elipse, sino que también tienen aplicaciones prácticas en una amplia variedad de campos como la astronomía, la ingeniería, la óptica y la física.

Los focos de una elipse son dos puntos fijos dentro de la figura que son esenciales para su definición. La propiedad geométrica clave de la elipse es que la suma de las distancias de cualquier punto en la curva a los dos focos es siempre constante. Este atributo diferencia a la elipse de otras cónicas como la parábola o la hipérbola. Los focos determinan la excentricidad de la elipse, que es un valor que indica cuán alargada está la curva. Cuando los focos están muy cerca del centro, la elipse se acerca a la forma de un círculo. Si los focos se alejan, la elipse se alarga. Esta propiedad es crucial en la astronomía, ya que describe la órbita de los planetas alrededor del sol. En este contexto, el sol ocupa uno de los focos de la órbita elíptica de cada planeta.

La directriz es otro componente esencial de la elipse. Cada elipse tiene dos líneas fijas llamadas directrices, que están relacionadas con la excentricidad de la elipse. La propiedad geométrica que define la elipse establece que la relación entre la distancia desde cualquier punto de la elipse a uno de los focos y la distancia desde ese mismo punto a la directriz es constante y depende de la excentricidad. Esta propiedad es útil en la óptica, donde se aprovecha para construir sistemas de reflectores elípticos. En estos sistemas, los rayos de luz que inciden paralelamente sobre uno de los focos se reflejan y se concentran en el otro foco, aprovechando la propiedad geométrica de la elipse. La directriz también se utiliza en el diseño de antenas y dispositivos ópticos, donde se necesita una distribución precisa de la energía o las señales.

Por último, los vértices son los puntos más distantes del centro de la elipse a lo largo del eje mayor. Estos puntos son importantes porque definen el tamaño y la forma de la elipse. El eje mayor es la línea que conecta los dos vértices más distantes de la elipse, mientras que el eje menor es el eje perpendicular al mayor. Los vértices están ubicados en los puntos donde la elipse alcanza su máxima extensión. En términos de la física y la ingeniería, los vértices son cruciales para el diseño de estructuras y dispositivos que requieren simetría o eficiencia en la distribución de fuerzas. En astronomía, los vértices de una órbita planetaria corresponden a los puntos de máxima distancia entre el planeta y el sol.

Los focos, la directriz y los vértices son tres elementos geométricos clave que definen a la elipse y permiten comprender tanto su naturaleza matemática como sus

aplicaciones prácticas. Los focos determinan la excentricidad de la figura, la directriz está relacionada con la distribución de los puntos sobre la elipse y los vértices definen las dimensiones máximas de la curva. Estas propiedades hacen que la elipse sea una figura geométrica con una gran relevancia en diversos campos científicos y técnicos.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Para profundizar en la ecuación general de las elipses y sus transformaciones, se presenta un video que explica cómo obtener la forma canónica de la elipse a partir de su ecuación general. Este material es útil para estudiantes que deseen comprender el proceso de simplificación algebraica de ecuaciones de elipses.

- **Enlace:** [Video sobre Ecuaciones de Elipses](#)

Enlace 2:

En este artículo se exploran diversas aplicaciones de las elipses en la ingeniería, particularmente en el diseño de ópticas y sistemas de comunicación. Este enlace proporciona una mirada más técnica sobre cómo las propiedades geométricas de las elipses influyen en el rendimiento de los sistemas ópticos.

- **Enlace:** [Artículo sobre Aplicaciones de las Elipses en Ingeniería](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Foco: Un punto fijo sobre el eje mayor de la elipse tal que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse hasta los dos focos es constante.

Directriz: Una línea utilizada en la definición de la elipse, tal que la razón entre la distancia de cualquier punto sobre la elipse a un foco y la distancia de ese punto a la directriz es constante.

Vértice: Los puntos más alejados del centro de la elipse, ubicados sobre el eje mayor.

Referencias

- Stewart, J. (2017). *Cálculo de determinantes y transformaciones lineales* (7ª ed.). Cengage Learning.
- Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
- Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10ª ed.). Wiley.
- Cheng, D., & Jian, J. (2018). *Structural Analysis and Design with Matrix Methods*. Springer.

Recursos de Profundización

Artículo 1: Ecuación Canónica y General de la Elipse

Descripción: Este artículo profundiza en las ecuaciones que definen las elipses, tanto en su forma canónica como general. Explica cómo la ecuación canónica describe una elipse centrada en el origen y cómo la ecuación general permite representar elipses desplazadas o rotadas.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1INdCvapYrHpvCcmPR8OxVx67pmWHc9DX/view?usp=sharing>

Artículo 2: Propiedades Geométricas de las Elipses

Descripción: En este artículo se exploran las propiedades geométricas fundamentales de las elipses, incluyendo los ejes mayor y menor, los vértices, los focos, la directriz y

la excentricidad. Además, se analizan cómo estas propiedades determinan la forma y el comportamiento de la elipse.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1mqzHvJ4nkD5dr5EQ076pXLK_0P7ruwW/view?usp=sharing

Artículo 3: Foco, Directriz y Vértices: Conceptos y Aplicaciones

Descripción: Este artículo profundiza en los conceptos geométricos clave de la elipse: los focos, las directrices y los vértices. Se explica su importancia matemática y sus aplicaciones, especialmente en la astronomía y la ingeniería.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace: <https://drive.google.com/file/d/13W5F-xv4n3hdb-ywfh0dQIPpjXZPLCLJ/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

