

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Introducción a las Transformaciones Lineales

Clase 7



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Las **transformaciones lineales** son una de las herramientas fundamentales del álgebra lineal que tienen amplias aplicaciones en diversos campos de las matemáticas y la ingeniería. Estas transformaciones son funciones que mapean vectores de un espacio vectorial a otro espacio vectorial, respetando dos propiedades esenciales: la **preservación de la suma de vectores** y la **preservación de la multiplicación por un escalar**. En términos más simples, una transformación lineal toma un vector de entrada y lo convierte en un nuevo vector, pero de manera que se mantienen ciertas relaciones algebraicas, lo cual resulta en una estructura matemática muy poderosa y versátil. Las transformaciones lineales pueden ser representadas de forma compacta mediante matrices, lo que las convierte en una herramienta extremadamente útil en la resolución de problemas complejos en distintas áreas.

El estudio de las transformaciones lineales se extiende a varios conceptos fundamentales, como los **espacios propios**, los **autovalores** y los **autovectores**, los cuales son esenciales para entender el comportamiento y las propiedades de una transformación. A través de estos conceptos, se pueden realizar análisis avanzados en sistemas dinámicos, procesos de optimización, y en áreas como la física, la ingeniería y la informática. En ingeniería, las transformaciones lineales se utilizan en el modelado de sistemas, la simulación de comportamientos físicos, y en el análisis de redes de comunicación, donde las transformaciones permiten representar cambios en las variables de un sistema bajo distintas condiciones. A lo largo del curso, exploraremos cómo identificar, calcular y aplicar transformaciones lineales, y cómo estas interacciones permiten resolver problemas prácticos y modelar fenómenos del mundo real.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Álgebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

Reto # (2)

Clase 7: Introducción a las Transformaciones Lineales

Las **transformaciones lineales** son un concepto fundamental dentro del álgebra lineal y tienen aplicaciones en diversas ramas de la matemática, la física y la ingeniería. Se utilizan para modelar cómo los vectores en un espacio pueden ser transformados, escalados, rotados o reflejados bajo ciertas condiciones. Comprender las transformaciones lineales permite no solo trabajar con matrices y vectores, sino también resolver problemas complejos en áreas como la computación gráfica, la teoría de redes y la optimización.

7.1. Definiciones y Ejemplos Básicos

Una **transformación lineal** es una función que mapea vectores de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W , cumpliendo dos propiedades fundamentales:

1. **Adición de vectores:** La transformación de la suma de dos vectores debe ser igual a la suma de las transformaciones de los vectores.

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

2. **Escalar un vector:** La transformación de un vector escalado debe ser igual al escalar multiplicado por la transformación del vector.

$$T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$$

Estas propiedades aseguran que las transformaciones lineales respeten la estructura algebraica del espacio vectorial.

Ejemplo básico:

Consideremos la transformación lineal T en R^2 definida por:

$$T(x, y) = (2x, 3y)$$

Esta transformación toma el vector (x, y) y lo transforma en un nuevo vector $(2x, 3y)$. Como puedes observar, la transformación escala el componente x por 2 y el componente y por 3.

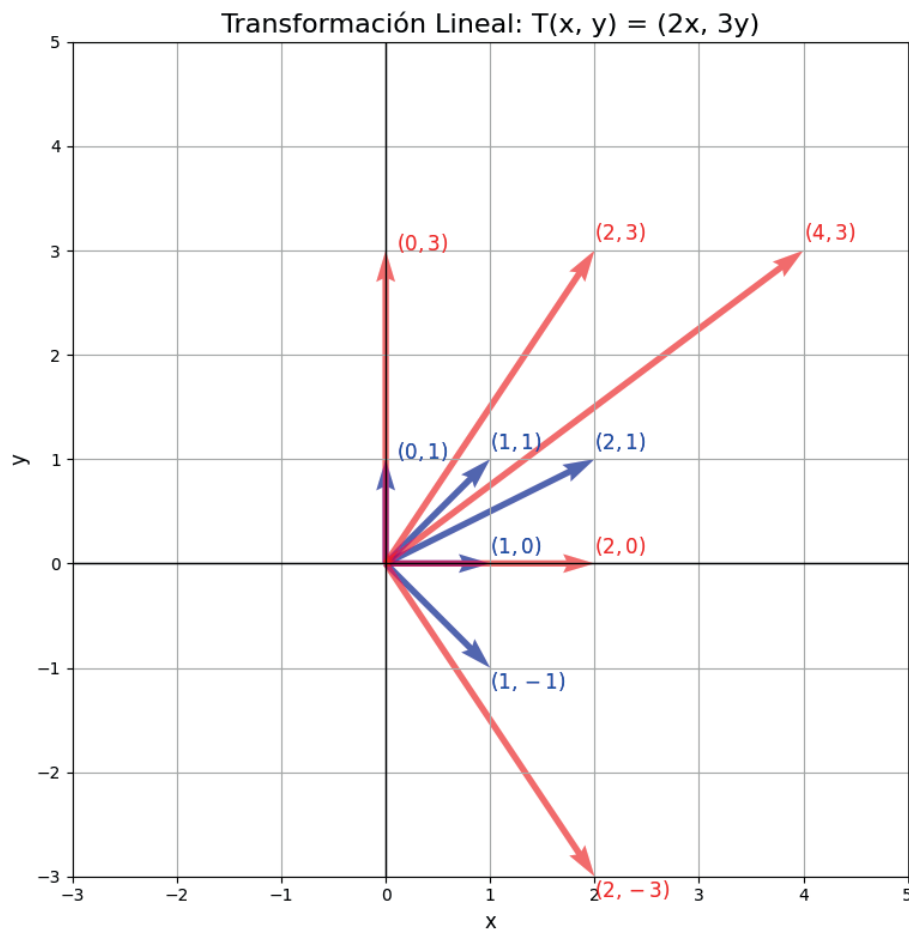


Gráfico 1: Representación gráfica de una transformación lineal $T(x, y) = (2x, 3y)$ en R^2 , donde los vectores originales son escalados de manera independiente.

Creación propia.

7.2. Transformaciones en R^2

Las transformaciones en R^2 son de especial interés porque se utilizan frecuentemente para describir transformaciones geométricas, como rotaciones, escalados y reflejos.

Un ejemplo común de transformación lineal en R^2 es la **matriz de transformación**. Cualquier transformación lineal en R^2 puede representarse mediante una matriz de 2×2 . Si tenemos una transformación lineal T , y un vector $v = (xy)$, entonces la transformación se puede expresar como:

$$T(xy) = A \cdot (xy)$$

donde A es la matriz asociada a la transformación.

Por ejemplo, una **rotación** en R^2 se puede describir con la siguiente matriz de rotación:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Esta matriz rota cualquier vector en el plano por un ángulo θ .

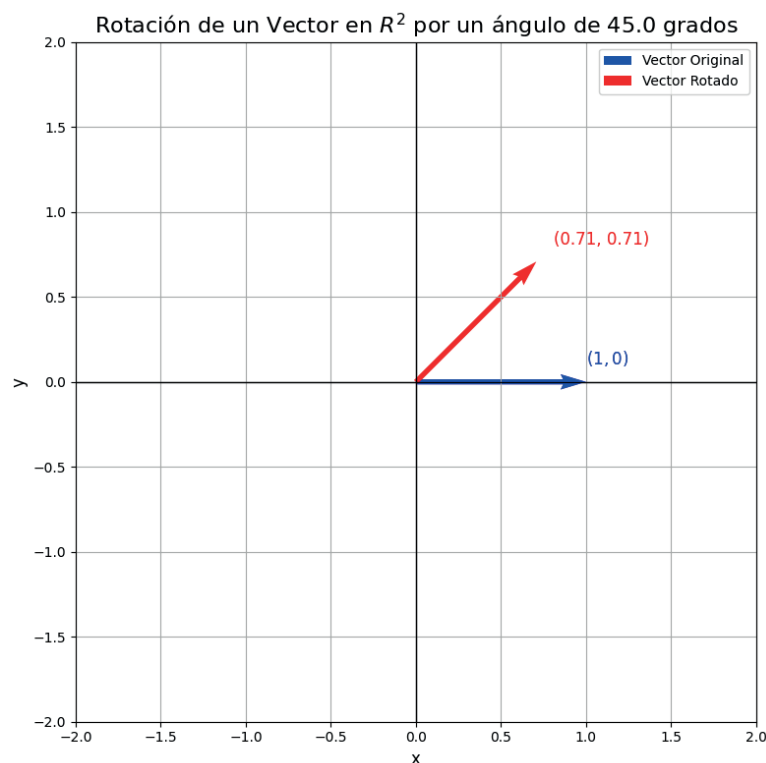


Gráfico 2: Representación gráfica de una rotación en R^2 usando una matriz de transformación, mostrando cómo un vector se mueve a través del espacio.

Creación propia.

7.3. Transformaciones en R^3

Las transformaciones lineales en R^3 siguen un principio similar al de R^2 , pero con más dimensiones. En R^3 , las transformaciones pueden involucrar rotaciones, escalados y reflexiones, pero también pueden incluir otras transformaciones más complejas, como distorsiones no uniformes y compresiones.

Un ejemplo típico es la **rotación** en R^3 . En lugar de una matriz 2×2 , ahora utilizamos matrices de 3×3 . Por ejemplo, la rotación de un vector alrededor del eje z por un ángulo θ está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al igual que en R^2 , podemos aplicar esta matriz de transformación a cualquier vector

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en el espacio tridimensional.

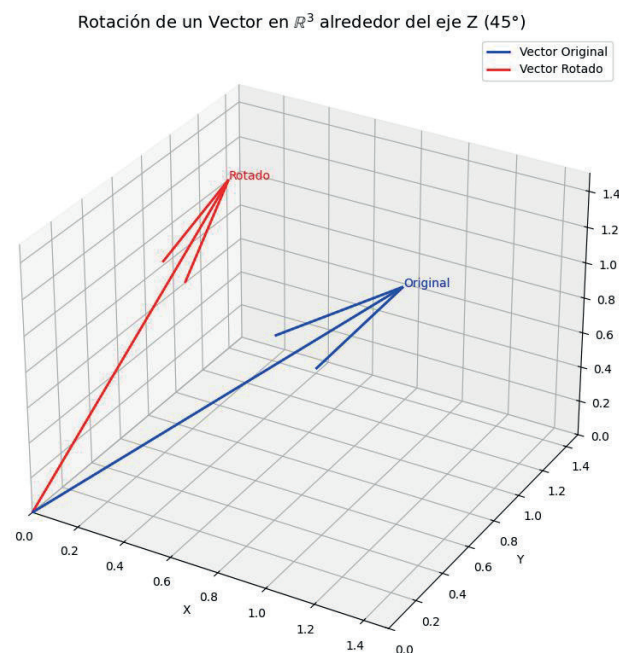


Gráfico 3: Ejemplo gráfico de una rotación de un vector en R^3 alrededor del eje z , mostrando cómo cambia la orientación del vector en el espacio tridimensional.

Creación propia.

7.4. Propiedades de las Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales tienen varias propiedades importantes que definen cómo se comportan cuando interactúan con los vectores. Algunas de las propiedades más relevantes incluyen:

- **Cero vector:** Cualquier transformación lineal mapea el **vector cero** a sí mismo, es decir, $T(0) = 0$.
- **Preservación de la suma de vectores:** Como mencionamos antes, una transformación lineal preserva la adición de vectores, lo que significa que:

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

- **Preservación de la multiplicación por escalar:** La transformación también preserva la multiplicación por escalares:

$$T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$$

Estas propiedades permiten que las transformaciones lineales mantengan la estructura algebraica de los espacios vectoriales.

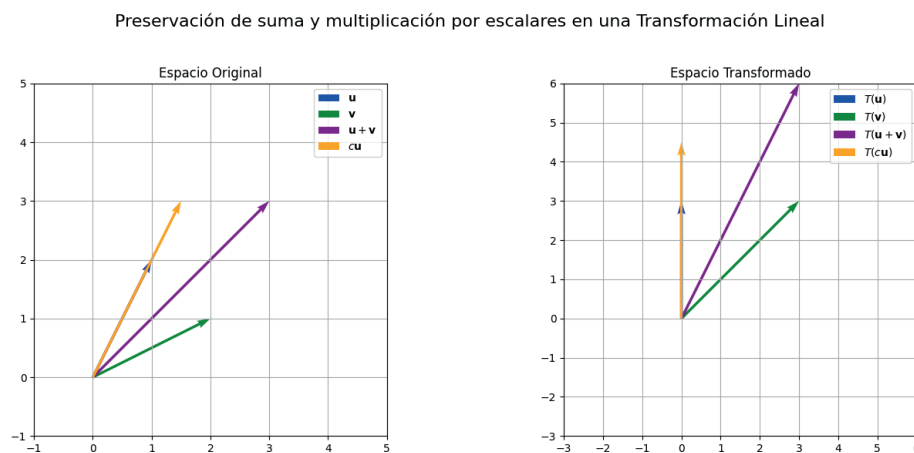


Gráfico 4: Ilustración de cómo una transformación lineal preserva las propiedades de la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Creación propia.

7.5. Linealidad

Una transformación T es **lineal** si cumple las dos propiedades mencionadas: adición de vectores y multiplicación por escalares. La linealidad es una propiedad central de las transformaciones lineales, ya que garantiza que las transformaciones no alteren la estructura del espacio vectorial en términos de sus operaciones fundamentales.

Por ejemplo, si tenemos una transformación T definida en $\mathbb{R}^2$ y los vectores u y v son lineales, entonces:

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

La **linealidad** permite que las transformaciones sean predecibles y que se puedan aplicar herramientas algebraicas eficientes para su análisis.

7.6. Inyectividad

Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se dice que es **inyectiva** si diferentes vectores de V son mapeados a diferentes vectores en W . Es decir, si $T(v_1) = T(v_2)$, entonces necesariamente $v_1 = v_2$.

En términos más simples, una transformación inyectiva es aquella que no “colapsa” dos vectores distintos en un solo vector. Si una transformación es inyectiva, cada vector de V tiene una imagen única en W .

Ejemplo de Transformación Inyectiva: Vectores distintos en $V \rightarrow$ Vectores distintos en W

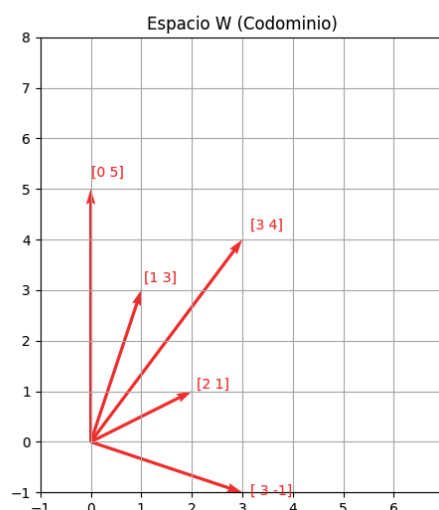


Gráfico 5: Ejemplo de una transformación inyectiva, donde vectores distintos en V se mapean a puntos distintos en W .

Creación propia.

7.7. Sobreyectividad

Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es **sobreyectiva** si para cada vector en W , existe al menos un vector en V que se mapea a él. Es decir, el rango de la transformación es todo el espacio W , lo que significa que **cada punto de W** tiene una preimagen en V .

En términos simples, una transformación sobreyectiva cubre todo el espacio W con las imágenes de vectores de V . Esto es útil cuando necesitamos que una transformación cubra completamente un espacio objetivo.

Ejemplo de Transformación Sobreyectiva: Cada vector en W tiene al menos una preimagen en V

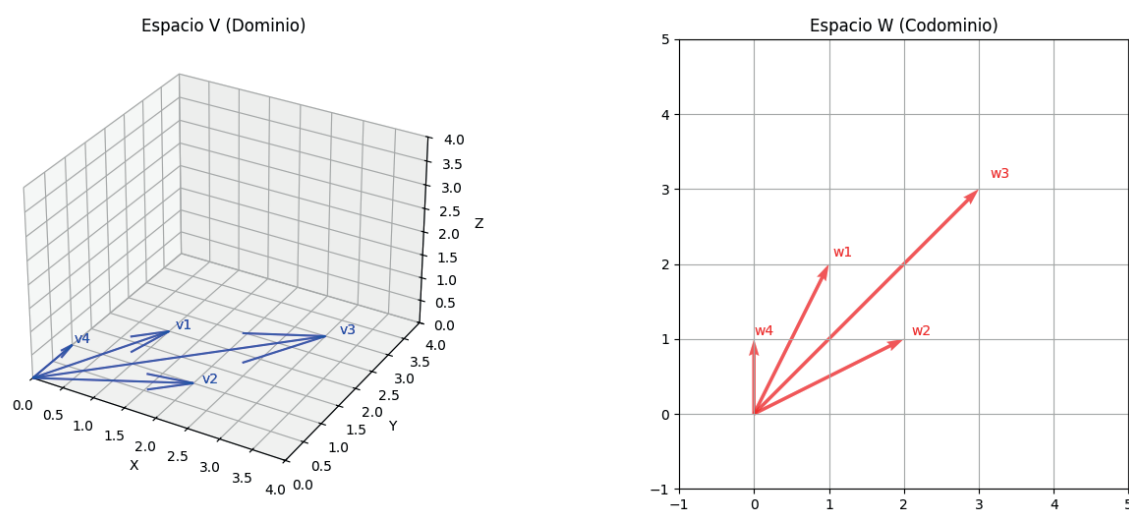


Gráfico 6: Ejemplo de una transformación sobreyectiva en la que todos los vectores en W tienen una preimagen correspondiente en V .

Creación propia.

Una **transformación lineal** $T: V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales V y W se dice **sobreyectiva** si para cada vector en W , existe al menos un vector en V que se mapea a

él. En otras palabras, la transformación cubre todo el espacio W , lo que implica que el **rango** de la transformación es igual a W . Formalmente, el rango de T es el conjunto de todas las imágenes de los vectores de V bajo T , y cuando el rango es igual al espacio W , decimos que la transformación es sobreyectiva.

En términos más intuitivos, una transformación sobreyectiva es aquella en la que no hay ningún elemento del espacio W que quede "fuera del alcance" de T . Es decir, **cada punto de W tiene al menos una preimagen en V** , lo que garantiza que el mapeo cubre completamente W . Esto contrasta con una transformación **no sobreyectiva**, donde algunos elementos de W podrían no ser alcanzados por ninguna imagen de V , es decir, algunas partes de W quedarían "vacías" o fuera del alcance de la transformación.

Propiedades y consecuencias de las transformaciones sobreyectivas

1. **Rango y dimensión:** Si T es sobreyectiva, entonces el **rango de T** es todo el espacio W . En términos de dimensiones, esto implica que la dimensión de la imagen de T , denotada como $\dim(\text{Im}(T))$, es igual a la dimensión de W , es decir, $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$. Esto nos da información importante sobre las propiedades del espacio objetivo W y sobre cómo la transformación mapea los elementos de V a W .
2. **Teorema de la dimensión:** Una de las propiedades más importantes de las transformaciones lineales es el **teorema de la dimensión**, que establece que para una transformación lineal $T: V \rightarrow W$, la relación entre las dimensiones de los espacios involucrados cumple con la siguiente ecuación:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)),$$

donde $\text{Ker}(T)$ es el núcleo de T (el conjunto de vectores de V que se mapean al vector cero en W), y $\text{Im}(T)$ es la imagen de T (el rango de T). Si T es sobreyectiva, entonces $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$, lo que implica que la dimensión del espacio V está relacionada con la dimensión del núcleo de T y el espacio W .

3. **Relación con la inyectividad:** Una transformación sobreyectiva no necesariamente es **inyectiva**. Mientras que la sobreyectividad garantiza que cada elemento de W tiene al menos una preimagen en V , la inyectividad

requiere que cada vector en V se mapee a un único vector en W , es decir, que no haya dos vectores distintos en V que se mapeen al mismo vector en W . Aunque las transformaciones inyectivas y sobreyectivas pueden ocurrir de forma independiente, si una transformación es **bijectiva** (es decir, es tanto inyectiva como sobreyectiva), entonces se establece una correspondencia uno a uno entre los elementos de V y W .

4. **Ejemplo de transformaciones sobreyectivas:** Consideremos el caso de un espacio $V = \mathbb{R}^2$ y el espacio $W = \mathbb{R}^3$. Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, para que T sea sobreyectiva, cada vector en $\mathbb{R}^3$ debe ser la imagen de al menos un vector de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, dado que $V = \mathbb{R}^2$ tiene una dimensión menor que $W = \mathbb{R}^3$, **no puede haber una transformación lineal sobreyectiva** en este caso, ya que no hay suficientes "direcciones" en $\mathbb{R}^2$ para cubrir todo $\mathbb{R}^3$. Por el contrario, si tenemos $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}^3$, es posible una transformación lineal sobreyectiva (e incluso biyectiva si también es inyectiva).
5. **Aplicaciones de las transformaciones sobreyectivas:** Las transformaciones lineales sobreyectivas tienen aplicaciones prácticas en muchos campos. En **ciencias de la computación**, por ejemplo, la sobreyectividad es importante en algoritmos de **optimización**, donde se busca que todos los posibles resultados sean cubiertos por las soluciones disponibles. En **física**, las transformaciones sobreyectivas pueden modelar sistemas donde se requiere que todos los posibles estados de un sistema físico estén representados por las imágenes de las transformaciones. En **teoría de redes**, las transformaciones sobreyectivas pueden modelar sistemas donde cada nodo o estado debe tener al menos un predecesor.

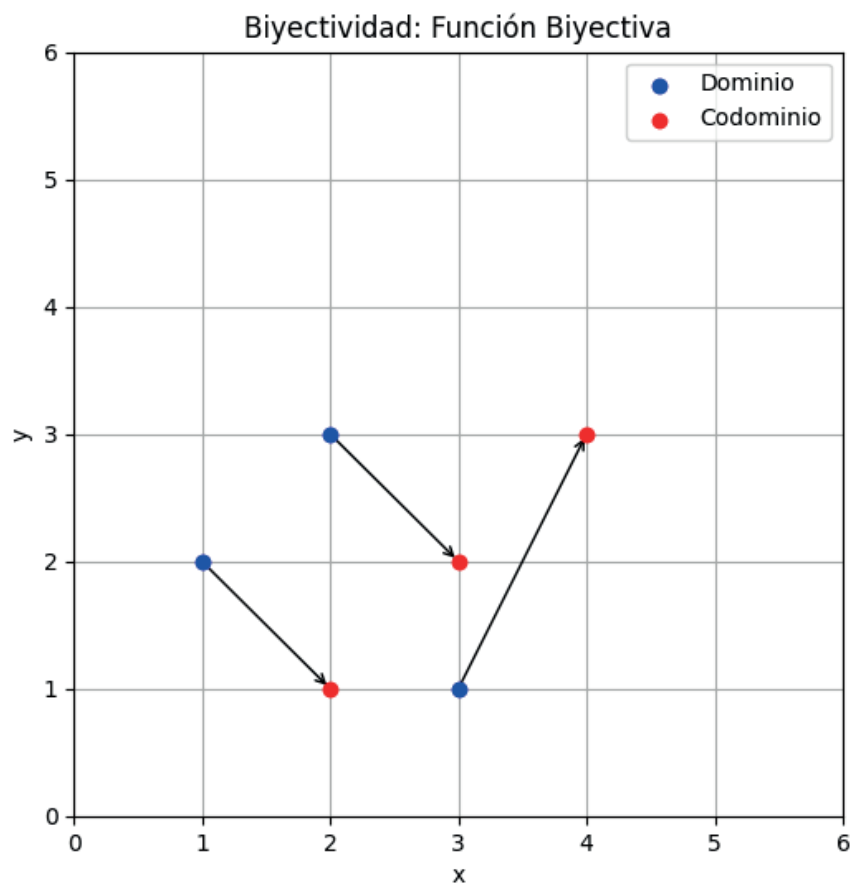


Gráfico 7: Ejemplo de Biyectividad

Creación propia.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Este video explica de manera sencilla cómo se realizan transformaciones lineales en R^2 y R^3 , utilizando ejemplos gráficos para visualizar el impacto de la transformación sobre los vectores.

- **Enlace:** [Video sobre Transformaciones Lineales en Espacios \$R^2\$ y \$R^3\$](#)

Enlace 2:

Este artículo académico explora las propiedades algebraicas de las transformaciones lineales, incluyendo ejemplos avanzados y aplicaciones en geometría y física.

- **Enlace:** [Artículo sobre Propiedades de las Transformaciones Lineales](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Transformación lineal: Función que mapea vectores de un espacio vectorial a otro espacio vectorial, preservando la adición de vectores y la multiplicación por escalares.

Inyectividad: Propiedad de una transformación lineal donde vectores distintos se mapean a vectores distintos en el espacio de llegada.

Referencias

- Friedberg, S. H., Insel, A., & Spence, L. E. (2019). *Álgebra lineal* (4ª ed.). Pearson Educación.
 - Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
 - Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5ª ed.). Wellesley-Cambridge Press.
 - Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4ª ed.). Pearson.
 - Kolman, B., & Hill, D. R. (2005). *Álgebra lineal con aplicaciones* (6ª ed.). Pearson.
-

Recursos de Profundización

1. Introducción a las Transformaciones Lineales — Parte 1: Definiciones y Transformaciones en $\mathbb{R}^2$

Descripción del enlace:

Este artículo presenta una introducción detallada a las transformaciones lineales, comenzando con sus definiciones formales y propiedades básicas. Se incluyen ejemplos clásicos que ilustran el concepto de linealidad, y se exploran las transformaciones lineales en el espacio R^2 , mostrando cómo se representan mediante matrices 2×2 . Se incluyen ejemplos de rotaciones y proyecciones que facilitan la comprensión visual y algebraica de estas transformaciones.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1VCTSq9iRnFQfw4GuvDt06jtQvG5HkX5n/view?usp=sharing>

2. Introducción a las Transformaciones Lineales — Parte 2: Transformaciones en R^3 y Propiedades Básicas

Descripción del enlace:

En este segundo artículo, se amplía el estudio de las transformaciones lineales al espacio tridimensional R^3 , explicando su representación matricial con matrices 3×3 . Se presentan ejemplos concretos como rotaciones alrededor de ejes y proyecciones ortogonales. Además, se analizan propiedades fundamentales de las transformaciones lineales, tales como la preservación del vector cero, la composición y la invertibilidad, consolidando el marco teórico necesario para el análisis avanzado de estas transformaciones.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/10i1dOHjHi3P6CkxBmJuS5_5P3f_LmZm/view?usp=sharing

3. Introducción a las Transformaciones Lineales — Parte 3: Linealidad, Injectividad y Sobrejectividad

Descripción del enlace:

Este tercer artículo profundiza en conceptos clave para entender el comportamiento de las transformaciones lineales: la linealidad como propiedad esencial, la inyectividad (cuando una transformación es uno a uno) y la sobreyectividad (cuando es sobre todo el espacio). Se incluyen definiciones formales, ejemplos ilustrativos y un teorema fundamental que relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen de la transformación. Estos conceptos son fundamentales para aplicaciones en álgebra lineal y áreas afines.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1GYDRYrvnB4vbz5nhkJMp5kFqcuHhQv9/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

