PUCE Virtual

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Conceptos Básicos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Clase 2

Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa

INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Los sistemas de ecuaciones lineales son una de las herramientas más fundamentales en el álgebra lineal y constituyen la base para una amplia variedad de aplicaciones en distintos campos del conocimiento. Estos sistemas están formados por un conjunto de ecuaciones que comparten el mismo conjunto de incógnitas, y todas ellas son lineales, es decir, las variables solo aparecen con exponente 1. Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema. Dependiendo de las relaciones entre las ecuaciones, el sistema puede tener una única solución, ninguna solución o una cantidad infinita de soluciones. Este tipo de problemas es fundamental en disciplinas como la ingeniería, la economía, la física y la ciencia de datos, donde se utilizan para modelar situaciones de múltiples variables interdependientes, como la optimización de procesos, la predicción de comportamientos o la resolución de circuitos eléctricos.

Para resolver estos sistemas, existen diversos métodos que varían en función de la complejidad del sistema y la cantidad de incógnitas. Entre los más comunes se encuentran la sustitución, la igualación y la eliminación, pero uno de los métodos más poderosos, especialmente en sistemas de mayor tamaño, es el uso de matrices y determinantes. A través de este enfoque, un sistema de ecuaciones lineales se puede representar de manera compacta y manejar de forma más eficiente, permitiendo resolver sistemas con muchas incógnitas de manera más directa. Además, los sistemas de ecuaciones lineales son esenciales para comprender conceptos más avanzados en álgebra lineal, como las transformaciones lineales, las soluciones de espacios vectoriales y la diagonalización de matrices. Estas herramientas no solo son clave para la resolución de problemas matemáticos, sino que también son ampliamente utilizadas en la ciencia de datos, la inteligencia artificial, la teoría de redes y muchos otros campos donde el análisis de relaciones lineales es crucial para el desarrollo de modelos predictivos y la optimización de sistemas complejos.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

Clase 2: Conceptos Básicos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Definición y componentes de un sistema lineal (Ampliación)

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales que comparten un número común de incógnitas o variables. Dichas ecuaciones son **lineales** porque las variables aparecen únicamente en el primer grado, sin términos cuadráticos, cúbicos o fraccionarios. El objetivo al resolver un sistema es encontrar los valores de las incógnitas que hacen que todas las ecuaciones se cumplan simultáneamente.

Un sistema de ecuaciones lineales con ecuaciones y variables se representa generalmente de la siguiente forma:

Cada ecuación dentro del sistema tiene una estructura similar, en la que los son los **coeficientes** de las variables (con y son los **términos independientes**.

Los **componentes** esenciales de un sistema de ecuaciones son:

- **Variables**: Representan las cantidades desconocidas. Pueden ser .
- **Coeficientes**: Son los números que multiplican a las variables. Por ejemplo, en la ecuación , los coeficientes son y .
- **Términos independientes**: Son las constantes que están al otro lado del signo de igual en cada ecuación.

Una de las principales preocupaciones al trabajar con sistemas lineales es entender cómo se relacionan las ecuaciones entre sí y si el sistema tiene o no soluciones.

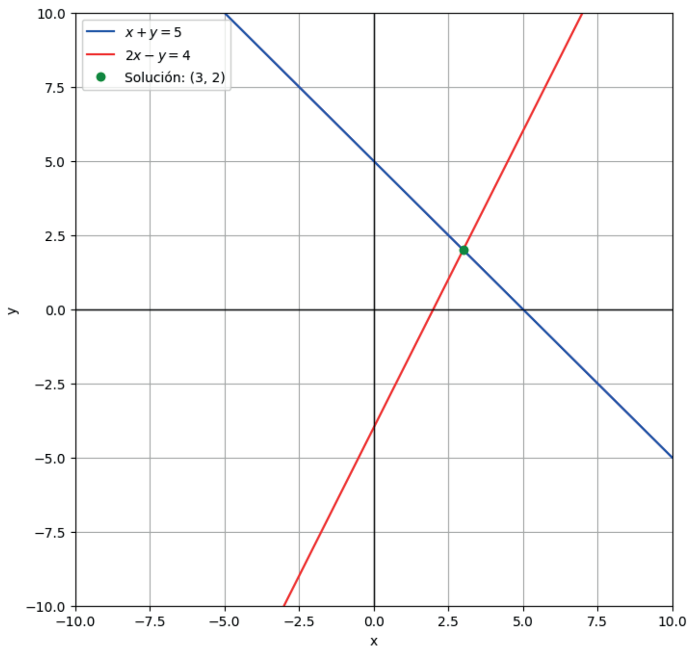

Gráfico 1: Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales en 2 variables.

Creación propia.

Descripción: En este gráfico se muestra cómo dos ecuaciones lineales se intersectan en un único punto en el plano cartesiano, lo que indica una solución única.

A continuación, ampliamos la explicación sobre cómo se pueden relacionar las ecuaciones dentro de un sistema lineal y las condiciones bajo las cuales puede existir o no una solución.

Cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones lineales, uno de los principales retos es entender cómo interactúan entre sí las ecuaciones, ya que esto determinará la **existencia**, **unicidad** o **infinitud** de las soluciones del sistema. Las ecuaciones pueden ser **independientes** o **dependientes**:

1. **Ecuaciones independientes**: Cuando cada ecuación aporta información nueva y no es redundante respecto a las demás. En un sistema con ecuaciones independientes, el número de ecuaciones es suficiente para determinar una única solución (si el sistema es consistente).

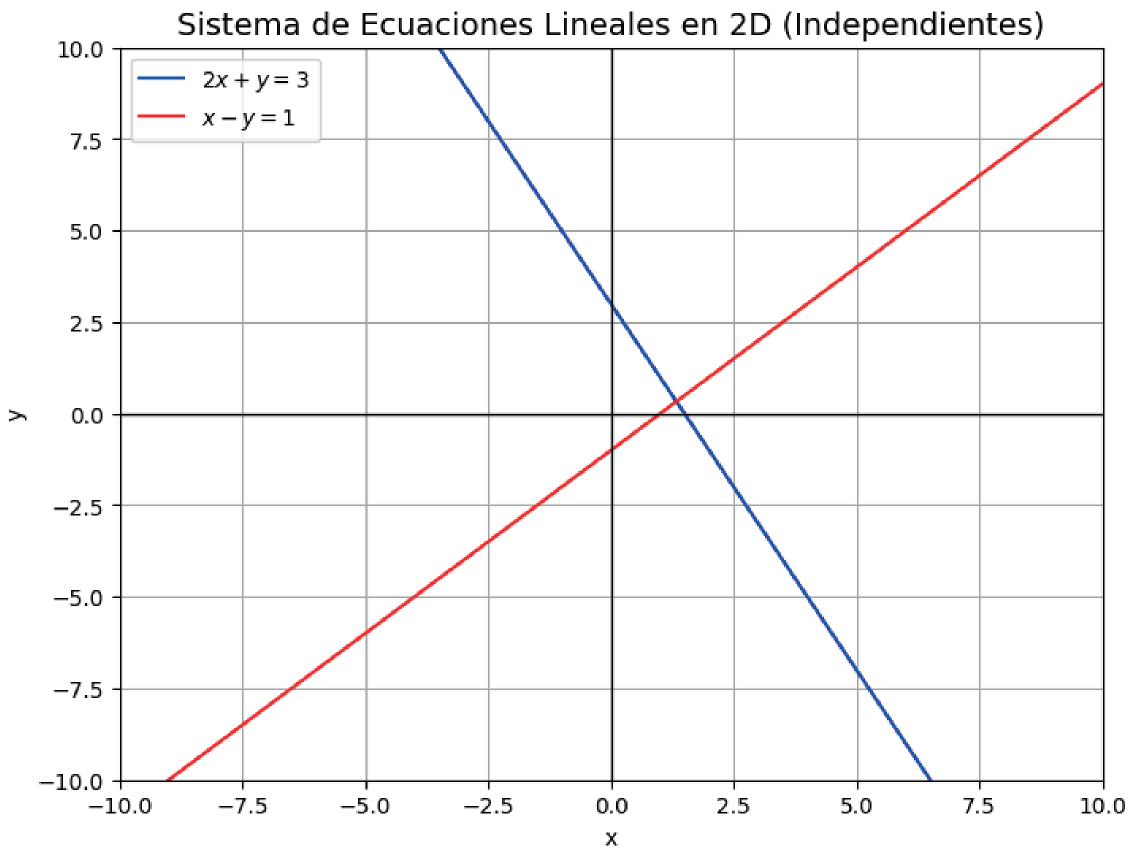

Gráfico 2: Sistemas de Ecuaciones L.I.

Creación propia.

2. **Ecuaciones dependientes**: Cuando una o más ecuaciones pueden ser obtenidas como combinaciones lineales de las otras, es decir, no aportan información nueva. Los sistemas con

ecuaciones dependientes generalmente tienen infinitas soluciones, ya que la cantidad de ecuaciones no es suficiente para restringir todas las variables.

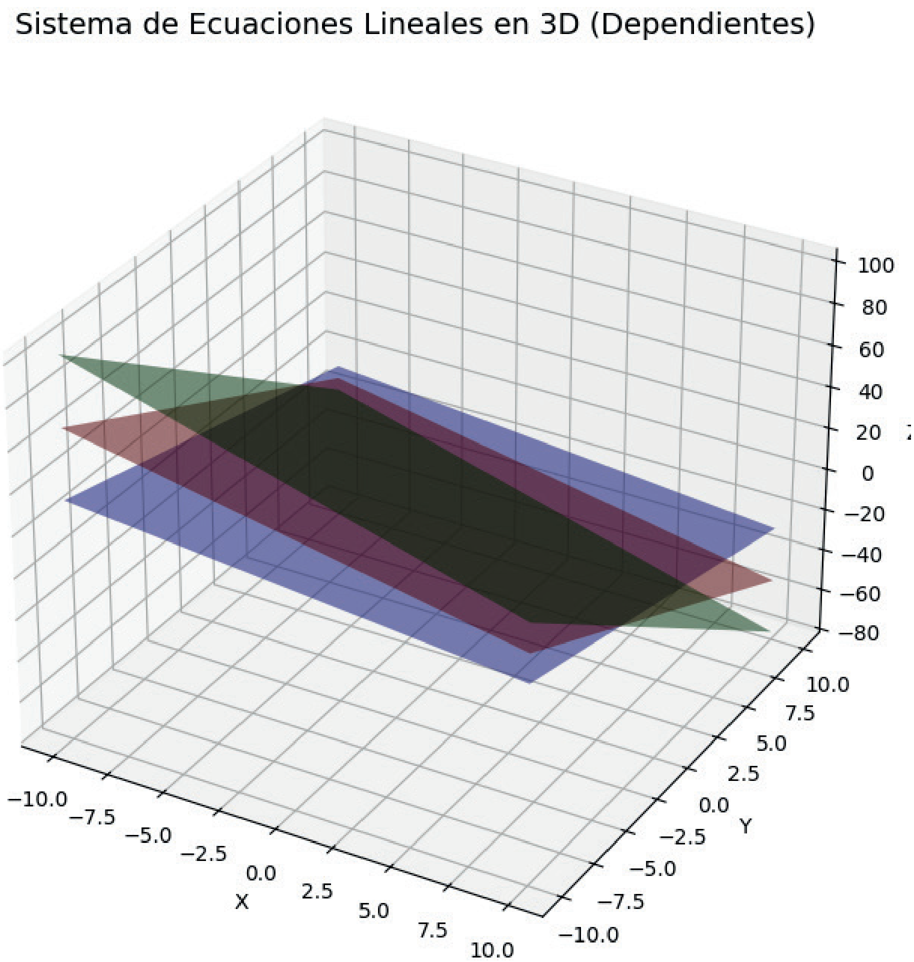

Gráfico 3: Sistemas de Ecuaciones L.D.

Creación propia.

Cuando un sistema tiene ecuaciones lineales dependientes, se dice que el sistema es **subdeterminado**, lo que significa que hay más incógnitas que ecuaciones, dejando así un número infinito de soluciones. Por otro lado, si las ecuaciones son independientes y el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es **determinante** y puede tener una única solución, siempre y cuando sea consistente.

Un **sistema consistente** es aquel que tiene al menos una solución, mientras que un **sistema inconsistente** no tiene solución. Por ejemplo, un sistema puede ser inconsistente si las ecuaciones representan condiciones contradictorias entre sí, como ocurre cuando las rectas o planos correspondientes a cada ecuación no se cruzan (en el caso de sistemas lineales en dos o tres dimensiones).

Un concepto clave para determinar la consistencia y la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales es el **rango** de la matriz de coeficientes. El rango de la matriz (que representa los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones) se refiere al número máximo de filas o columnas linealmente independientes. Si el rango de es igual al rango de la matriz ampliada (que incluye tanto los coeficientes como los términos independientes), el sistema es consistente. Si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene **infinitas soluciones**. Si el rango de no coincide con el rango de la matriz ampliada, entonces el sistema es inconsistente y no tiene soluciones.

Métodos para determinar la solución de un sistema:

- **Método de eliminación de Gauss**: Una técnica que se utiliza para transformar un sistema de ecuaciones en una forma escalonada. De esta forma, las ecuaciones pueden resolverse de manera sucesiva.

- **Método de sustitución hacia atrás**: Este método se utiliza una vez que el sistema ha sido reducido a una forma escalonada. Consiste en resolver las incógnitas comenzando desde la última ecuación hacia la primera.

- **Matriz inversa**: Si la matriz de coeficientes es invertible (es decir, su determinante no es cero), se puede multiplicar ambos lados del sistema por la inversa de para obtener directamente la solución del sistema.

Clasificación de los sistemas según su número de soluciones:

1. **Sistema determinado**: Cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el sistema es consistente, el sistema tiene una única solución.

2. **Sistema indeterminado**: Cuando el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene **infinitas soluciones**.

3. **Sistema inconsistente**: Si las ecuaciones representan condiciones contradictorias, no existe ninguna solución.

Es importante resaltar que, en algunos casos, como cuando los sistemas son sobredeterminados (más ecuaciones que incógnitas), puede no existir una solución exacta, y en su lugar se utiliza una **aproximación** de la solución, especialmente cuando se utilizan métodos numéricos como los de **mínimos cuadrados**.

De este modo, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales no solo requiere saber resolver las ecuaciones de manera aislada, sino también interpretar la relación entre ellas para determinar la cantidad y el tipo de soluciones del sistema. Esto implica un entendimiento profundo de conceptos como **rango**, **independencia lineal**, y **consistencia**, elementos esenciales para abordar problemas complejos en áreas como la ingeniería, la economía, y las ciencias computacionales.

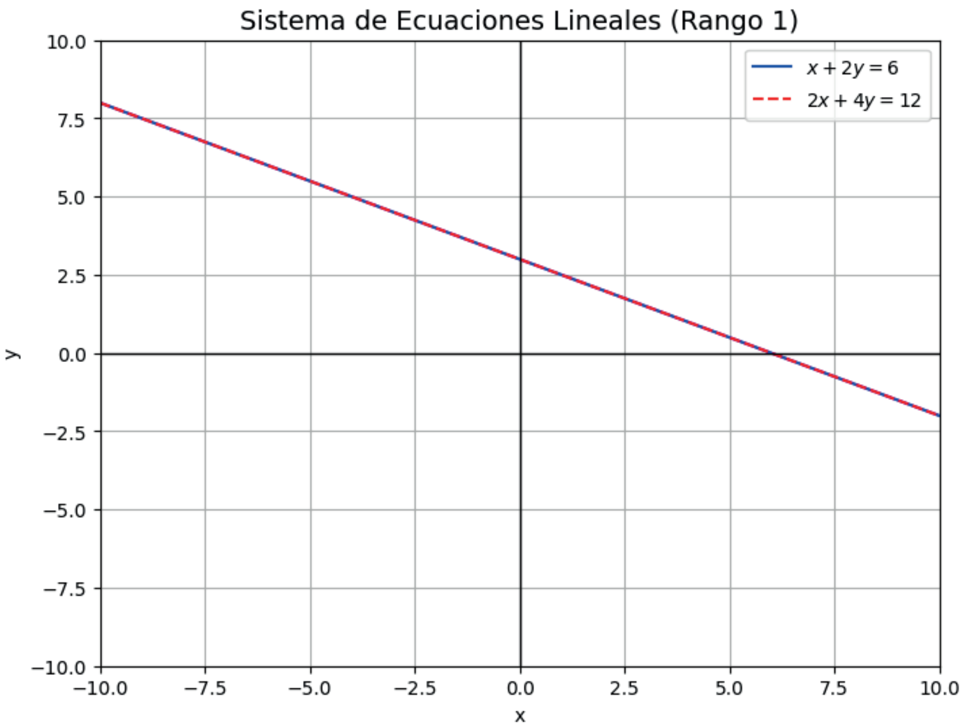

Gráfico 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Creación propia.

2.2. Variables, ecuaciones, soluciones (Ampliación)

En el contexto de un sistema de ecuaciones lineales, las **variables** son las incógnitas que se desean encontrar. En un sistema de ecuaciones con variables, se busca un conjunto de valores para las variables que haga que todas las ecuaciones se cumplan al mismo tiempo.

Las **ecuaciones** son las relaciones lineales entre las variables. Por ejemplo, en un sistema con dos ecuaciones y dos variables, como:

Cada ecuación establece una relación entre y . Resolver el sistema es encontrar los valores de y que hacen que ambas ecuaciones sean verdaderas al mismo tiempo.

Las **soluciones** de un sistema de ecuaciones lineales pueden clasificarse en tres categorías:

- **Única**: El sistema tiene una única solución. Esto ocurre cuando las ecuaciones representan líneas o planos que se intersecan en un único punto.
- **Infinitas**: El sistema tiene infinitas soluciones. Esto ocurre cuando las ecuaciones representan líneas o planos coincidentes (es decir, son dependientes entre sí).
- **Ninguna**: El sistema no tiene solución. Esto sucede cuando las ecuaciones representan líneas

o planos paralelos que nunca se intersectan.

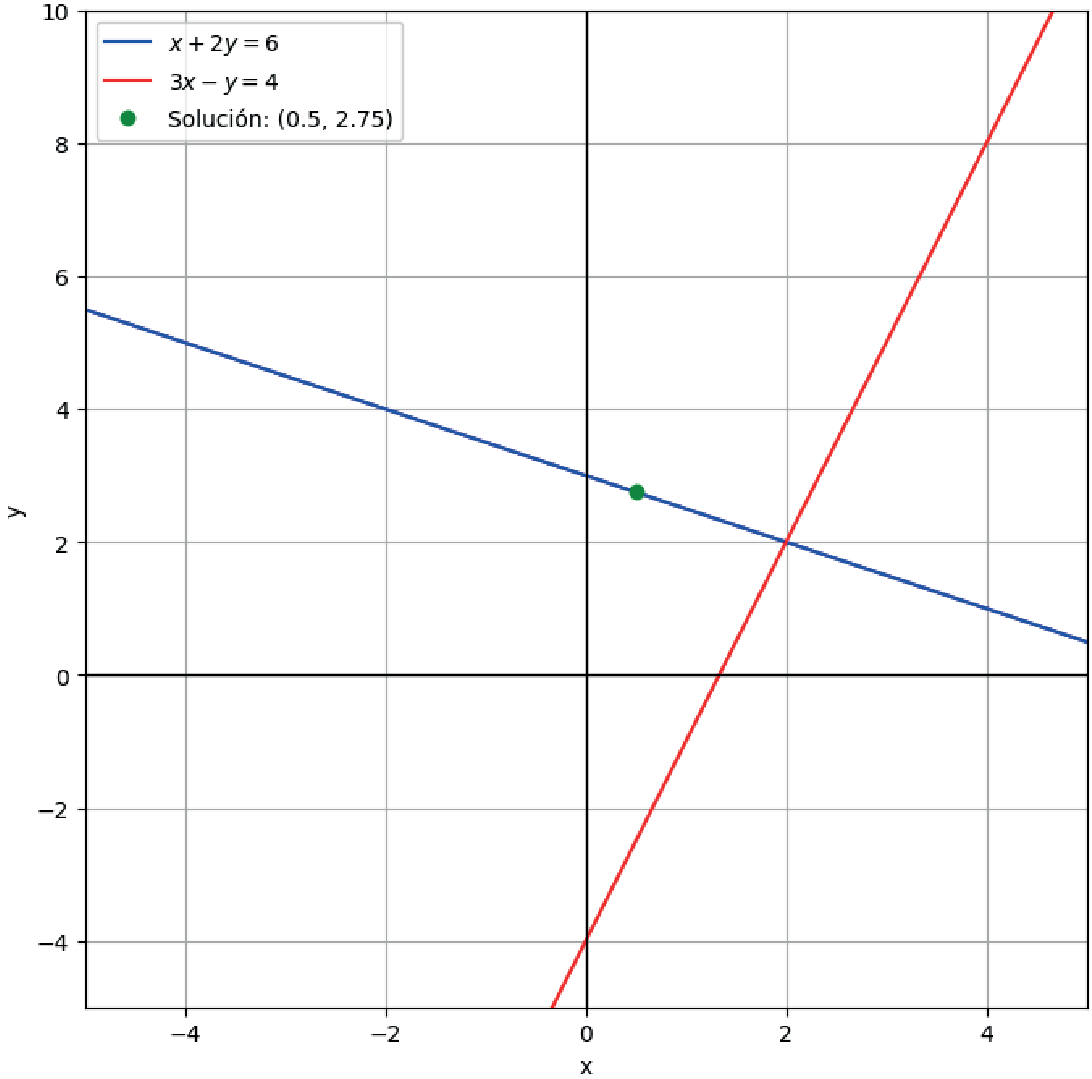

Gráfico 5: Sistema de ecuaciones con una única solución.

Creación propia.

Descripción: El gráfico muestra dos rectas que se cortan en un único punto, lo que representa una solución única al sistema de ecuaciones.

Es importante entender que no todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única. Por ejemplo, cuando tenemos un sistema como:

Observamos que la segunda ecuación es simplemente un múltiplo de la primera. En este caso, las dos ecuaciones representan la misma recta, por lo que el sistema tiene **infinitas soluciones** (cualquier punto sobre la recta es una solución).

2.3. Clasificación de sistemas (Ampliación)

La clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales depende de diversos factores. Uno de los principales es la **cantidad de ecuaciones** y **variables** que se involucran. Sin embargo, una clasificación más importante es la que depende de la cantidad de soluciones que tiene el sistema.

Existen tres tipos fundamentales de clasificación para los sistemas de ecuaciones lineales:

1. **Sistema consistente**: Un sistema consistente tiene al menos una solución. Esto significa que las ecuaciones se pueden resolver simultáneamente de alguna forma.
   - **Consistente independiente**: Tiene una única solución. Las ecuaciones representan líneas o planos que se intersecan en un único punto.
   - **Consistente dependiente**: Tiene infinitas soluciones. Las ecuaciones representan la misma línea o plano, es decir, son coincidentes.
2. **Sistema inconsistente**: Un sistema inconsistente no tiene solución. Esto ocurre cuando las ecuaciones representan líneas o planos paralelos que no se intersectan. Un ejemplo clásico es el sistema:

Este sistema es inconsistente porque no existe ningún valor de y que pueda satisfacer ambas ecuaciones al mismo tiempo.

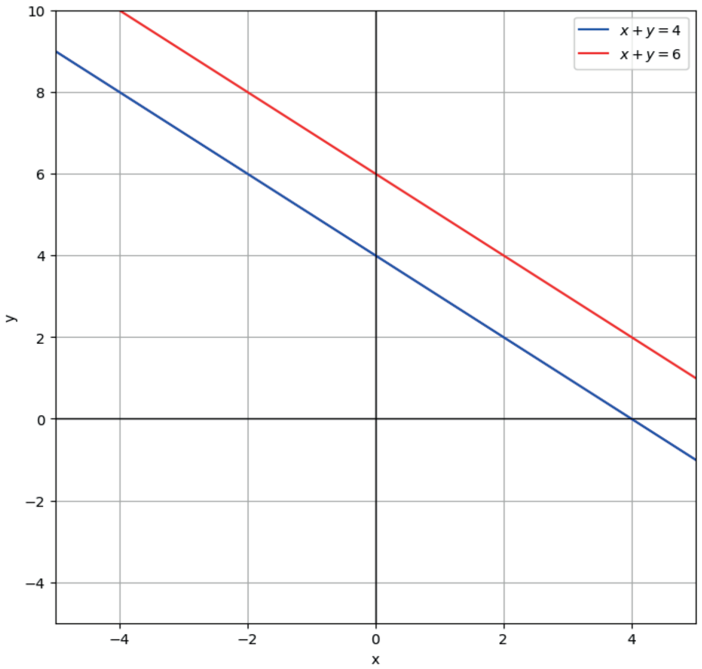

Gráfico 6: Ejemplo de un sistema inconsistente (líneas paralelas).

Creación propia.

Descripción: Las dos líneas paralelas nunca se intersectan, por lo que no hay ninguna solución al sistema.

2.4. Sistemas consistentes vs. inconsistentes (Ampliación)

En un **sistema consistente**, existe al menos una solución. Cuando el sistema tiene una **única solución**, decimos que es **independiente**. Este tipo de sistema ocurre cuando las ecuaciones representan rectas o planos que se cortan en un único punto. Por ejemplo, en un sistema de dos ecuaciones con dos variables:

Este sistema tiene una única solución, que es y , ya que las rectas se intersectan en el punto .

Sin embargo, un sistema puede ser **consistente dependiente**, lo que significa que tiene **infinitas soluciones**. Esto ocurre cuando las ecuaciones son **linealmente dependientes**, es decir, una ecuación es un múltiplo de la otra. Como el sistema representa una sola línea o plano, cualquier punto sobre esa línea o plano es una solución.

En un **sistema inconsistente**, las ecuaciones no tienen ninguna solución, lo que ocurre cuando las ecuaciones representan líneas o planos que son paralelos entre sí y no se intersectan. Esto es típico de sistemas en los que las ecuaciones se contradicen entre sí.

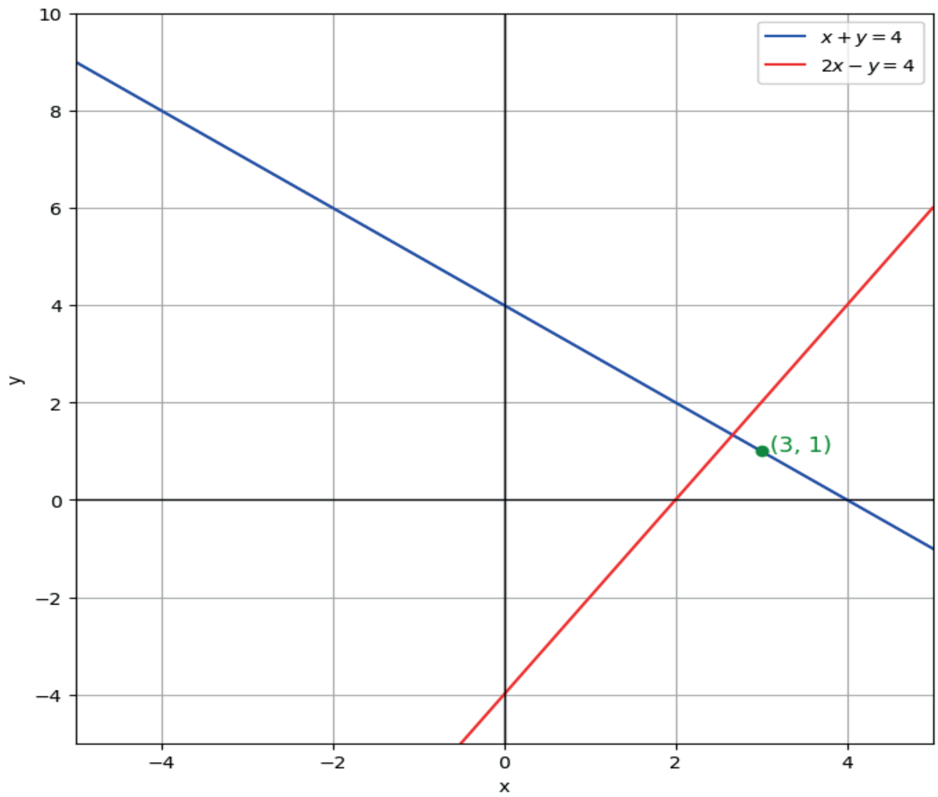

Gráfico 7: Sistema consistente con una única solución.

Creación propia.

Descripción: Dos rectas que se intersectan en un único punto (3,1), mostrando una solución única.

2.5. Sistemas dependientes vs. independientes (Ampliación)

Los sistemas de ecuaciones también pueden clasificarse en **dependientes** e **independientes**:

- Un **sistema independiente** tiene una única solución. En términos geométricos, las ecuaciones representan rectas o planos que se cortan en un único punto. Por ejemplo, el sistema:

Este sistema tiene una única solución, ya que las rectas se intersecan en el punto .

- Un **sistema dependiente** tiene **infinitas soluciones**. Esto ocurre cuando las ecuaciones representan líneas o planos coincidentes, es decir, las ecuaciones son **linealmente dependientes**. Un ejemplo de esto es:

Las dos ecuaciones son equivalentes, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Gráfico 8: Sistema dependiente.

Fuente: "Linear Algebra with Applications", Steven J. Leon

Descripción: Este gráfico muestra dos líneas coincidentes, lo que indica que cualquier punto sobre esa línea es una solución al sistema.

Enlaces complementarios

Enlace 1:

Ver en YouTube: [Introducción a los Sistemas de Ecuaciones Lineales]

Descripción del enlace: Este video ofrece una explicación visual y práctica de los sistemas de ecuaciones lineales, con ejemplos detallados sobre cómo resolverlos paso a paso.

Enlace 2: https://blogs.ugto.mx/rea/clase-digital-1-sistemas-de-ecuaciones-lineales/#:~:text=En%20general%20los%20sistemas%20de,heterog%C3%A9neos%20o%20como%20sistemas%20homog%C3%A9neos.

Leer en línea: Clasificación y Soluciones de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descripción del enlace: Este artículo profundiza en los tipos de sistemas de ecuaciones, con énfasis en cómo clasificarlos según sus soluciones.

Términos subrayados y definiciones

Sistema de ecuaciones lineales: Conjunto de ecuaciones en el cual las incógnitas aparecen solo con exponente 1 y deben resolverse simultáneamente.

Sistema inconsistente: Sistema que no tiene solución. Las ecuaciones representan líneas o planos paralelos.

Referencias

- Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra* (4th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra* (8th ed.). John Wiley & Sons.
- Leon, S. J. (2010). *Linear Algebra with Applications* (7th ed.). Pearson.
- Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.). Cengage Learning.

Recursos de Profundización

1. Conceptos Básicos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Descripción del enlace:

Este artículo aborda los conceptos fundamentales de los sistemas de ecuaciones lineales. Se explica detalladamente la definición y los componentes de un sistema lineal, las variables y las ecuaciones involucradas, así como las soluciones posibles. Además, se cubre la clasificación de los sistemas de ecuaciones, diferenciando entre sistemas consistentes e inconsistentes, y se analizan sus propiedades más importantes. A través de ejemplos, se facilita la comprensión de cómo estos sistemas se aplican en problemas prácticos.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace: https://drive.google.com/file/d/1vPABkWrbFHYMnEl4_wBWTNazJB0GblHs/view?usp=sharing

2. Profundización en Sistemas Dependientes e Independientes

Descripción del enlace:

Este artículo profundiza en los sistemas de ecuaciones lineales dependientes e independientes. Se analizan las características fundamentales de ambos tipos de sistemas, destacando cómo se comportan bajo diferentes condiciones. Los sistemas independientes tienen una única solución, mientras que los sistemas dependientes tienen infinitas soluciones. Se incluyen ejemplos prácticos que ilustran cómo identificar y resolver cada tipo de sistema, facilitando la comprensión de estos conceptos clave para resolver problemas de álgebra lineal.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace: https://drive.google.com/file/d/1AuVrszKZHOREwrmFGPN_9fl49vIKnuxb/view?usp=sharing

PUCE Virtual

La excelencia no se improvisa

síguenos

MDASC - M5 - A2