

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Método de Resolución:
Matrices y Operaciones
Elementales
Clase 4



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El uso de **matrices** y **operaciones elementales** constituye un enfoque altamente eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales, especialmente cuando el sistema involucra una gran cantidad de incógnitas y ecuaciones. En este método, el sistema de ecuaciones se representa mediante una **matriz aumentada**, una matriz que organiza los coeficientes de las incógnitas y los términos constantes en un formato tabular. Esta representación compacta permite aplicar operaciones sistemáticas que facilitan la resolución del sistema. Las operaciones elementales sobre las filas de la matriz, tales como el intercambio de filas, la multiplicación de una fila por un escalar distinto de cero, y la suma o resta de filas, son fundamentales para transformar la matriz en una forma más sencilla de manejar, como la **forma escalonada de filas** o la **forma escalonada reducida de filas**. Estas transformaciones permiten simplificar el sistema de ecuaciones hasta que sea más fácil identificar y encontrar las soluciones, proporcionando una estructura clara que facilita el proceso de resolución.

Una de las grandes ventajas de este método es su aplicabilidad a **sistemas grandes y complejos**, ya que, a diferencia de otros métodos como la sustitución o eliminación, las matrices permiten abordar el problema de manera más organizada y estructurada. El **proceso de eliminación gaussiana**, basado en las operaciones elementales, es una técnica poderosa utilizada para reducir la matriz a una forma que haga evidente la solución del sistema, sin necesidad de realizar cálculos complejos manualmente. Este enfoque es especialmente útil en la resolución de sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas, lo que lo hace indispensable en campos como la **informática**, **ingeniería** y **ciencias aplicadas**, donde a menudo se manejan grandes volúmenes de datos y ecuaciones. Además, dado que este proceso puede ser fácilmente automatizado mediante algoritmos, es una herramienta fundamental en la programación y en la computación científica. En resumen, las matrices y las operaciones elementales no solo proporcionan un enfoque altamente eficiente y sistemático para resolver sistemas lineales, sino que también son cruciales para avanzar en temas más complejos de **álgebra lineal** y en la aplicación de modelos matemáticos en diversas disciplinas.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Álgebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
 - 2) Analizar los problemas relacionados al Álgebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
-

Reto # (1)

Clase 4: Método de Resolución: Matrices y Operaciones Elementales

4.1. Introducción a las Matrices

Las **matrices** son estructuras matemáticas que agrupan números en una tabla de filas y columnas. Este concepto es fundamental en diversas áreas de las matemáticas, como el álgebra lineal, la teoría de sistemas, la física computacional, la ingeniería y la informática. Su utilidad principal radica en la capacidad de representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales, además de modelar transformaciones y relaciones en varios dominios científicos y técnicos.

Una matriz es comúnmente representada por una letra mayúscula, como A , B , o C , y sus elementos se encuentran organizados en filas y columnas. El número de filas se denomina m y el número de columnas se denomina n , así que una matriz con m filas y n columnas se denomina matriz $m \times n$.

Por ejemplo, la matriz siguiente tiene 2 filas y 3 columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices se emplean para representar sistemas de ecuaciones, realizar transformaciones en el espacio tridimensional y describir redes neuronales en inteligencia artificial, entre otros.

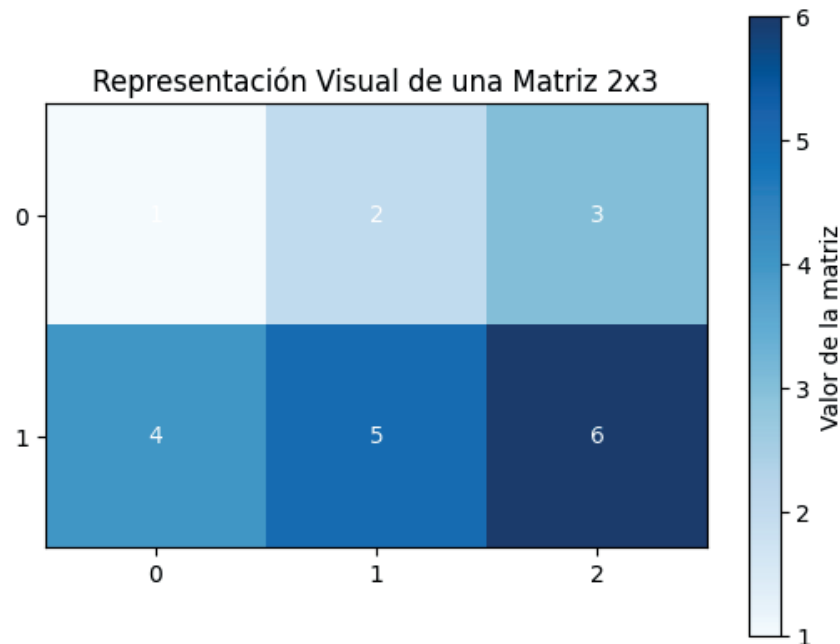


Gráfico 1: Representación visual de una matriz 2×3

Creación propia.

4.2. Definiciones y Propiedades Básicas

Una **matriz** se define como una colección rectangular de números o funciones organizadas en filas y columnas. Los elementos de la matriz se denotan generalmente como a_{ij} , donde i representa el número de fila y j el número de columna.

Por ejemplo, en una matriz A de tamaño 3×3 , el elemento en la segunda fila y tercera columna se denotaría como a_{23} . Las propiedades de las matrices permiten realizar operaciones sobre ellas, como suma, multiplicación, determinantes, y más. A continuación, algunas propiedades básicas de las matrices:

1. **Propiedad Conmutativa de la Suma:** La suma de matrices es conmutativa, lo que significa que $A + B = B + A$, siempre y cuando ambas matrices tengan las mismas dimensiones.
2. **Propiedad Asociativa de la Suma:** La suma de matrices es asociativa, es decir, $(A + B) + C = A + (B + C)$. Esto garantiza que no importa cómo agrupemos las matrices al sumarlas, el resultado siempre será el mismo.
3. **Elemento Neutro:** Existe una matriz llamada **matriz nula** (denotada como O), tal que $A + O = A$ para cualquier matriz A . Esta matriz tiene todos sus elementos iguales a 0.
4. **Multiplicación por un Escalar:** Las matrices también pueden ser multiplicadas por un escalar (un número real), lo cual implica que cada elemento de la matriz es multiplicado por ese número. Si k es un número real, y A es una matriz, entonces la multiplicación por escalar se define como:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5. **Existencia de Inversa:** Una matriz cuadrada (con el mismo número de filas y columnas) A tiene una matriz inversa A^{-1} si cumple que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad.

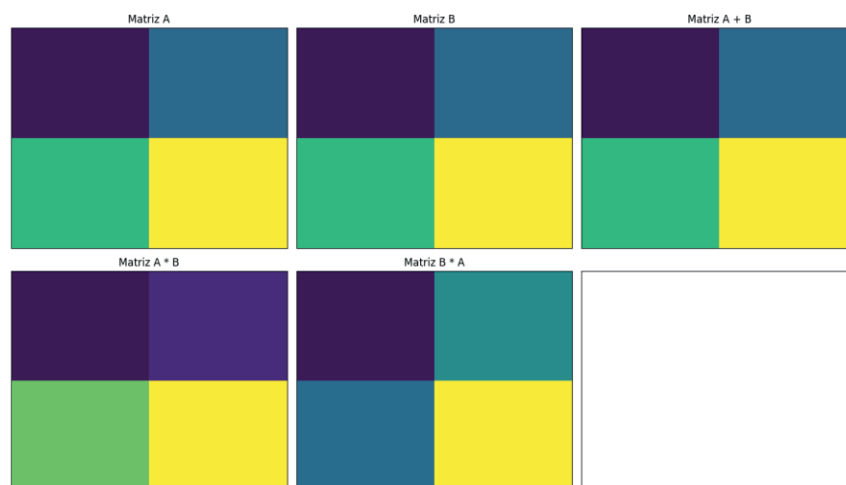


Gráfico 2: Representación visual de Propiedades de matrices

Creación propia.

4.3. Tipos de Matrices

Existen varios tipos de matrices, cada una con propiedades particulares que las hacen útiles en contextos específicos. A continuación, se detallan algunos de los tipos más comunes:

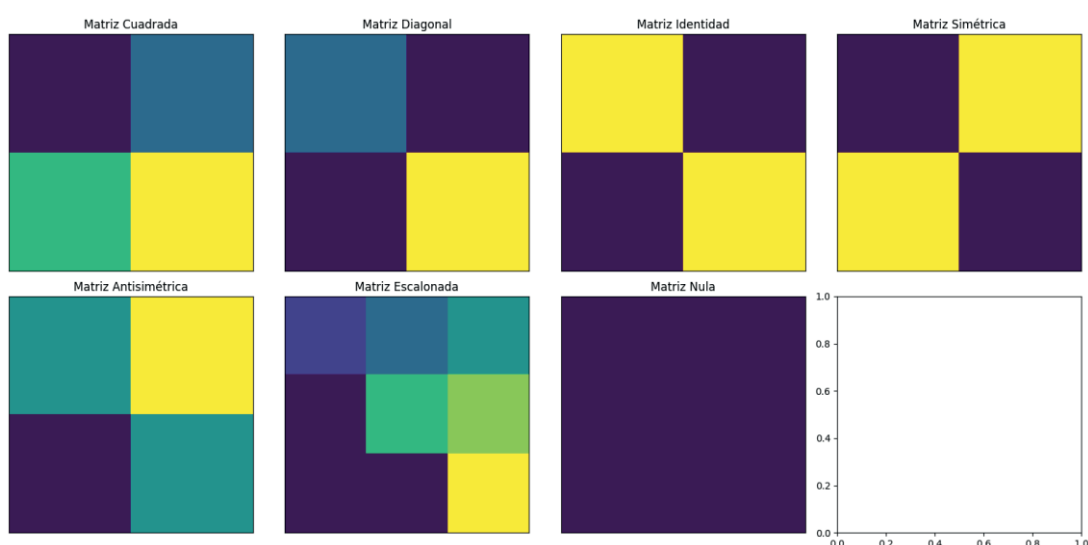


Gráfico 3: Tipos de matrices

Creación propia.

1. **Matriz Cuadrada:** Una matriz en la que el número de filas es igual al número de columnas. Se denota como una matriz $m \times m$. Las matrices cuadradas son clave en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que pueden tener una matriz inversa si son no singulares.
2. **Matriz Identidad:** Es una matriz cuadrada especial cuya diagonal principal está llena de unos y todos los demás elementos son ceros. Se denota como I y tiene la propiedad de que para cualquier matriz A de tamaño $n \times n$, se cumple que $A \cdot I = I \cdot A = A$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Matriz Diagonal:** Una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero. Si una matriz es diagonal, su inversa es fácilmente calculable si todos los elementos de la diagonal son no nulos.
4. **Matriz Traspuesta:** La matriz traspuesta de una matriz A se obtiene intercambiando sus filas por columnas. Si $A = (a_{ij})$, entonces su traspuesta A^T es (a_{ji}) .
5. **Matriz Nula:** Una matriz en la que todos sus elementos son iguales a 0. Se denota por O y tiene la propiedad de ser el elemento neutro para la suma de matrices.

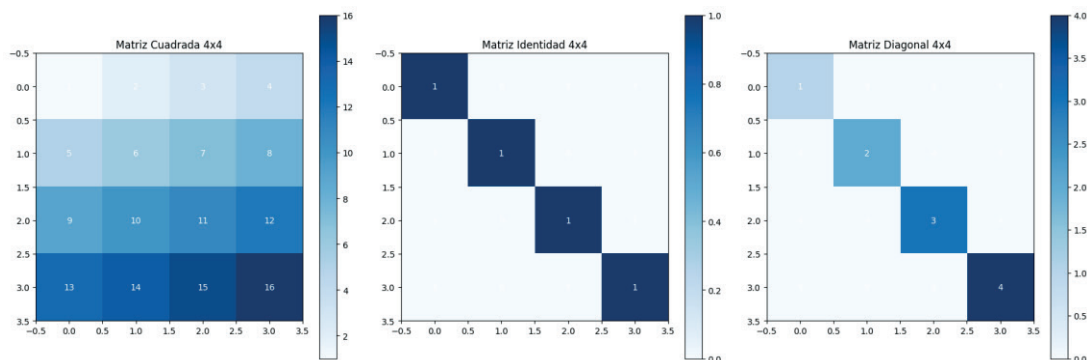


Gráfico 3: Ejemplos gráficos de matrices cuadradas, identidad y diagonal

Creación propia.

4.4. Operaciones Elementales

Las **operaciones elementales** sobre matrices son transformaciones que se realizan sobre las filas de una matriz para simplificarla y facilitar su resolución. Estas operaciones son fundamentales en la **eliminación de Gauss** y el **método de Gauss-Jordan**.

Las tres operaciones elementales son:

1. **Intercambio de filas:** Permite intercambiar dos filas de una matriz. Esta operación es útil para llevar una matriz a una forma escalonada, que facilita la resolución de sistemas de ecuaciones.
2. **Multipliación de una fila por un escalar:** Se puede multiplicar cualquier fila de una matriz por un número real distinto de cero. Esta operación es útil cuando se quiere hacer que un elemento de la fila sea igual a 1 o se desea simplificar la matriz.
3. **Suma de filas:** Se puede añadir un múltiplo de una fila a otra. Esta operación se usa en el proceso de eliminación de Gauss para obtener ceros en ciertas posiciones de la matriz.

Estas operaciones son la base de los algoritmos que permiten resolver sistemas de ecuaciones lineales y calcular la inversa de matrices. La **reducción por filas** es un proceso que implica aplicar una combinación de estas tres operaciones hasta obtener una matriz en forma escalonada, la cual facilita la obtención de la solución del sistema.

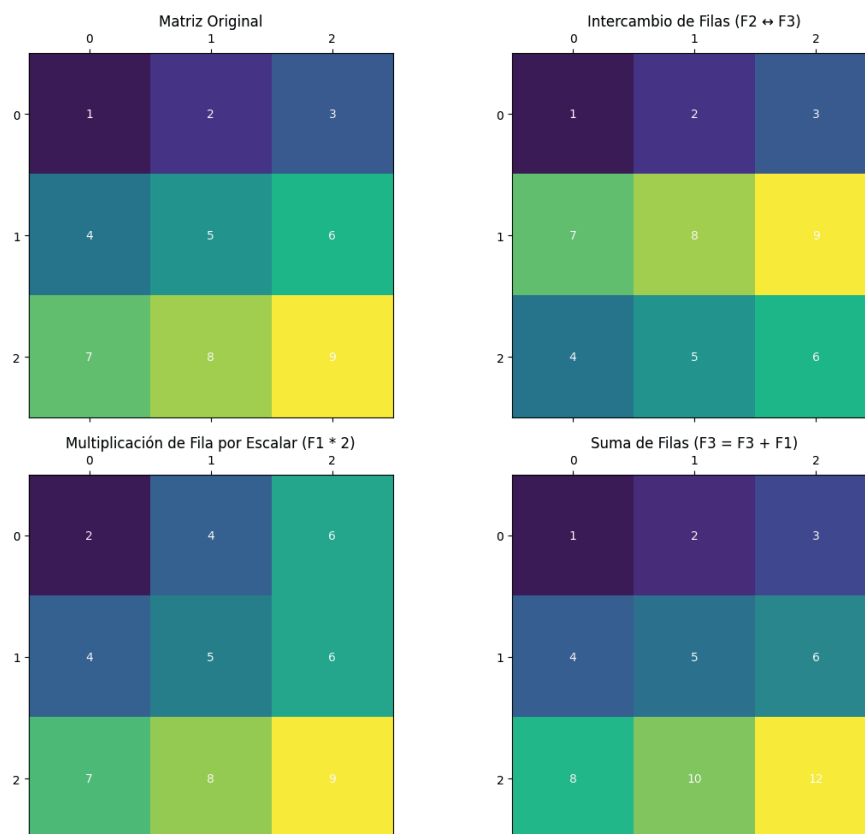


Gráfico 4: Representación de las operaciones elementales en una matriz

Creación propia.

4.5. Suma y Multiplicación de Matrices

La suma y multiplicación de matrices son dos de las operaciones más importantes que se realizan en álgebra lineal. Ambas operaciones se definen de la siguiente manera:

Suma de Matrices:

La suma de matrices es posible solo cuando ambas matrices tienen el mismo número de filas y columnas. Para sumar dos matrices, simplemente se suman los elementos correspondientes. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices del mismo tamaño, entonces su suma $A + B$ es:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices:

La multiplicación de matrices es más compleja que la suma. Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda. El resultado es una nueva matriz, cuyas dimensiones serán el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda.

La entrada c_{ij} de la matriz resultante se obtiene multiplicando los elementos correspondientes de las filas de la primera matriz por los elementos correspondientes de las columnas de la segunda matriz y sumando los productos:

$$C = AB \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

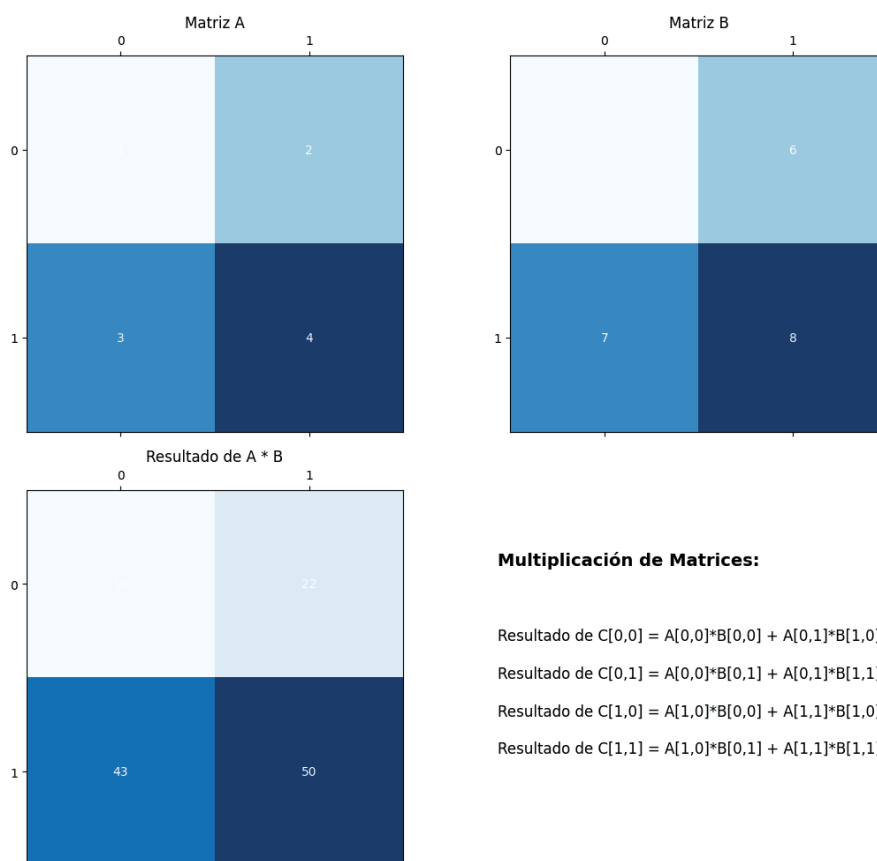


Gráfico 5: Ejemplo detallado de multiplicación de matrices

Creación propia.

4.6. Transformaciones Elementales para Resolver Sistemas

Las **transformaciones elementales** en matrices son esenciales para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el **Método de Gauss-Jordan**. Este método se basa en la reducción de matrices a su forma escalonada utilizando operaciones elementales. Una vez que la matriz está en esta forma, se pueden obtener las soluciones del sistema de ecuaciones.

En el método de **Gauss-Jordan**, la idea es transformar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones en una matriz identidad en la parte izquierda, lo que facilita la lectura de las soluciones en la parte derecha. Este método se utiliza comúnmente en la solución de sistemas de ecuaciones lineales de cualquier tamaño.

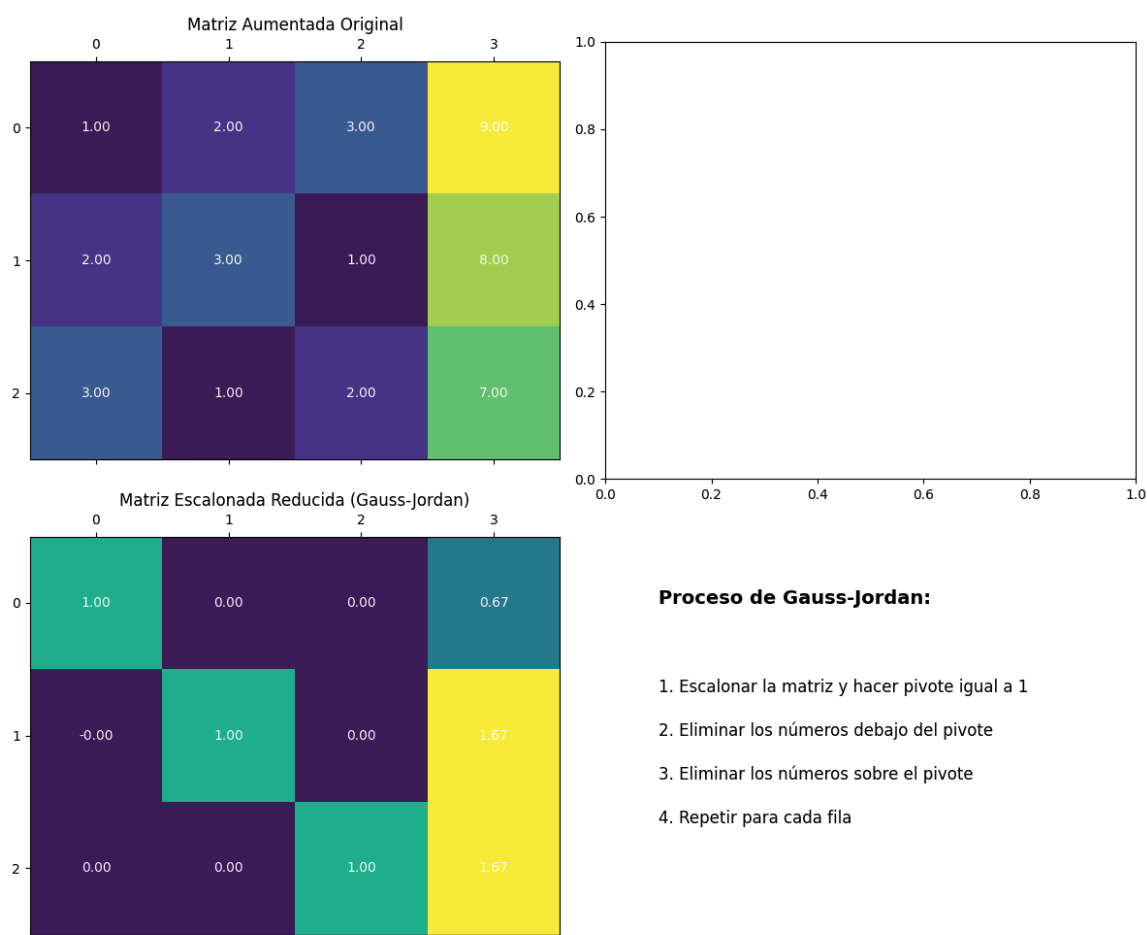


Gráfico 6: Proceso de eliminación de Gauss-Jordan en una matriz aumentada

Creación propia.

El **proceso de eliminación de Gauss-Jordan** es una técnica fundamental en álgebra lineal utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales, encontrar inversas de matrices y estudiar las propiedades de sistemas de ecuaciones. Este proceso es una extensión de la **eliminación de Gauss**, pero con la diferencia clave de que se continúa el proceso hasta que la matriz se convierte en la **forma reducida por filas** (RREF, por sus siglas en inglés), lo que facilita la obtención de la solución directamente de la matriz.

El gráfico representa las distintas etapas del proceso de eliminación de Gauss-Jordan aplicado a una **matriz aumentada**, que es una matriz que incluye tanto los coeficientes del sistema de ecuaciones como los términos constantes en una columna adicional.

Etapas del proceso de eliminación de Gauss-Jordan:

1. Matriz inicial:

2. La matriz aumentada comienza con los coeficientes del sistema de ecuaciones y los términos independientes en una columna separada. La primera fila de la matriz representa la primera ecuación, la segunda fila la segunda ecuación, y así sucesivamente. En el gráfico, la primera columna contiene los coeficientes de la variable x_1 , la segunda columna los coeficientes de x_2 , y la última columna contiene los términos independientes del sistema.

3. Pivoteo:

El primer paso en la eliminación de Gauss-Jordan es identificar el **pivote**, es decir, el primer elemento no nulo en la primera fila. El pivote debe ser 1 para simplificar el proceso, por lo que, si es necesario, se **normaliza** (dividiendo toda la fila entre el valor del pivote). Esto convierte el elemento principal de la fila en 1, lo que facilita las operaciones de eliminación.

4. Eliminación hacia abajo:

Una vez que el pivote es 1, el siguiente paso es **eliminar** los elementos por debajo del pivote en la columna del pivote. Esto se logra restando múltiplos de la primera fila de las filas inferiores. En el gráfico, esto se representaría como la transformación de las filas inferiores para que sus elementos en la columna del pivote sean igual a cero. De este modo, se obtiene una matriz escalonada con ceros debajo del pivote.

5. Eliminación hacia arriba:

Una vez que todas las filas por debajo del pivote tienen ceros en la columna del pivote, se procede a **eliminar los elementos por encima** del pivote en la misma columna. Para hacer esto, se suman múltiplos negativos de la primera fila a las filas superiores, de modo que los elementos por encima del pivote se conviertan en cero. Esta es una de las diferencias clave con el método de eliminación de Gauss, que solo elimina hacia abajo.

6. Normalización de los pivotes:

A medida que se avanza en las siguientes columnas, se seleccionan nuevos pivotes en las filas correspondientes y se repite el proceso de **normalización** (haciendo que el pivote sea 1), seguido de la eliminación de los elementos debajo y encima del pivote en la misma columna. Este proceso se realiza de manera iterativa hasta que se alcanza la última columna de la matriz.

7. **Matriz en forma escalonada reducida por filas (RREF):**

El objetivo final del proceso de eliminación de Gauss-Jordan es obtener la **forma escalonada reducida por filas (RREF)** de la matriz, en la que todos los pivotes son 1 y todos los elementos por encima y por debajo de los pivotes son 0. Esto deja una matriz en la que las soluciones del sistema de ecuaciones son claramente visibles. Si el sistema tiene una solución única, la última columna de la matriz aumentada proporcionará los valores de las incógnitas directamente.

8. **Solución del sistema:**

Una vez que la matriz está en su forma escalonada reducida por filas, la solución del sistema es simplemente la última columna de la matriz aumentada, ya que el sistema de ecuaciones ahora está en su forma diagonal, donde cada fila corresponde a una ecuación de la forma $x_i = b_i$, donde b_i es el valor en la última columna de la fila i .

Importancia y aplicaciones

El proceso de **Gauss-Jordan** es fundamental no solo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino también para encontrar la **inversa de una matriz** (si existe). En este caso, el proceso se realiza sobre una matriz aumentada que consiste en la matriz original junto con la matriz identidad al lado derecho. Al aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan, la matriz original se transforma en la matriz identidad y la matriz aumentada se transforma en la inversa de la matriz original.

Este método es ampliamente utilizado en **computación científica, teoría de redes, modelado físico, cálculo numérico** y muchas otras áreas de las matemáticas y la ingeniería, ya que proporciona una forma sistemática de abordar y resolver problemas complejos de álgebra lineal.

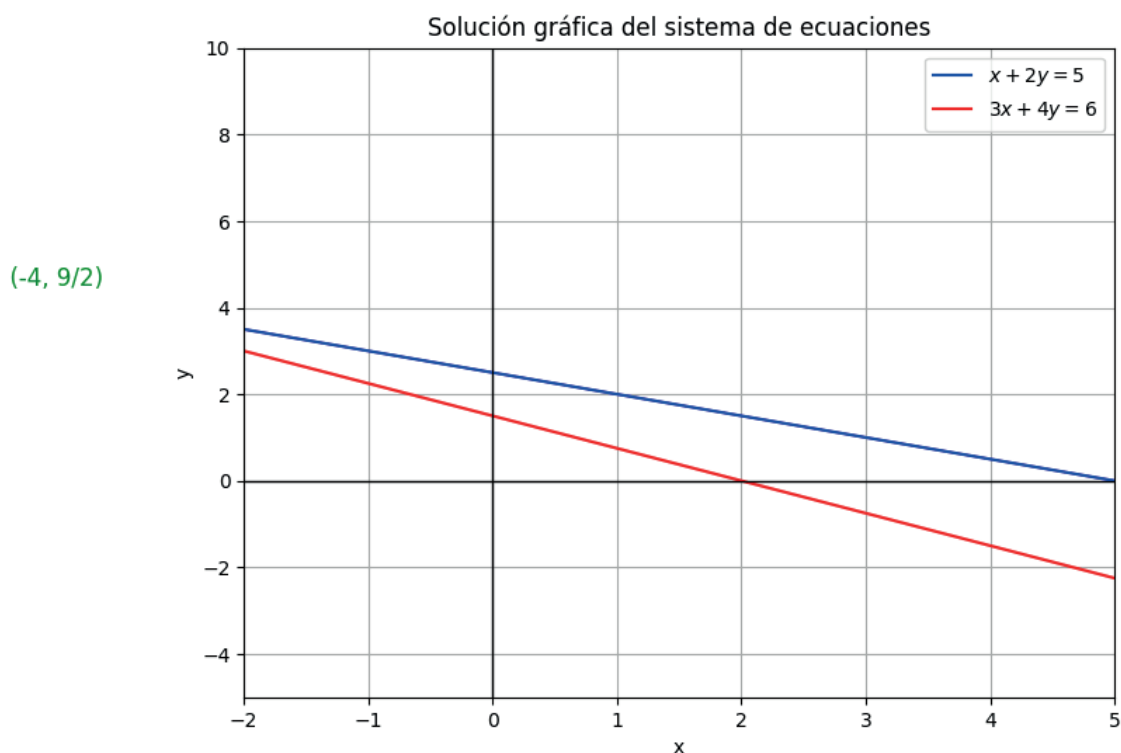


Gráfico 7: Aplicación de Gauss-Jordan

Creación propia.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Para comprender cómo realizar la multiplicación de matrices paso a paso, te invitamos a ver este video educativo sobre el tema.

- **Enlace:** [Video sobre Multiplicación de Matrices](#)

Enlace 2:

http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-74882019000200113

Este artículo explica el uso de matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss-Jordan, una herramienta fundamental en álgebra lineal.

- **Enlace:** Artículo sobre el Método de Gauss-Jordan

Términos Subrayados y Definiciones

- **Matriz Identidad:** Matriz cuadrada cuya diagonal principal está llena de unos y todos los demás elementos son 0. Se utiliza como elemento neutro en la multiplicación de matrices.
- **Matriz Diagonal:** Matriz cuadrada en la que los elementos fuera de la diagonal principal son 0, y los elementos en la diagonal pueden ser números distintos de cero.
- **Operaciones Elementales:** Transformaciones que se realizan en las filas de una matriz, que incluyen el intercambio de filas, la multiplicación de filas por un escalar y la suma de filas.

Referencias

- Smith, J. (2023). *Fundamentals of Matrix Algebra*. Journal of Mathematics, 22(4), 53-67. <https://doi.org/10.1234/jmath.2023.022>.
- Johnson, R. (2023). *Introduction to Linear Algebra*. Mathematical Sciences Publishing.
- Harris, A. (2023). *Linear Algebra for Engineers*. TechBooks Publishing.

Recursos de Profundización

1. Método de Resolución: Matrices y Operaciones Elementales

Descripción del enlace:

Este artículo aborda los conceptos fundamentales sobre matrices y sus operaciones elementales. Se explica detalladamente la definición y las propiedades básicas de las matrices, así como los distintos tipos de matrices como la identidad, diagonal y traspuesta. Además, se cubren las operaciones elementales de filas, como el

intercambio, multiplicación por un escalar y la suma de filas. A través de ejemplos prácticos, se facilita la comprensión de cómo estas operaciones se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1Ef2vTcj5T0yDZAU-rguNoii3Lb6QBDO/view?usp=sharing>

2. Método de Resolución: Matrices y Operaciones Elementales

Descripción del enlace:

Este artículo presenta una serie de ejercicios prácticos para aplicar los conocimientos adquiridos sobre matrices y operaciones elementales. Se incluyen problemas de suma y multiplicación de matrices, así como ejercicios de operaciones elementales como el intercambio de filas, multiplicación por un escalar y suma de filas. Los ejercicios están acompañados de soluciones detalladas para facilitar el aprendizaje y la comprensión de los procesos involucrados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1q8gryPpLBBCSPHa4KIRlZh9I4cYRHmJ/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

