

Algebra Lineal y Geometría Analítica

Espacios Vectoriales y Subespacios

Clase 9



Ingeniería en Ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Los **espacios vectoriales** constituyen uno de los conceptos más esenciales en álgebra lineal y matemáticas en general, ya que proporcionan un marco abstracto para trabajar con vectores y operaciones que combinan estos elementos de forma coherente. Un espacio vectorial está formado por un conjunto de vectores y un campo de escalares (como los números reales o complejos), y está definido por un conjunto de axiomas que garantizan la suma y la multiplicación escalar conserven propiedades fundamentales como la asociatividad, conmutatividad, existencia de un elemento neutro (vector cero) y existencia de inversos aditivos. Estos espacios permiten modelar y analizar una amplia variedad de fenómenos, desde problemas geométricos en dos y tres dimensiones hasta sistemas más complejos en espacios de dimensión infinita, utilizados en física, ingeniería, informática y economía. Gracias a estas propiedades, los espacios vectoriales facilitan la representación y manipulación sistemática de datos y funciones, haciendo posible la aplicación de técnicas como la descomposición en bases y el estudio de transformaciones lineales.

Dentro de un espacio vectorial, los **subespacios** representan subconjuntos especiales que por sí mismos cumplen con las mismas propiedades de un espacio vectorial, es decir, son cerrados bajo la suma y la multiplicación por escalares y contienen el vector cero. Estos subespacios son cruciales para el análisis estructural de espacios vectoriales, ya que permiten identificar y estudiar partes internas del espacio que pueden ser analizadas de manera independiente. El concepto de subespacio es fundamental para entender la dimensión, bases y la independencia lineal, así como para resolver sistemas de ecuaciones lineales y analizar transformaciones lineales. En ingeniería y ciencias aplicadas, el reconocimiento de subespacios facilita la simplificación y resolución de problemas complejos, como la reducción de dimensiones en el procesamiento de señales, la optimización en control de sistemas y la modelación de espacios funcionales en física matemática.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos básicos del Algebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

- 2) Analizar los problemas relacionados al Álgebra Lineal y Geometría Analítica en el campo de la Ingeniería.

Reto # (2)

Clase 9: Espacios Vectoriales y Subespacios

Los espacios vectoriales son estructuras matemáticas fundamentales en el álgebra lineal que permiten estudiar fenómenos complejos mediante un lenguaje abstracto y preciso. Estas estructuras generalizan muchas propiedades conocidas de vectores del espacio euclidiano y se aplican en campos tan variados como la ingeniería, la economía, la física, la estadística y la informática.

La noción de espacio vectorial, junto con la de subespacio, proporciona un marco para analizar sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y problemas geométricos o algebraicos. A través de esta clase exploraremos sus definiciones, propiedades, criterios, ejemplos y contraejemplos, **resaltando los conceptos clave** para facilitar su comprensión y aplicación.

Los espacios vectoriales son estructuras matemáticas fundamentales que permiten estudiar una gran variedad de fenómenos en álgebra lineal. A través de estos espacios, es posible generalizar muchas propiedades conocidas de los vectores del espacio euclidiano y aplicarlas en contextos más amplios, lo que facilita el análisis de sistemas complejos. Estos conceptos se extienden más allá de los vectores en dos o tres dimensiones, permitiendo trabajar en espacios de cualquier dimensión, lo que resulta útil en disciplinas como la ingeniería, la economía, la física, la estadística y la informática. Los espacios vectoriales proporcionan una base abstracta que facilita la resolución de problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y otros problemas geométricos y algebraicos.

En un espacio vectorial, los elementos básicos son los vectores, que se pueden sumar y multiplicar por escalares, es decir, por números reales o complejos, dependiendo del contexto. Los axiomas que definen un espacio vectorial aseguran que estas operaciones

se realicen de manera consistente. Esto incluye propiedades como la conmutatividad y la asociatividad de la suma de vectores, la existencia de un vector nulo y de un inverso aditivo, así como la distribución de la multiplicación escalar con respecto a la adición de vectores y escalares. Estas propiedades son fundamentales para poder manipular y operar con vectores de manera sistemática.

Una de las ideas centrales de los espacios vectoriales es la noción de subespacios. Un subespacio es simplemente un subconjunto de un espacio vectorial que, a su vez, es un espacio vectorial por sí mismo, es decir, cumple con las mismas reglas de adición y multiplicación por escalares que el espacio original. Los subespacios permiten descomponer un espacio más grande en partes más simples y comprender mejor su estructura. Estos subespacios pueden ser, por ejemplo, líneas o planos dentro de un espacio tridimensional, y son fundamentales en el estudio de soluciones a sistemas de ecuaciones lineales y en la teoría de transformaciones lineales.

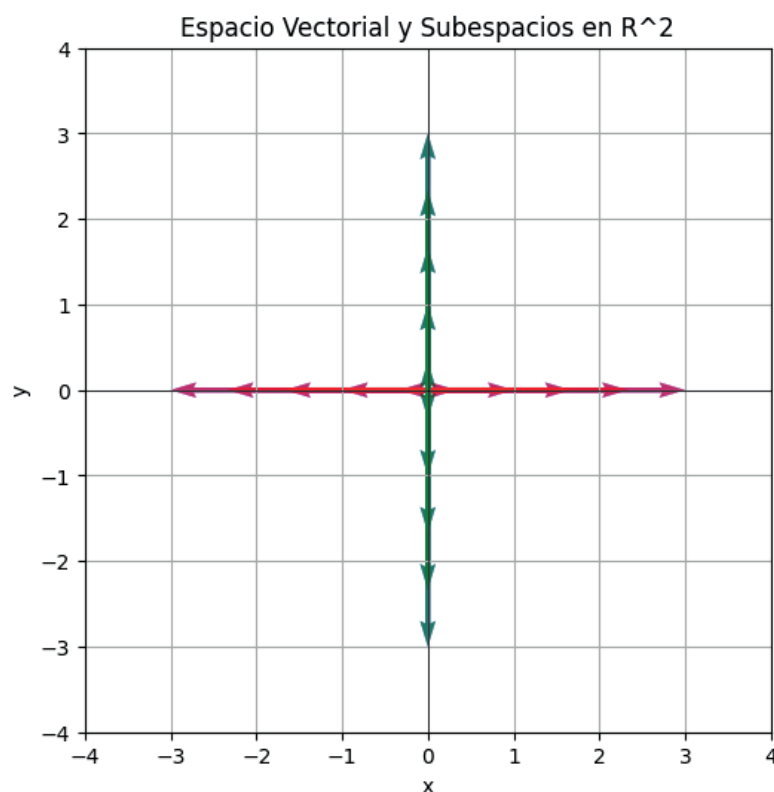


Gráfico 2: Espacio y Subespacio vectorial.

Creación propia.

El concepto de combinación lineal es otro pilar en el estudio de los espacios vectoriales. Una combinación lineal de un conjunto de vectores es simplemente una suma



ponderada de esos vectores, donde los coeficientes son escalares. Este concepto es esencial para entender cómo se pueden generar otros vectores a partir de un conjunto dado de vectores. Un conjunto de vectores es generador del espacio vectorial si cualquier vector dentro de ese espacio puede expresarse como una combinación lineal de esos vectores. Esto conduce a la noción de base de un espacio vectorial, que es un conjunto de vectores linealmente independientes que genera todo el espacio. La cantidad de vectores en una base es la dimensión del espacio vectorial, un concepto clave en la clasificación y análisis de los espacios.

Los espacios vectoriales tienen numerosas aplicaciones prácticas en una amplia gama de disciplinas. En la economía, por ejemplo, los espacios vectoriales se utilizan para modelar sistemas de equilibrio en mercados, donde los vectores pueden representar bienes o activos, y las combinaciones lineales pueden utilizarse para analizar los efectos de los precios y la oferta. En la ingeniería, los espacios vectoriales permiten modelar y analizar fenómenos físicos como el movimiento, las fuerzas, las deformaciones de materiales y las dinámicas de sistemas complejos. En física, el estudio de los espacios vectoriales es esencial para entender fenómenos como los campos electromagnéticos, la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, entre otros.

En estadística y aprendizaje automático, los espacios vectoriales permiten representar datos complejos en espacios de múltiples dimensiones, lo que facilita el análisis de grandes volúmenes de información y la aplicación de técnicas como la reducción de la dimensionalidad, el análisis de componentes principales (PCA) y la clasificación de patrones. Estos conceptos son esenciales en la construcción de modelos de predicción y en el análisis de datos multidimensionales, que son fundamentales en la ciencia de datos y la inteligencia artificial.

Los espacios vectoriales también tienen aplicaciones fundamentales en el procesamiento de señales, la computación gráfica y la simulación por computadora. En gráficos por computadora, por ejemplo, se utilizan transformaciones lineales para manipular objetos en 2D y 3D, como rotaciones, traslaciones y escalados. De igual manera, en la ingeniería de sistemas, los espacios vectoriales se emplean para modelar sistemas dinámicos, donde las variables del sistema pueden representar cantidades físicas como velocidad, temperatura, presión o posición, y las transformaciones lineales ayudan a comprender cómo cambian esos valores a lo largo del tiempo.

En cuanto a la representación de los espacios vectoriales, se pueden encontrar ejemplos concretos de espacios como el espacio euclidiano, que es el conjunto de vectores de un número determinado de dimensiones, o los espacios de polinomios, donde los vectores pueden ser polinomios de un grado específico. Sin embargo, no todos los subconjuntos de un espacio vectorial son subespacios. Por ejemplo, un conjunto de vectores que no incluye el vector cero o que no es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares no será un subespacio, lo que sirve como un importante contraejemplo en el estudio de los espacios vectoriales.

Espacio Vectorial y Subespacio (Plano) en 3D

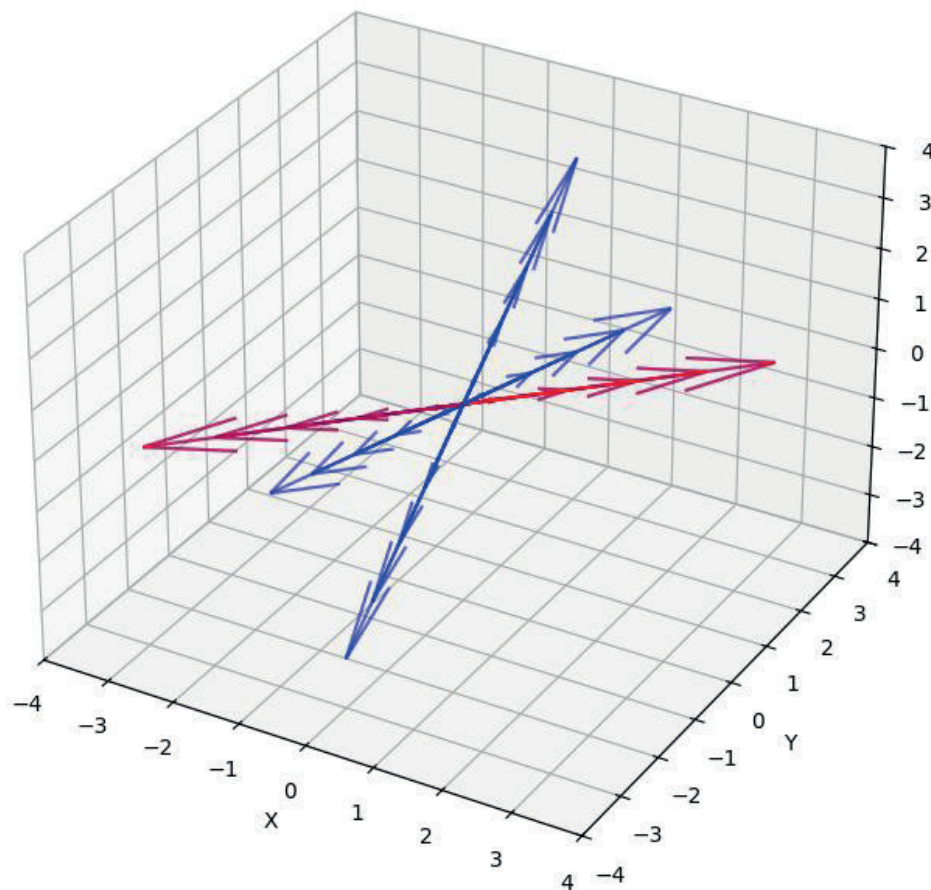


Gráfico 2: Espacio y Subespacio vectorial.

Creación propia.

9.1. Definición de espacio vectorial

Un **espacio vectorial** (también llamado espacio lineal) es un conjunto de elementos llamados vectores, junto con dos operaciones: **suma de vectores** y **multiplicación por escalares**, que cumplen una serie de axiomas específicos. Estas operaciones se definen sobre un **campo**, que comúnmente es el de los números reales R , aunque también puede ser el de los complejos C .

Formalmente, un conjunto V es un espacio vectorial sobre un campo K si para cada par de vectores $u, v \in V$ y cada escalar $a \in K$, se cumplen los siguientes axiomas.

Esquema general de la estructura de un espacio vectorial

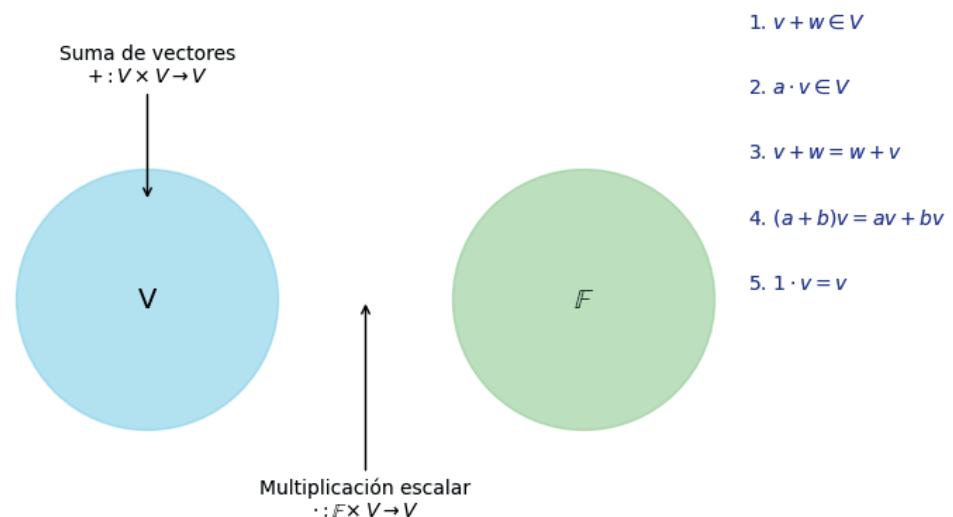


Gráfico 3: Esquema general de la estructura de un espacio vectorial.

Creación propia.

Los elementos que componen un espacio vectorial pueden ser de diferentes naturalezas:

- Tuplas (como en R^n),
- Polinomios,
- Funciones continuas,
- Matrices,
- Soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, entre otros.

9.2. Axiomas de espacio vectorial

Los **ocho axiomas** que definen un espacio vectorial aseguran que las operaciones dentro del conjunto mantengan una estructura coherente. Estos axiomas son:

1. **Cerradura bajo la suma:** Si $u, v \in V$, entonces $u + v \in V$.
2. **Conmutatividad de la suma:** $u + v = v + u$.
3. **Asociatividad de la suma:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. **Existencia del neutro aditivo:** Existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$.
5. **Existencia del inverso aditivo:** Para cada $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.
6. **Cerradura bajo la multiplicación escalar:** Si $a \in K$ y $v \in V$, entonces $a \cdot v \in V$.
7. **Compatibilidad de la multiplicación escalar:** $a(bv) = (ab)v$.
8. **Identidad escalar:** $1 \cdot v = v$, donde $1 \in K$ es el elemento identidad.

Estos axiomas se cumplen en todos los espacios vectoriales y son la base para definir subespacios, bases, dimensión, y más.

Axioma	Descripción	Ejemplo en $\mathbb{R}^2$
Cierre suma	$u + v \in V$	$(1,2) + (3,4) = (4,6)$
Cierre multiplicación escalar	$a \cdot v \in V$	$2 \times (1,2) = (2,4)$
Conmutatividad suma	$u + v = v + u$	$(1,2) + (3,4) = (3,4) + (1,2)$
Asociatividad suma	$(u + v) + w = u + (v + w)$	$((1,2) + (3,4)) + (5,6) = (1,2) + ((3,4) + (5,6))$
Elemento neutro suma	Existe 0 tal que $v + 0 = v$	$(1,2) + (0,0) = (1,2)$
Elemento inverso suma	Existe $-v$ tal que $v + (-v) = 0$	$(1,2) + (-1,-2) = (0,0)$
Asociatividad escalar	$a(bv) = (ab)v$	$2 \times (3 \times (1,2)) = 6 \times (1,2)$
Distributividad escalar-suma	$a(u + v) = au + av$	$2 \times ((1,2) + (3,4)) = 2 \times (1,2) + 2 \times (3,4)$
Distributividad escalar-esc	$(a + b)v = av + bv$	$(2 + 3) \times (1,2) = 2 \times (1,2) + 3 \times (1,2)$
Elemento unidad escalar	$1 \cdot v = v$	$1 \times (1,2) = (1,2)$

Gráfico 4: Tabla de axiomas del espacio vectorial con ejemplos en $\mathbb{R}^2$.

Creación propia.

9.3. Subespacios

Un **subespacio** es un subconjunto de un espacio vectorial que es a su vez un espacio vectorial respecto a las operaciones originales. Es decir, un subconjunto $W \subseteq V$ es un subespacio si:

- Contiene al vector cero de V ,
- Es cerrado bajo la suma de vectores,
- Es cerrado bajo la multiplicación escalar.

Esto quiere decir que, al sumar dos elementos de W , o al multiplicar uno por un escalar, el resultado **permanece dentro del subconjunto**.

Por ejemplo:

- El conjunto de todos los vectores de la forma $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
- El conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3 es un subespacio del conjunto de todos los polinomios reales.

Visualización de un subespacio en $\mathbb{R}^2$ (línea que pasa por el origen)

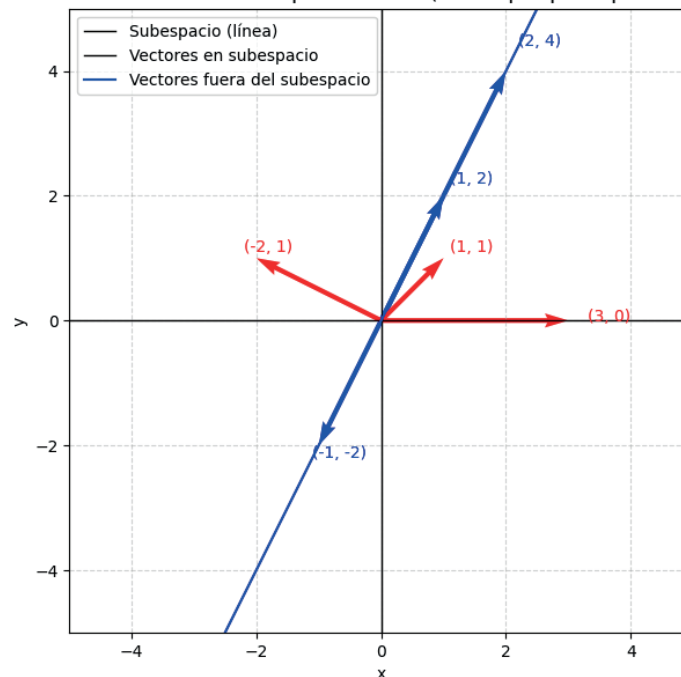


Gráfico 5: Visualización de un subespacio como una línea que pasa por el origen en $\mathbb{R}^2$.

Creación propia.

9.4. Criterios para subespacios

En la práctica, para verificar que un conjunto es subespacio, no es necesario revisar los ocho axiomas, sino que basta con aplicar el siguiente **criterio de subespacio**:

1. **El vector cero está en el conjunto.**
2. **Cerradura bajo la suma:** Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
3. **Cerradura bajo la multiplicación escalar:** Si $a \in K$ y $v \in W$, entonces $a \cdot v \in W$.

Este criterio se aplica, por ejemplo, para verificar que un conjunto de funciones continuas o matrices simétricas es un subespacio.

Criterio de Subespacio en $\mathbb{R}^2$

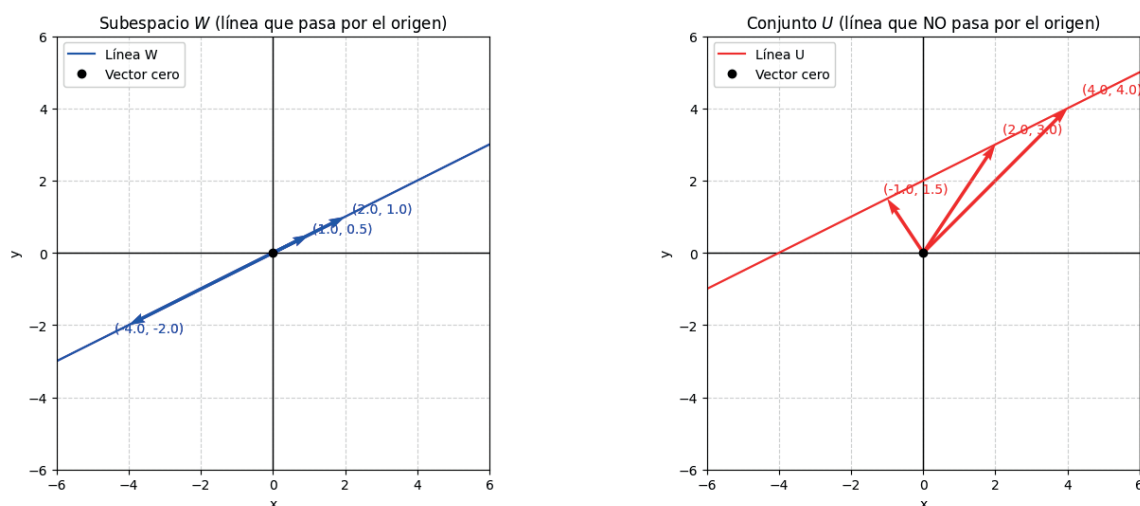


Gráfico 6: Diagrama del criterio de subespacio con ejemplos gráficos en $\mathbb{R}^2$.

Creación propia.

9.5. Ejemplos y contraejemplos

A continuación, se presentan ejemplos de subespacios y también **contraejemplos** (conjuntos que no son subespacios):

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** El conjunto $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio.
- **Ejemplo 2:** El conjunto de matrices simétricas de orden n con entradas reales es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- **Ejemplo 3:** El conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ es un subespacio del conjunto de funciones reales en ese intervalo.

Contraejemplos

- **Contraejemplo 1:** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ no es subespacio porque **no contiene al vector cero**.
- **Contraejemplo 2:** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ no es subespacio porque **no es cerrado bajo la multiplicación escalar**.

Comparación entre Subespacio y Conjunto NO Subespacio en $\mathbb{R}^2$

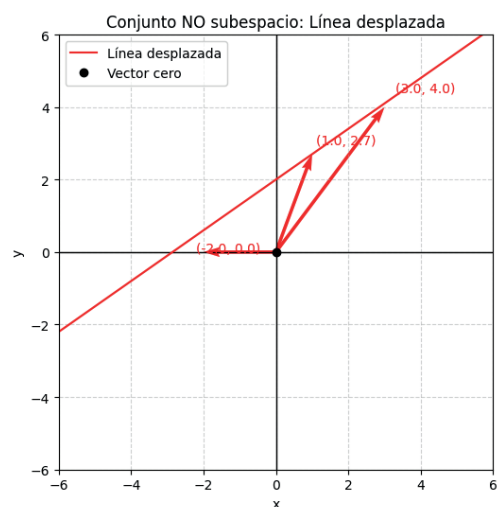
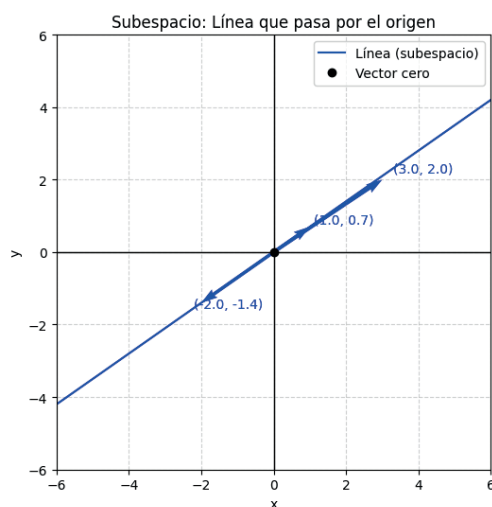


Gráfico 7: Comparación entre subespacio y conjunto que no lo es (línea que pasa por el origen vs línea desplazada).

Creación propia.

Enlaces Complementarios

Enlace 1:

A través de este video educativo se explican las propiedades de los espacios vectoriales y cómo identificar subespacios con ejemplos gráficos en dos y tres dimensiones.

[Video explicativo sobre espacios vectoriales](#)

Enlace 2:

Artículo académico sobre subespacios vectoriales y cómo se aplican en la teoría de espacios funcionales y soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

[Artículo sobre subespacios vectoriales en aplicaciones](#)

Términos Subrayados y Definiciones

Espacio vectorial: Conjunto con operaciones de suma y multiplicación por escalar que cumple una serie de axiomas algebraicos.

Subespacio: Subconjunto de un espacio vectorial que también es un espacio vectorial con las mismas operaciones.

Referencias

- Anton, H., & Rorres, C. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones* (10.^a ed.). Wiley.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and Its Applications* (5.^a ed.). Pearson.

- Kolman, B., & Hill, D. R. (2005). *Álgebra lineal con aplicaciones* (6.^a ed.). Pearson Educación.
 - Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra* (5.^a ed.). Wellesley-Cambridge Press.
 - Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2003). *Álgebra lineal* (4.^a ed.). Pearson Educación.
-

Recursos de Profundización

Artículo 1: Definición y Axiomas de Espacios Vectoriales

Descripción del enlace:

Este artículo presenta una explicación detallada sobre qué es un espacio vectorial, definiendo formalmente esta estructura algebraica fundamental. Se exponen los diez axiomas que caracterizan a los espacios vectoriales sobre un campo, destacando la importancia de cada uno para garantizar las propiedades necesarias en operaciones con vectores. También se incluye un ejemplo básico para ilustrar estos conceptos.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1XfH3Vk_sqVNarWEm32Q22ozoVYUsJK5g/view?usp=sharing

Artículo 2: Subespacios y Criterios para su Identificación

Descripción del enlace:

En este artículo se analiza el concepto de subespacio vectorial, como subconjunto que hereda la estructura de espacio vectorial. Se detallan los criterios clave para determinar si un subconjunto es un subespacio, con énfasis en la clausura bajo suma y

multiplicación escalar, además de la inclusión del vector cero. Se incluyen ejemplos y contraejemplos prácticos para facilitar la comprensión.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1kMhhHsPA_I6ZQruxCm1b9aLWTiadBUPR/view?usp=sharing

Artículo 3: Ejemplos y Contraejemplos de Espacios Vectoriales y Subespacios

Descripción del enlace:

Este artículo explora ejemplos concretos de espacios vectoriales y subespacios que aparecen en diversos contextos matemáticos, tales como espacios de vectores, matrices, funciones y polinomios. Asimismo, presenta contraejemplos importantes que no cumplen con los axiomas, ayudando a delimitar conceptualmente estos objetos. Es un recurso valioso para profundizar la comprensión y evitar errores conceptuales.

Autor: Carlos Mayorga

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1kBfFJ2IZaPxSu2VHfC0ox3r39phlABDL/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

