

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Matrices como Transformaciones Lineales

Clase 8



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE (2 párrafos)

Las matrices son una representación fundamental de las **transformaciones lineales** entre espacios vectoriales de dimensión finita, ya que permiten expresar de manera concreta y computable estas funciones que transforman vectores manteniendo la estructura algebraica. Cada matriz actúa sobre un vector mediante multiplicación, produciendo otro vector en el espacio de llegada, y de esta forma, se simplifican procesos abstractos en álgebra lineal a operaciones de suma y producto de números organizados en filas y columnas. Esta relación directa entre matrices y transformaciones lineales facilita el análisis, la visualización y la aplicación de conceptos teóricos en contextos prácticos, ya sea para resolver sistemas de ecuaciones, realizar cambios de base, o modelar fenómenos físicos y tecnológicos.

El estudio de matrices como transformaciones lineales no solo permite calcular imágenes y núcleos, que corresponden respectivamente a los conjuntos de vectores transformados y a los vectores que se anulan, sino que también da acceso a propiedades importantes como el rango, la invertibilidad y la diagonalización. La composición de transformaciones, entendida como la aplicación sucesiva de funciones lineales, se refleja en la multiplicación de matrices, lo que hace posible combinar y analizar sistemas complejos con estructuras más sencillas. Este enfoque resulta esencial en múltiples disciplinas de la ingeniería y la ciencia, donde la representación matricial de transformaciones es utilizada para manipular datos, modelar sistemas dinámicos, optimizar procesos y diseñar algoritmos que impactan desde el procesamiento de señales hasta la robótica y la inteligencia artificial.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
 - 2) Analizar los problemas relacionados al Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.
-

Clase 8: Matrices como Transformaciones Lineales

Las matrices son una herramienta fundamental para representar transformaciones lineales en álgebra lineal. La comprensión profunda de cómo las matrices actúan como operadores que transforman vectores en espacios vectoriales es esencial en diversas disciplinas como la ingeniería, la física, la informática, y más. En este tema, exploraremos la representación matricial de transformaciones lineales, tipos específicos de transformaciones, la composición de transformaciones y cómo se manifiestan múltiples transformaciones aplicadas en secuencia.

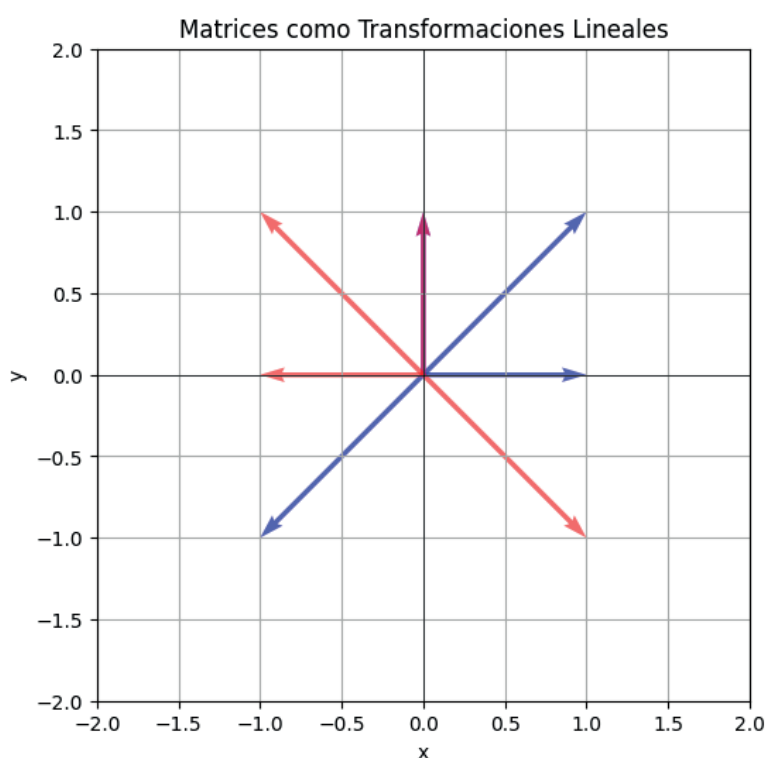


Gráfico 1: Representación visual de Transformaciones Lineales

Creación propia.

Una transformación lineal se puede ver como un operador que mapea vectores de un espacio a otro. Al representar estas transformaciones por medio de matrices, los cálculos que involucran estas transformaciones se simplifican considerablemente. Esta forma de representación es esencial en áreas como la ingeniería, la física, la informática

y muchas más, donde las transformaciones entre diferentes sistemas de coordenadas o entre distintas representaciones de datos son comunes.

Existen varios tipos específicos de transformaciones lineales que se pueden clasificar según sus propiedades. Por ejemplo, una transformación inyectiva es aquella en la que vectores diferentes del espacio de partida se mapean a vectores diferentes en el espacio de llegada. En términos de matrices, esto sucede cuando la matriz asociada a la transformación tiene rango completo, es decir, cubre completamente el espacio de llegada. Por otro lado, una transformación sobreyectiva cubre todo el espacio de llegada, lo que implica que cada punto en el espacio de llegada tiene al menos un vector del espacio de partida que se mapea a él. Si una transformación es tanto inyectiva como sobreyectiva, se dice que es biyectiva, lo que significa que existe una correspondencia uno a uno entre los vectores de los dos espacios. Las transformaciones biyectivas son importantes porque tienen una matriz inversible, lo que permite revertir la transformación.

Cuando se aplican varias transformaciones lineales en secuencia, estas se pueden combinar mediante la multiplicación de matrices. Si tenemos varias transformaciones, cada una representada por una matriz, la transformación resultante de aplicar todas ellas es simplemente el producto de las matrices correspondientes. Este proceso es crucial en muchos campos donde se necesitan aplicar múltiples transformaciones en secuencia, como en la gráfica por computadora, donde se aplican transformaciones sucesivas de traslación, rotación y escalado a los objetos 3D. Al multiplicar las matrices correspondientes, se obtiene una matriz compuesta que realiza todas estas transformaciones en una sola operación.

La composición de transformaciones lineales es una propiedad importante que permite simplificar el análisis de sistemas complejos. A través de la multiplicación de matrices, podemos estudiar cómo una serie de transformaciones actúa sobre un vector, y de esta manera, entender cómo se combinan los efectos geométricos o algebraicos de estas transformaciones. En muchos casos, la propiedad de la asociatividad de la multiplicación de matrices facilita la manipulación de transformaciones compuestas, pero es importante destacar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, lo que significa que el orden en que se aplican las transformaciones sí importa.

Las transformaciones lineales pueden tener efectos geométricos significativos. Por ejemplo, algunas transformaciones, como las rotaciones o las reflexiones, afectan la orientación de los objetos sin cambiar su forma o tamaño. Otras transformaciones,

como el escalado, modifican las dimensiones de los objetos, haciéndolos más grandes o más pequeños. Además, las proyecciones son transformaciones que mapean puntos de un espacio a un subespacio de menor dimensión. Cada uno de estos efectos puede ser modelado y estudiado a través de las matrices que representan las transformaciones correspondientes.

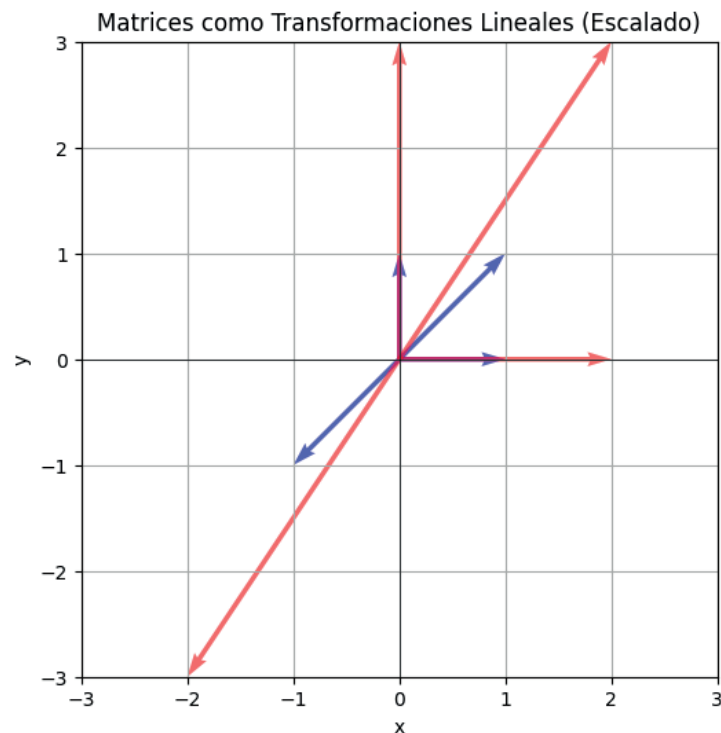


Gráfico 2: Representación visual de Transformaciones Lineales Escaladas
Creación propia.

El concepto de diagonalización también es relevante cuando se trata de transformaciones lineales. Algunas matrices se pueden descomponer de manera tal que su forma sea más sencilla de analizar, lo que facilita el estudio de sus propiedades, como sus potencias o sus autovalores. La diagonalización de una matriz es una técnica poderosa que tiene aplicaciones en la resolución de ecuaciones diferenciales y en el análisis de sistemas dinámicos.

En resumen, las matrices proporcionan una forma eficaz de representar y manejar transformaciones lineales. La capacidad de utilizar matrices para describir, combinar y analizar transformaciones permite resolver problemas complejos en álgebra lineal y sus aplicaciones. Ya sea que estemos trabajando con transformaciones geométricas en gráficos por computadora, modelando sistemas físicos en ingeniería, o realizando

cálculos en algoritmos de optimización, las matrices y las transformaciones lineales son herramientas esenciales para la resolución de problemas en una amplia variedad de disciplinas.

Transformaciones Lineales en el Espacio 3D (Escala)

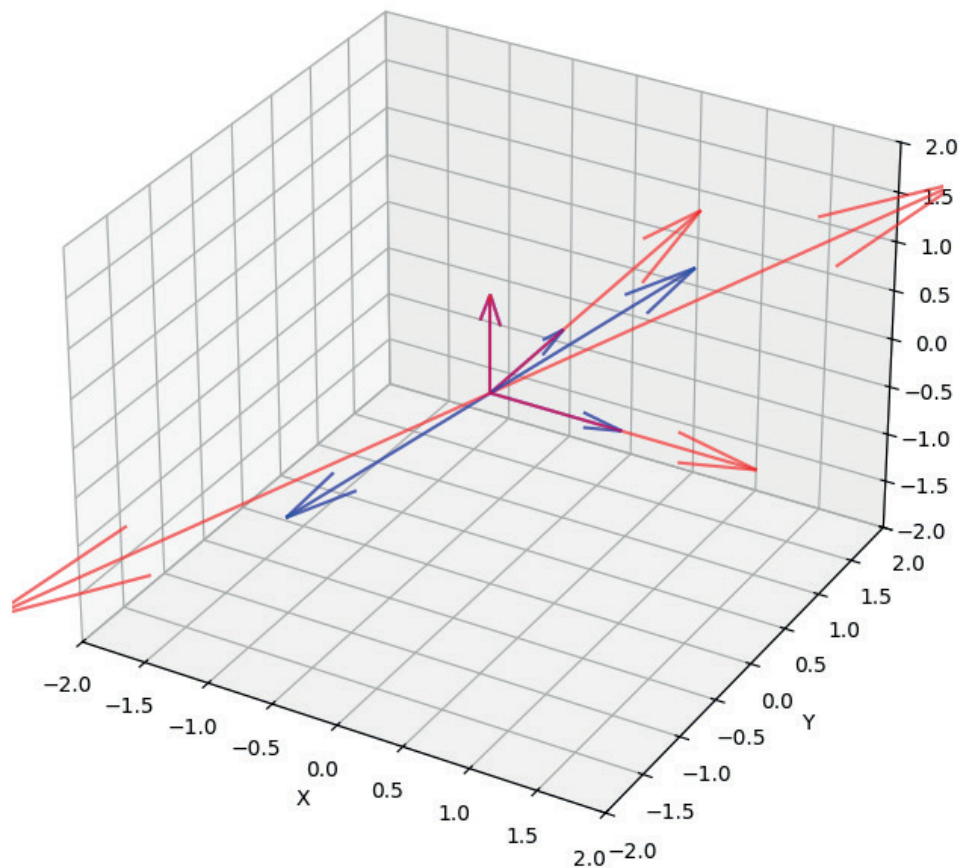


Gráfico 2: Representación visual de Transformaciones Lineales 3D

Creación propia.

8.1. Representación de transformaciones por matrices

Una transformación lineal es una función $T: V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales V y W que cumple dos propiedades clave:

Aditividad: $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Homogeneidad: $T(cv) = cT(v)$, para todo escalar c .

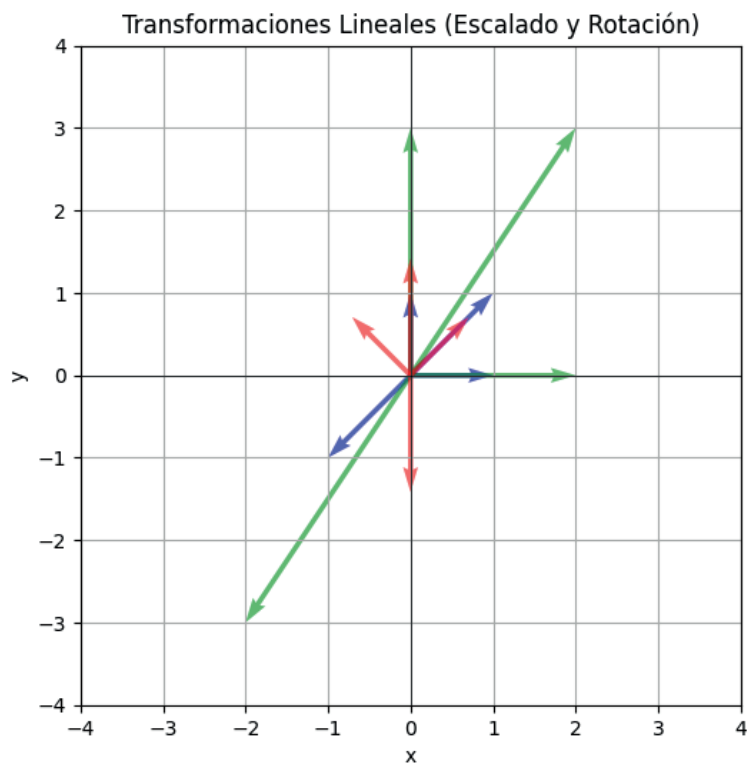


Gráfico 3: Transformaciones Lineales
Creación propia.

Cuando V y W son espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente, toda transformación lineal se puede expresar mediante una matriz A de dimensión $m \times n$. Esta matriz actúa multiplicando a los vectores en V para obtener sus imágenes en W : $T(x) = Ax$.

El proceso para determinar la matriz asociada a T involucra calcular las imágenes de los vectores base de V y expresar esas imágenes en la base de W , obteniendo así las columnas de la matriz A .

Ejemplo detallado:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y + 3z, 4y - z)$$

Para hallar la matriz A , evaluamos T en los vectores base de $\mathbb{R}^3$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (21) \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-14) \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3 - 1)$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$ será transformado multiplicando $A\mathbf{v}$.

Este procedimiento convierte un problema abstracto en uno numérico y computacionalmente tratable.

Importancia:

Esta representación matricial permite que problemas complejos, como resolver sistemas de ecuaciones lineales, análisis de espacios vectoriales, y modelado de fenómenos físicos, sean abordados con herramientas computacionales y matemáticas eficientes.

Transformación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ mediante una matriz 2×3

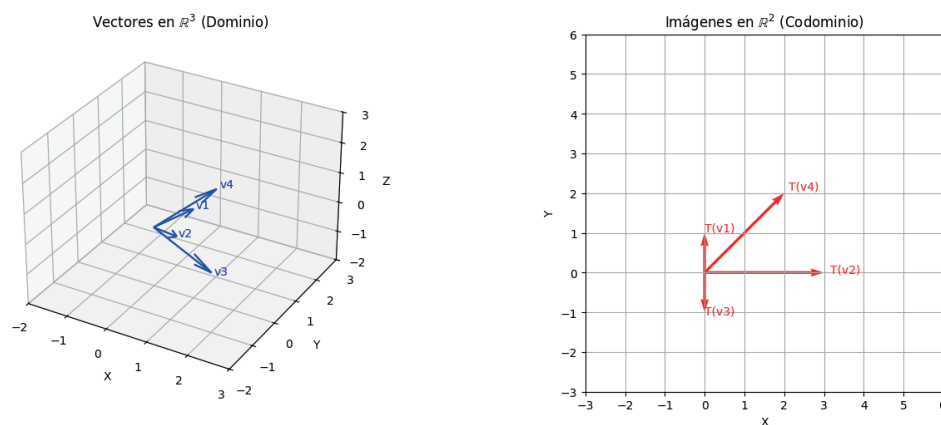


Gráfico 4: Representación visual de una matriz 2×3 que transforma vectores tridimensionales en vectores bidimensionales, mostrando vectores originales y sus imágenes.

Creación propia.

8.2. Matrices de transformaciones específicas

Algunas matrices representan transformaciones geométricas clásicas que tienen propiedades particulares y aplicaciones prácticas en diferentes campos:

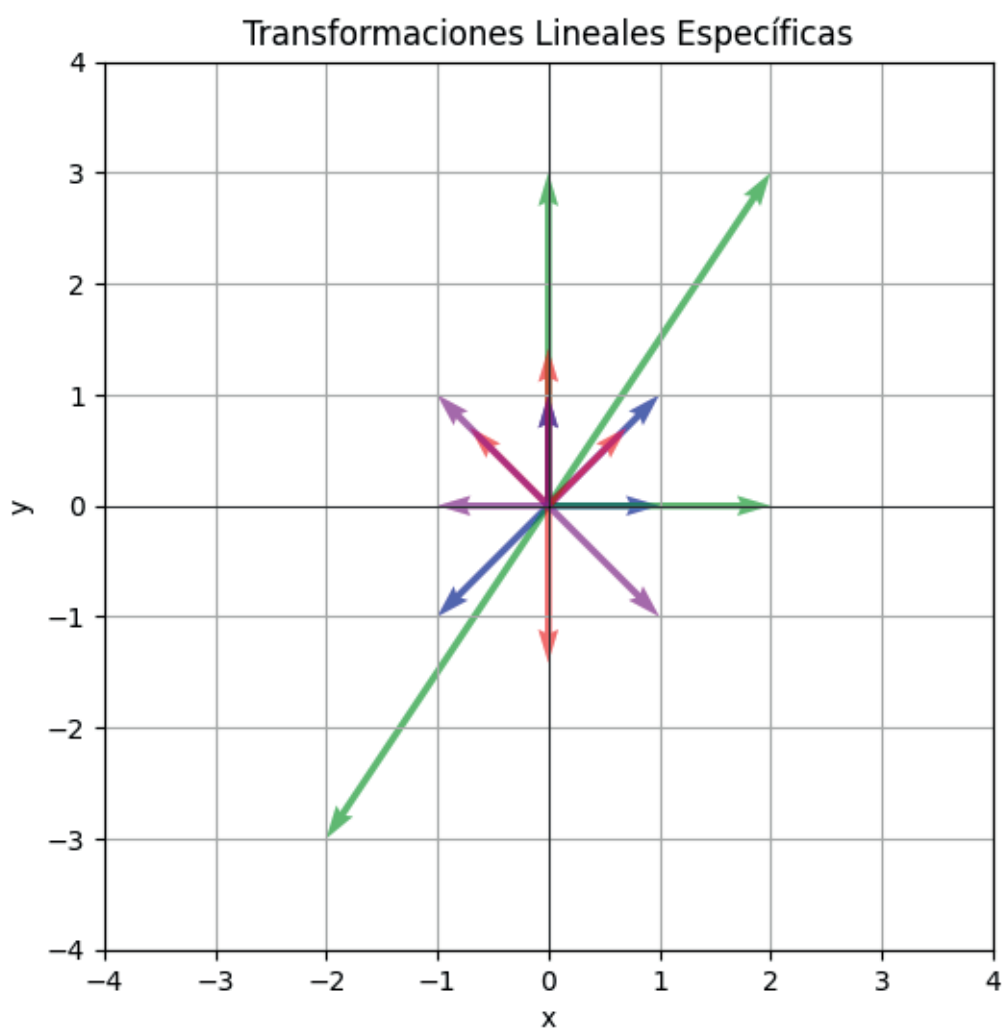


Gráfico 5: Transformaciones Lineales Específicas

Creación propia.

Rotación en R^2 :

La matriz de rotación por un ángulo θ alrededor del origen es

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz rota cualquier vector en el plano en sentido antihorario por el ángulo θ , preservando la distancia y la orientación (excepto para rotaciones de 180°).

- **Escalado:**

Esta transformación modifica el tamaño del vector en diferentes direcciones sin alterar su dirección (excepto cuando un factor de escala es negativo). La matriz diagonal $S = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$, escala el vector multiplicando su componente x por kx y la componente y por ky .

- **Reflexión:**

La reflexión en un eje o plano invierte una o más componentes del vector. Por ejemplo, la reflexión respecto al eje x en R^2 se representa por $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esto refleja el vector alrededor del eje x .

- **Cizalladura (shear):**

Modifica la forma de un objeto deslizando un eje en función del otro. Por ejemplo, la cizalladura horizontal está dada por $H = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde k es un parámetro que determina la intensidad del efecto.

Estas transformaciones se utilizan en campos como gráficos computacionales, donde es necesario manipular objetos, así como en ingeniería para modelar deformaciones.

Transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

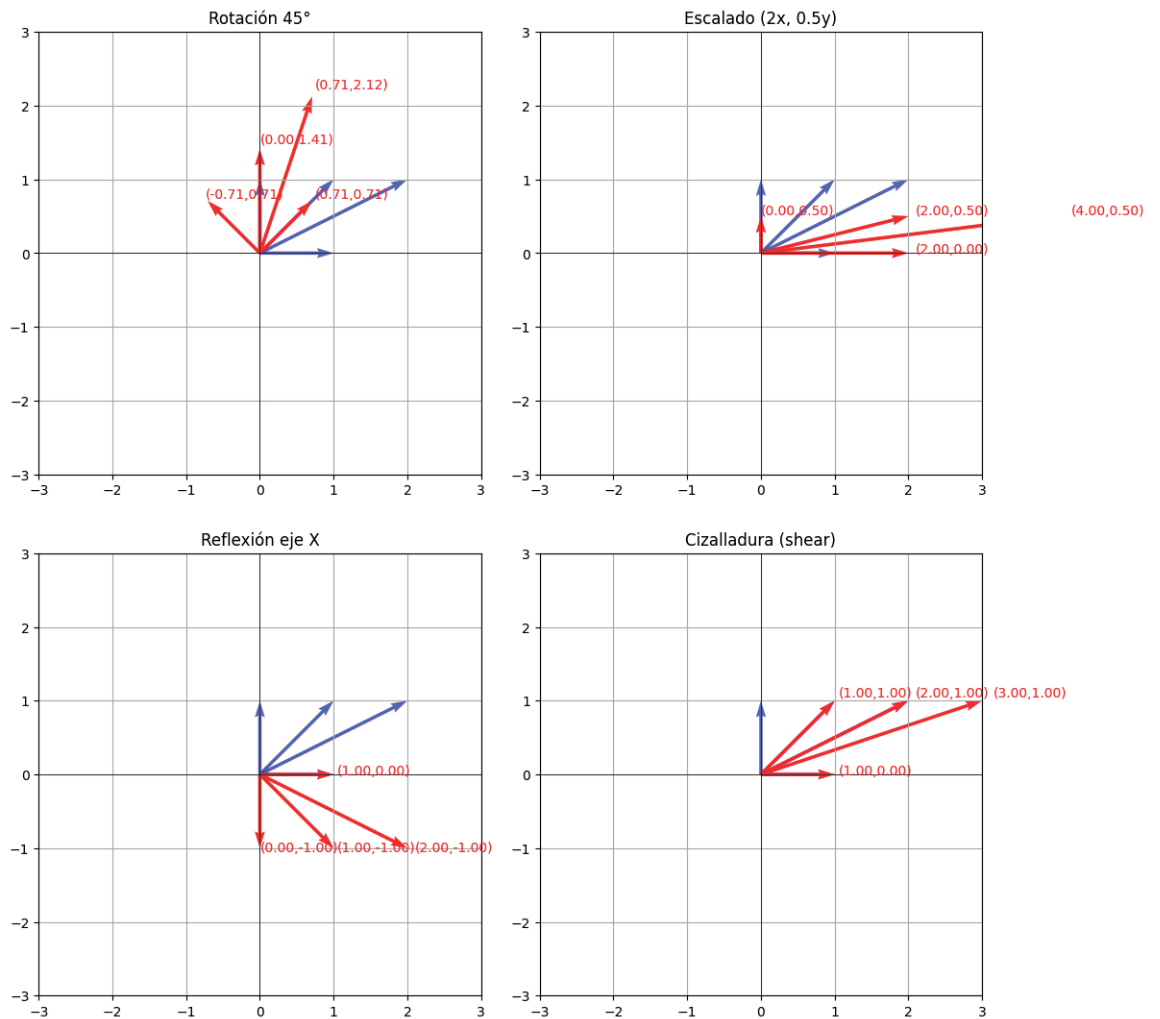


Gráfico 6: Ejemplos visuales de transformaciones específicas en $\mathbb{R}^2$: rotación, escalado, reflexión y cizalladura aplicadas sobre un conjunto de vectores.

Creación propia.

Las transformaciones lineales en el espacio $\mathbb{R}^n$ son una extensión natural de las transformaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y su estudio resulta fundamental en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. Al igual que en los casos de dimensiones menores, en $\mathbb{R}^n$ las transformaciones lineales permiten la manipulación de vectores a través de operaciones como la rotación, el escalado, la traslación (aunque la traslación en sí misma no es una transformación lineal, pero sí es parte de transformaciones afines) y la reflexión, entre otras. Sin embargo, a medida que aumentamos la dimensión del espacio, las transformaciones pueden volverse más complejas y pueden involucrar interacciones más intrincadas entre las variables de un sistema.

En R^n , las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices de tamaño $n \times n$. Cada entrada de la matriz corresponde a cómo una de las coordenadas del espacio de entrada influye en las coordenadas del espacio de salida. Las propiedades de las matrices, como el determinante, el rango y los autovalores, proporcionan información crucial sobre cómo la transformación afecta a los vectores del espacio, ya sea colapsándolos a una subdimensión inferior, rotándolos, o escalándolos de acuerdo con ciertos factores.

Un caso típico de transformaciones en R^n es la **diagonalización de matrices**, que tiene una aplicación significativa en la resolución de sistemas lineales, problemas de optimización y análisis de sistemas dinámicos. Cuando una matriz es diagonalizable, se puede representar como el producto de tres matrices: una matriz de vectores propios, una matriz diagonal con los autovalores, y la inversa de la matriz de vectores propios. Esta representación simplificada facilita el análisis y la resolución de problemas en los que la matriz representa una transformación lineal.

En **gráficos computacionales** y **visualización 3D**, las transformaciones en R^n permiten manipular objetos multidimensionales. Aunque en gráficos por computadora trabajamos frecuentemente en R^2 o R^3 , la generalización a R^n es útil para el modelado y simulación de fenómenos que involucren más de tres dimensiones, como el análisis de datos complejos, la simulación de flujos o campos de fuerzas, y el modelado de comportamientos en sistemas de más dimensiones. Aquí, las transformaciones lineales pueden ser utilizadas para mapear un conjunto de puntos a un espacio de características más complejo, lo que permite representar objetos o datos de manera más precisa.

En **ingeniería**, las transformaciones lineales en R^n son esenciales para modelar **deformaciones** en materiales. Por ejemplo, en el análisis de tensiones y deformaciones de materiales, las matrices de deformación se utilizan para describir cómo un cuerpo se estira, comprime o rota bajo la influencia de fuerzas externas. Estos modelos son fundamentales en la **mecánica de sólidos** y en la **dinámica de fluidos**, donde las transformaciones lineales permiten entender cómo las fuerzas afectan a las estructuras en diferentes configuraciones espaciales.

En la **teoría de control** y en sistemas **multidimensionales**, las transformaciones lineales en R^n son clave para modelar cómo las variaciones en las entradas afectan a las salidas del sistema. Aquí, las transformaciones lineales se aplican para representar

dinámicas de sistemas con múltiples variables de control, lo que es común en la **automatización industrial** y el **control de procesos**.

En resumen, las transformaciones lineales en R^n ofrecen un marco teórico y práctico potente para representar y analizar una amplia gama de fenómenos en múltiples dimensiones. Ya sea para modelar comportamientos físicos, manipular objetos en gráficos computacionales, o analizar sistemas de control multidimensionales, la comprensión de estas transformaciones permite abordar problemas complejos con eficacia y precisión.

8.3. Composición de transformaciones

La composición de transformaciones es fundamental para entender cómo múltiples transformaciones pueden aplicarse una tras otra para producir efectos complejos.

Si $T_1: V \rightarrow W$ y $T_2: W \rightarrow U$ son transformaciones lineales, la composición $T = T_2 \circ T_1$ transforma un vector $v \in V$ primero por T_1 y luego por T_2 : $T(v) = T_2(T_1(v))$.

En términos matriciales, si A representa T_1 y B representa T_2 , entonces la transformación compuesta está representada por BA , donde el producto BA se realiza multiplicando la matriz B por la matriz A .

Es crucial notar que el producto de matrices no es conmutativo: $AB \neq BA$ en general. Por lo tanto, el orden en la composición es esencial para obtener el resultado correcto.

Ejemplo:

Si T_1 es una rotación por 30° y T_2 un escalado por factores 2 y 0.5 en x y y respectivamente, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

dan lugar a la matriz compuesta BA que representa la transformación "rotar y luego escalar".

Este enfoque es muy utilizado en animación digital y robótica para realizar múltiples movimientos complejos a partir de movimientos simples.

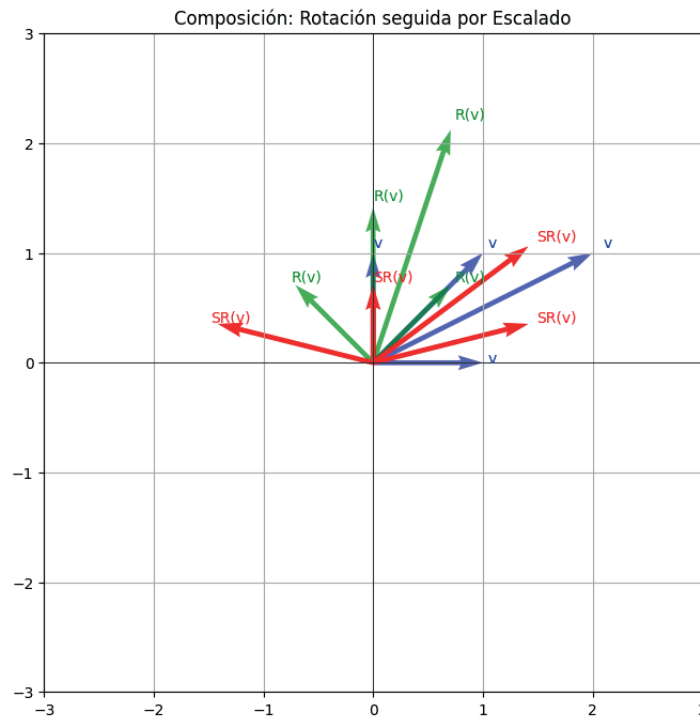


Gráfico 7: Visualización del efecto de la composición de transformaciones: rotación seguida por escalado en un conjunto de vectores.

Creación propia.

8.4. Efectos de varias transformaciones aplicadas secuencialmente

Aplicar múltiples transformaciones lineales una tras otra permite construir transformaciones complejas que son la base de muchos sistemas dinámicos, modelos físicos y gráficos por computadora.

Consideremos aplicar tres transformaciones:

1. Rotación RRR
2. Escalado SSS
3. Reflexión FFF

El efecto global sobre un vector $\mathbf{v}$ es $\mathbf{v}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v}$.

Cada una afecta al vector y prepara la base para la siguiente transformación. Por ejemplo, una rotación cambia la dirección del vector, el escalado cambia su tamaño y la reflexión puede invertir alguna componente.

Ejemplo aplicado:

Sea $\mathbf{v} = (1, 0)^T$. Aplicamos:

- Rotación 90° : $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_{90^\circ}\mathbf{v} = (0, 1)^T$
- Escalado con $kx = 2k_x, ky = 3k_y$: $\mathbf{v}_2 = \mathbf{S}\mathbf{v}_1 = (0, 3)^T$
- Reflexión respecto al eje x : $\mathbf{v}_3 = \mathbf{F}\mathbf{v}_2 = (0, -3)^T$

Esto ilustra cómo la composición cambia sustancialmente el vector original.

La capacidad para combinar estas transformaciones es fundamental en el diseño de movimientos robóticos, simulaciones físicas y efectos gráficos.

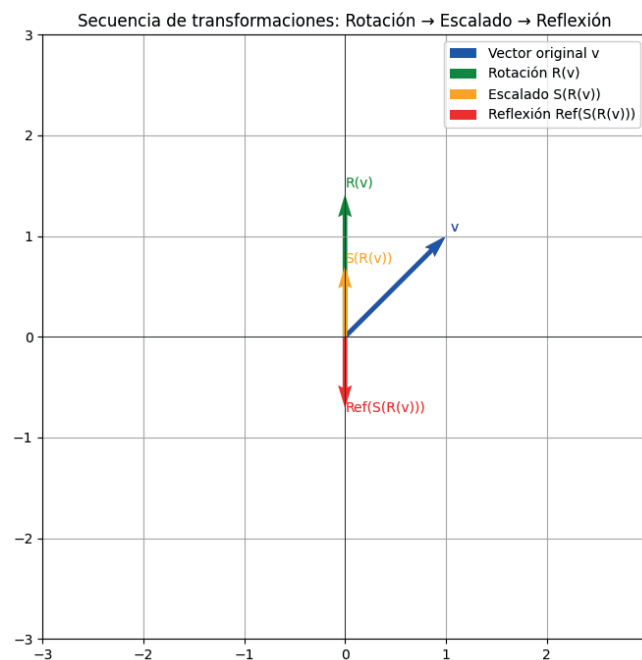


Gráfico 8: Secuencia visual mostrando el vector original y su transformación paso a paso mediante rotación, escalado y reflexión.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

Para profundizar en cómo las matrices representan transformaciones lineales y cómo la composición afecta a los vectores, este video ofrece explicaciones claras y ejemplos visuales paso a paso.

- **Enlace:** [Video sobre Matrices como Transformaciones Lineales](#)

Enlace 2:

Este artículo presenta la teoría matemática de las transformaciones lineales y matrices, con aplicaciones en ingeniería, ciencia computacional y física.

- **Enlace:** [Artículo sobre Matrices y Transformaciones Lineales](#)
-

Términos Subrayados y Definiciones

Matriz de transformación: Matriz que representa una transformación lineal y permite calcular la imagen de cualquier vector bajo dicha transformación.

Composición de transformaciones: Proceso de aplicar varias transformaciones lineales una tras otra, representado por el producto de las matrices que las representan.

Referencias

- Friedberg, S. H., Insel, A., & Spence, L. E. (2019). *Álgebra lineal* (4ª ed.). Pearson Educación.
 - Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10ª ed.). Wiley.
 - Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5ª ed.). Wellesley-Cambridge Press.
 - Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4ª ed.). Pearson.
 - Kolman, B., & Hill, D. R. (2005). *Álgebra lineal con aplicaciones* (6ª ed.). Pearson.
-

Recursos de Profundización

Artículo 1: Representación de Transformaciones por Matrices

Descripción del enlace:

Este artículo profundiza en cómo las transformaciones lineales entre espacios vectoriales finito-dimensionales se pueden representar mediante matrices, haciendo especial énfasis en la elección de bases y el proceso para construir la matriz asociada a una transformación dada. Se incluyen definiciones detalladas, el papel de las bases en la representación matricial, y ejemplos explícitos para facilitar la comprensión. Además, se aborda el efecto del cambio de base sobre la matriz de una transformación.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1MIgAukMZImDXVYh3aW6jq9EUaO5GTzX/view?usp=sharing>

Artículo 2: Matrices de Transformaciones Específicas

Descripción del enlace:

Este artículo examina matrices que representan transformaciones lineales comunes y fundamentales, tales como rotaciones, reflexiones, escalados y proyecciones ortogonales, principalmente en R^2 . Se detallan las propiedades algebraicas y geométricas de estas matrices, junto con ejemplos numéricos que ilustran cómo construir y combinar estas transformaciones para generar otras más complejas.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1gW2leQLEAJEZ88Wxi7DD6VB4O0owuYXW/view?usp=sharing>

Artículo 3: Composición de Transformaciones y Efectos Secuenciales

Descripción del enlace:

Este artículo presenta la composición de transformaciones lineales desde la perspectiva matricial, explicando cómo la multiplicación de matrices refleja la aplicación secuencial de varias transformaciones. Se abordan propiedades clave de la multiplicación matricial, ejemplos detallados de composiciones en $\mathbb{R}^2$, y su interpretación geométrica para entender mejor el efecto combinado de varias transformaciones lineales.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1SdLtrgai-9B5iZE-rwxM222aN1jQqUzr/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

