

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Método de Resolución:
Determinantes

Clase 6



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El **método de determinantes** es una herramienta esencial en el estudio de álgebra lineal, ya que no solo facilita la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, sino que también permite encontrar la inversa de matrices y analizar la existencia y unicidad de soluciones en sistemas. Mediante el cálculo de determinantes, podemos determinar si un sistema tiene una solución única, infinita o si no tiene solución en absoluto. Esto es fundamental en una amplia gama de aplicaciones, especialmente en campos como la **física**, la **ingeniería** y la **economía**, donde es crucial conocer la naturaleza de las soluciones de un sistema antes de intentar resolverlo. Además, el determinante proporciona información valiosa sobre propiedades geométricas, como la orientación y el volumen de figuras en espacios multidimensionales. También está estrechamente relacionado con el concepto de **singularidad** de una matriz, es decir, si una matriz es invertible o no, lo cual tiene implicaciones directas en la solución de sistemas lineales. La capacidad de calcular determinantes y entender su interpretación geométrica es clave para abordar problemas más avanzados en álgebra lineal y sus aplicaciones prácticas. Durante la asignatura, se profundizará en la teoría detrás de los determinantes, abordando métodos de cálculo desde las matrices de **2x2** hasta matrices de orden superior. Se estudiarán **propiedades fundamentales** como la **regla de Sarrus** para matrices de 3x3, la **expansión por cofactores** para matrices de mayor orden y la relación de determinantes en productos de matrices. Estos conceptos no solo se exploran de manera teórica, sino que también se aplican a situaciones prácticas, como la resolución de sistemas lineales mediante la **regla de Cramer**. Además, se analizarán otras aplicaciones importantes de los determinantes, como su conexión con el **rango de una matriz** y la **independencia lineal de vectores**. A lo largo del curso, los estudiantes desarrollarán habilidades críticas para calcular determinantes con precisión, interpretarlos correctamente en diferentes contextos y utilizarlos de manera efectiva para resolver problemas complejos. Estas habilidades son fundamentales no solo en álgebra lineal, sino también en otras ramas de las matemáticas aplicadas y en diversas disciplinas científicas, donde los determinantes juegan un papel crucial en la resolución de problemas relacionados con matrices y sistemas de ecuaciones.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
- 2) Analizar los problemas relacionados al Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

Reto # (1)

Clase 5: Método de Resolución: Determinantes

5.1 Cálculo de Determinantes

El **determinante** de una matriz es una función matemática que asigna un número real o complejo a cada matriz cuadrada, y tiene múltiples aplicaciones en álgebra lineal, geometría y otras áreas de las matemáticas. Este valor se utiliza para determinar si un sistema de ecuaciones tiene una solución única, si la matriz tiene inversa, y más. El cálculo de determinantes es una de las herramientas más fundamentales para resolver sistemas lineales.

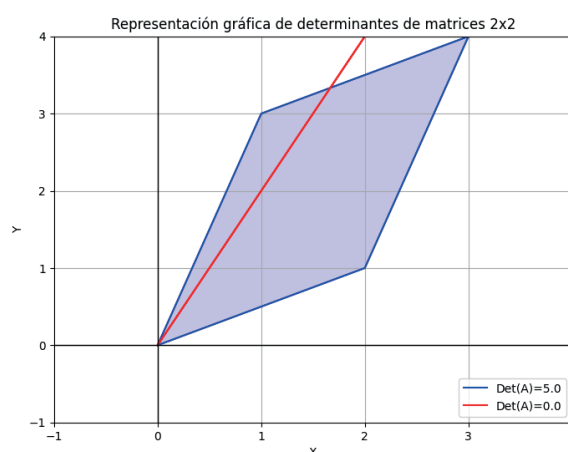


Gráfico 1: Representación visual de Determinantes.

Creación propia.

Determinante de una matriz 2×2 :

Consideremos la matriz A de orden 2×2 como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz se calcula utilizando la fórmula:

$$\det(A) = ad - bc$$

Este es el caso más sencillo de determinante, y se aplica cuando tenemos matrices de tamaño 2×2 . Este determinante tiene la propiedad de que, si el valor es cero, entonces la matriz es **singular**, es decir, no tiene inversa. Si el determinante es diferente de cero, la matriz es **no singular** y tiene inversa.

Determinante de una matriz 3×3 :

Para matrices de mayor orden, como las de 3×3 , el cálculo se realiza de manera más compleja. Un método estándar para calcular el determinante de una matriz 3×3 es el **método de Sarrus**, que solo se aplica a matrices de orden 3.

Consideremos la matriz A de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

El determinante de A se calcula como:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Este método es eficiente para calcular determinantes de matrices 3×3 , pero para matrices de mayor orden, debemos usar un proceso más general conocido como **expansión por menores**.

Expansión por Menores:

Para calcular el determinante de matrices de orden superior (4×4 o mayor), utilizamos la **expansión por menores**. Esto implica seleccionar una fila o columna de la matriz y calcular los determinantes de las submatrices menores formadas al eliminar la fila y la columna que contienen el elemento considerado. El determinante de una matriz $n \times n$

se expresa como una suma de productos entre el elemento de la matriz, su cofactor, y el determinante de la submatriz menor asociada.

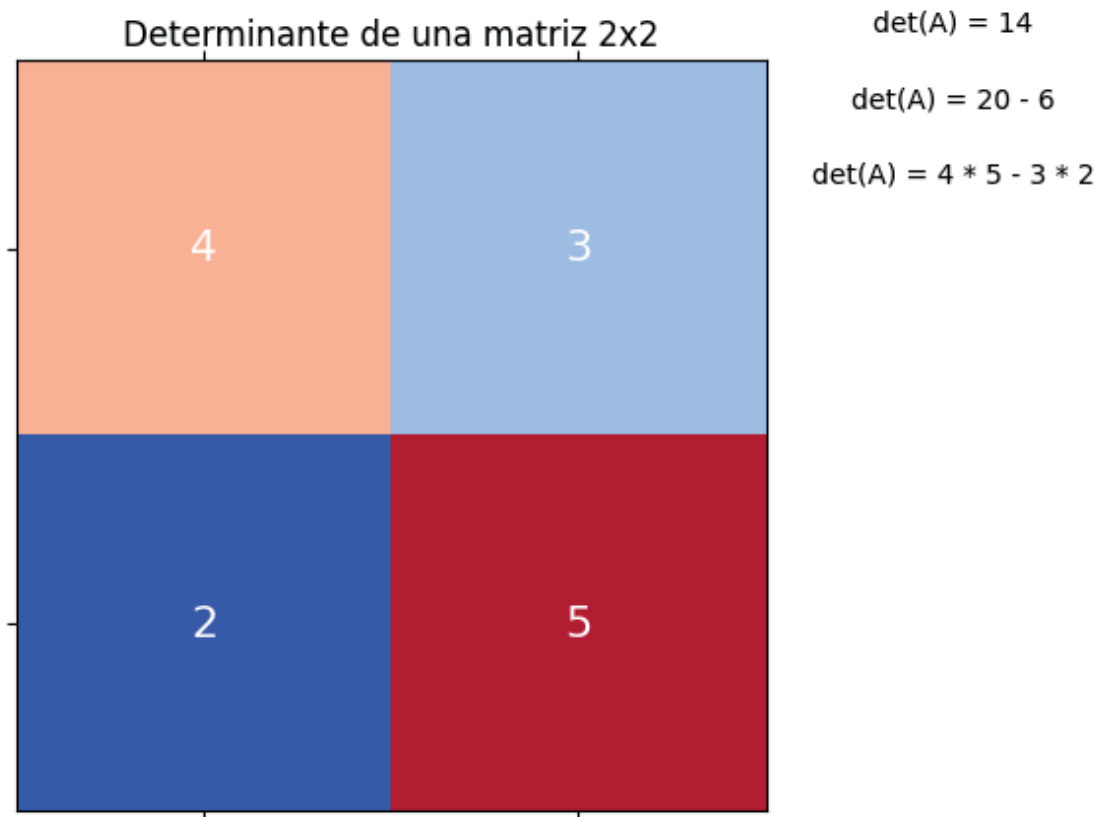


Gráfico 2: Representación visual de una matriz 2×2 , mostrando cómo se organiza y cómo se realiza el cálculo del determinante utilizando la fórmula $\det(A) = ad - bc$.

Creación propia.

5.2 Menores

Los **menores** son determinantes de submatrices obtenidas al eliminar una fila y una columna de la matriz original. Los menores son una parte fundamental del cálculo de determinantes, especialmente cuando se utiliza el proceso de expansión por menores.

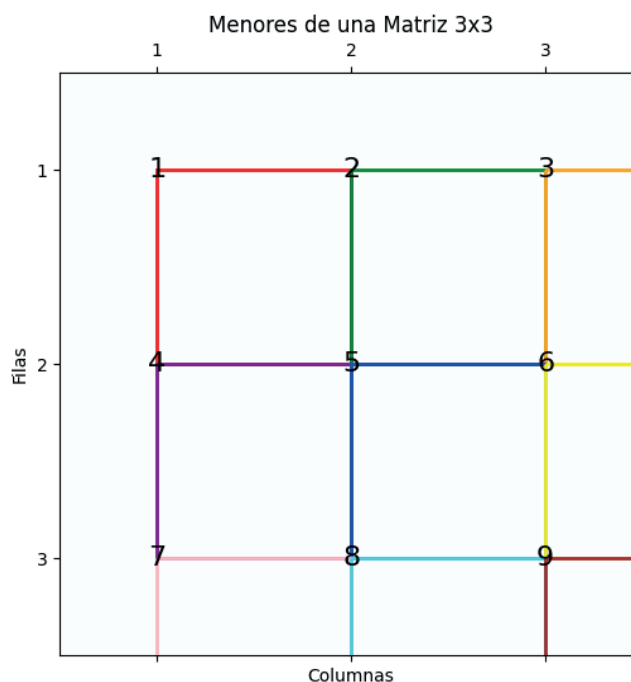


Gráfico 3: Representación gráfica de Menores.

Creación propia.

Los menores son determinantes de submatrices obtenidas al eliminar una fila y una columna de la matriz original. El concepto de menor es fundamental para el cálculo de determinantes, especialmente cuando se utiliza el proceso de expansión por menores. Dado un determinante de una matriz cuadrada, el menor de un elemento a_{ij} se obtiene tomando la submatriz resultante al eliminar la fila i y la columna j de la matriz original. Este menor es el determinante de la submatriz resultante, que tendrá un tamaño reducido en uno con respecto a la matriz original. Los menores son esenciales en la expansión por menores, un método utilizado para calcular determinantes de matrices de orden superior. En la expansión por menores, se descompone el determinante de una matriz en determinantes de submatrices más pequeñas, lo que facilita el cálculo del determinante general.

La expansión por menores se puede realizar a lo largo de cualquier fila o columna de la matriz, aunque, por conveniencia, generalmente se elige una fila o columna que contenga ceros, ya que esto simplifica los cálculos. La técnica consiste en multiplicar el elemento de la matriz por el menor correspondiente a ese elemento, ajustado por un signo alternante que depende de la posición del elemento en la matriz. Este proceso se

repite recursivamente hasta que se llega a determinantes de matrices 2×2 , los cuales son fáciles de calcular.

Por ejemplo, para una matriz de 3×3 , la expansión por menores se puede realizar sobre cualquier fila o columna, y el determinante se calcula sumando y restando productos entre los elementos de esa fila o columna y sus menores correspondientes. Los menores son cruciales en este proceso porque representan los determinantes de las submatrices obtenidas al eliminar una fila y una columna, permitiendo descomponer un determinante grande en otros más pequeños y fáciles de resolver.

Una vez que se ha realizado la expansión por menores, se obtiene el determinante de la matriz original, lo cual es útil en diversos problemas de álgebra lineal, como el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, el cálculo de la inversa de una matriz, y en la teoría de transformaciones lineales. Además, el cálculo de menores y determinantes también tiene aplicaciones en la teoría de espacios vectoriales, el análisis de autovalores y autovectores, y en la resolución de problemas en física e ingeniería, entre otros.

Los menores también son importantes cuando se trata de la **inversa de una matriz**. En este contexto, los menores son utilizados para calcular los cofactores, que luego se emplean en la fórmula de la matriz adjunta para obtener la inversa de la matriz original. Esta técnica es fundamental en muchos campos, ya que permite resolver sistemas de ecuaciones lineales y analizar las propiedades geométricas de las transformaciones lineales. Además, en situaciones donde es necesario determinar la singularidad de una matriz (es decir, si tiene una inversa o no), los menores juegan un papel crucial. Si el determinante de la matriz es cero, significa que la matriz es singular y no tiene inversa.

Cálculo de Menores:

Dada una matriz A de orden n , el menor asociado con un elemento a_{ij} se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz. El determinante de la submatriz resultante es el menor correspondiente a ese elemento.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente matriz 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

El menor M_{11} asociado al elemento a se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna, dejando la submatriz:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$$

El determinante de esta submatriz es:

$$M_{11} = ei - fh$$

Este proceso de cálculo de menores se repite para cada elemento de la matriz cuando se usa la expansión por menores. Los menores permiten determinar los cofactores, que son cruciales para encontrar la matriz adjunta y, eventualmente, la inversa de una matriz.

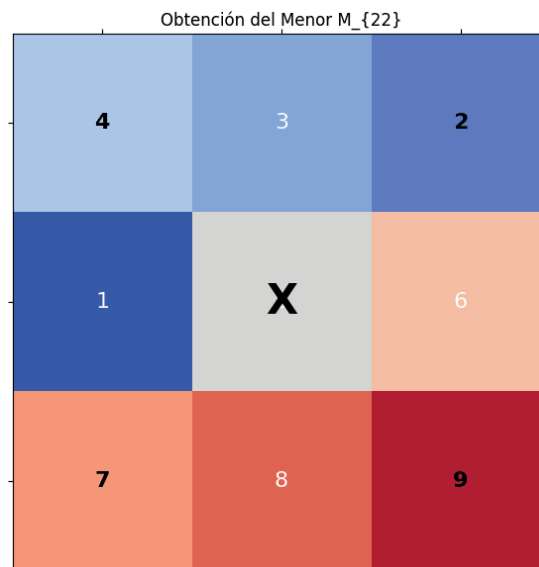


Gráfico 4: Visualización de una matriz de 3×3 y cómo se obtiene el menor al eliminar una fila y una columna específicas de la matriz.

Creación propia.

5.3 Cofactores

El **cofactor** de un elemento a_{ij} de una matriz es el producto de su menor M_{ij} y un factor de signo $(-1)^{i+j}$, donde i es el índice de la fila y j es el índice de la columna del elemento. El cofactor se utiliza para calcular la **matriz adjunta** de una matriz, que es fundamental para hallar la inversa de una matriz.

Fórmula del Cofactor:

El cofactor C_{ij} de un elemento a_{ij} se calcula como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Este factor de signo alternado $((-1)^{i+j})$ se utiliza para garantizar que el signo de los cofactores se alterne de manera apropiada al realizar la expansión por menores.

Por ejemplo, para la matriz 3×3 mencionada previamente, el cofactor de a sería:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = ei - fh$$

Los cofactores se utilizan para construir la matriz adjunta, que es la transposición de la matriz de cofactores. Esta matriz adjunta es esencial para calcular la inversa de la matriz original.

Cálculo de los Cofactores de una Matriz 3x3

4	3	2
1	5	6
7	8	9

Cofactor de a_{31}

Cofactor de a_{32}

Cofactor de a_{33}

Cofactor de a_{11}

Cofactor de a_{21}

Cofactor de a_{22}

Cofactor de a_{23}

Cofactor de a_{13}

(eliminando fila 1, columna 1)

(eliminando fila 1, columna 2)

(eliminando fila 1, columna 3)

Gráfico 5: Ilustración de cómo se calculan los cofactores para los elementos de una matriz 3×3 .

Creación propia.

5.4 Regla de Cramer

La **Regla de Cramer** es un método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se basa en el cálculo de determinantes y es útil cuando se tiene un sistema cuadrado (el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas).

Cómo Funciona la Regla de Cramer:

Para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$AX = B$$

donde A es la matriz de coeficientes, X es el vector de incógnitas y B es el vector de términos independientes, la solución se obtiene de la siguiente manera:

1. Se calcula el determinante de la matriz A , es decir, $\det(A)$.
2. Para cada incógnita x_i , se construye una nueva matriz A_i reemplazando la columna i de la matriz A con el vector B .
3. El valor de la incógnita x_i se calcula como:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Este proceso puede aplicarse a sistemas de cualquier tamaño, pero solo es efectivo cuando $\det(A) \neq 0$, lo que garantiza que el sistema tiene una solución única.

Aplicación de la Regla de Cramer

2	3	5
4	-1	6

Reemplazo de columnas para Cramer

Gráfico 6: Representación visual de cómo aplicar la Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales, mostrando la matriz de coeficientes y cómo se reemplazan las columnas con los términos independientes.

Creación propia.

5.5 Aplicación en la Solución de Sistemas Lineales

Los determinantes tienen una aplicación fundamental en la resolución de sistemas lineales, especialmente cuando se trata de determinar si un sistema tiene una solución única. Si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, el sistema es **singular** y no tiene solución única. Si el determinante es distinto de cero, el sistema es **no singular** y tiene una solución única.

Uso de la Matriz Inversa:

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones lineales es mediante el uso de la **matriz inversa**. Si la matriz de coeficientes A tiene una inversa, entonces la solución al sistema se puede obtener de manera rápida utilizando la siguiente fórmula:

$$X = A^{-1}B$$

En este caso, A^{-1} es la matriz inversa de A , y se puede calcular mediante la adjunta y el determinante de A , siempre que el determinante no sea cero.

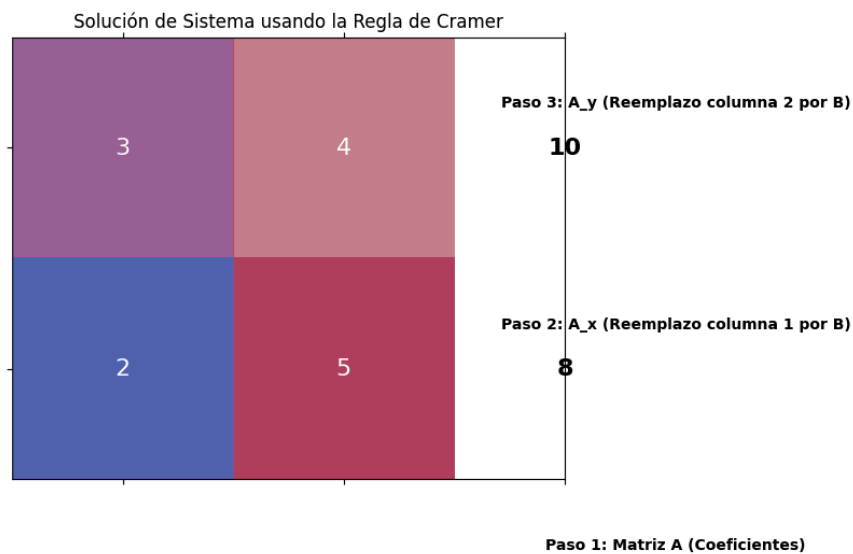


Gráfico 7: Diagrama que muestra la solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes y la Regla de Cramer, visualizando el proceso paso a paso.

Creación propia.

Ejemplo de Aplicación:

Consideremos el sistema:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x - y = 6$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$\det(A) = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14$$

Como el determinante no es cero, el sistema tiene una solución única. Se puede resolver utilizando la matriz inversa de A , o mediante la **Regla de Cramer**.

5.6 Ejercicios Resueltos

Para ilustrar cómo se aplican los determinantes en la resolución de sistemas lineales, veamos un ejercicio resuelto:

Ejemplo 1:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando la Regla de Cramer:

$$3x + 4y = 10$$

$$2x - y = 1$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es:

$$\det(A) = (3)(-1) - (4)(2) = -3 - 8 = -11$$

Ahora calculamos los determinantes de las matrices A_x y A_y :

$$A_x = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_x) = (10)(-1) - (4)(1) = -10 - 4 = -14$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_y) = (3)(1) - (10)(2) = 3 - 20 = -17$$

Aplicamos la **Regla de Cramer** para obtener las soluciones de x y y :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-14}{-11} = \frac{14}{11}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-17}{-11} = \frac{17}{11}$$

La solución del sistema es $x = \frac{14}{11}$, $y = \frac{17}{11}$.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Para comprender cómo realizar la multiplicación de matrices paso a paso, te invitamos a ver este video educativo sobre el tema.

- Enlace: [Video sobre Multiplicación de Matrices](#)

Enlace 2:

Este artículo explica el uso de matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss-Jordan, una herramienta fundamental en álgebra lineal.

- Enlace: [Artículo sobre el Método de Gauss-Jordan](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Determinante

Definición: Valor numérico que se calcula a partir de una matriz y que es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones lineales, calcular la inversa de una matriz y otras operaciones algebraicas.

Matriz Adjunta

Definición: Matriz formada por los cofactores de una matriz original, transpuesta. Es útil en el cálculo de la inversa de una matriz.

Referencias

- Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4ª ed.). Pearson Educación.
 - Anton, H. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (9ª ed.). Wiley.
 - Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5ª ed.). Wellesley-Cambridge Press.
 - Stewart, J. (2015). *Cálculo de múltiples variables* (8ª ed.). Cengage Learning.
 - Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones* (6ª ed.). Cengage Learning.
-

Recursos de Profundización

1. Método de Resolución: Matrices y Operaciones Elementales - Teoría

Descripción del enlace:

Este artículo aborda los conceptos fundamentales sobre matrices y sus operaciones elementales. Se explica detalladamente la definición y las propiedades básicas de las matrices, así como los distintos tipos de matrices como la identidad, diagonal y traspuesta. Además, se cubren las operaciones elementales de filas, como el intercambio, multiplicación por un escalar y la suma de filas. A través de ejemplos prácticos, se facilita la comprensión de cómo estas operaciones se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/ncq8uw5s>

2. Método de Resolución: Matrices y Operaciones Elementales - Ejercicios

Descripción del enlace:

Este artículo presenta una serie de ejercicios prácticos para aplicar los conocimientos adquiridos sobre matrices y operaciones elementales. Se incluyen problemas de suma y multiplicación de matrices, así como ejercicios de operaciones elementales como el intercambio de filas, multiplicación por un escalar y suma de filas. Los ejercicios están acompañados de soluciones detalladas para facilitar el aprendizaje y la comprensión de los procesos involucrados en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/ncq8uw5s>



La excelencia no se improvisa

síguenos

