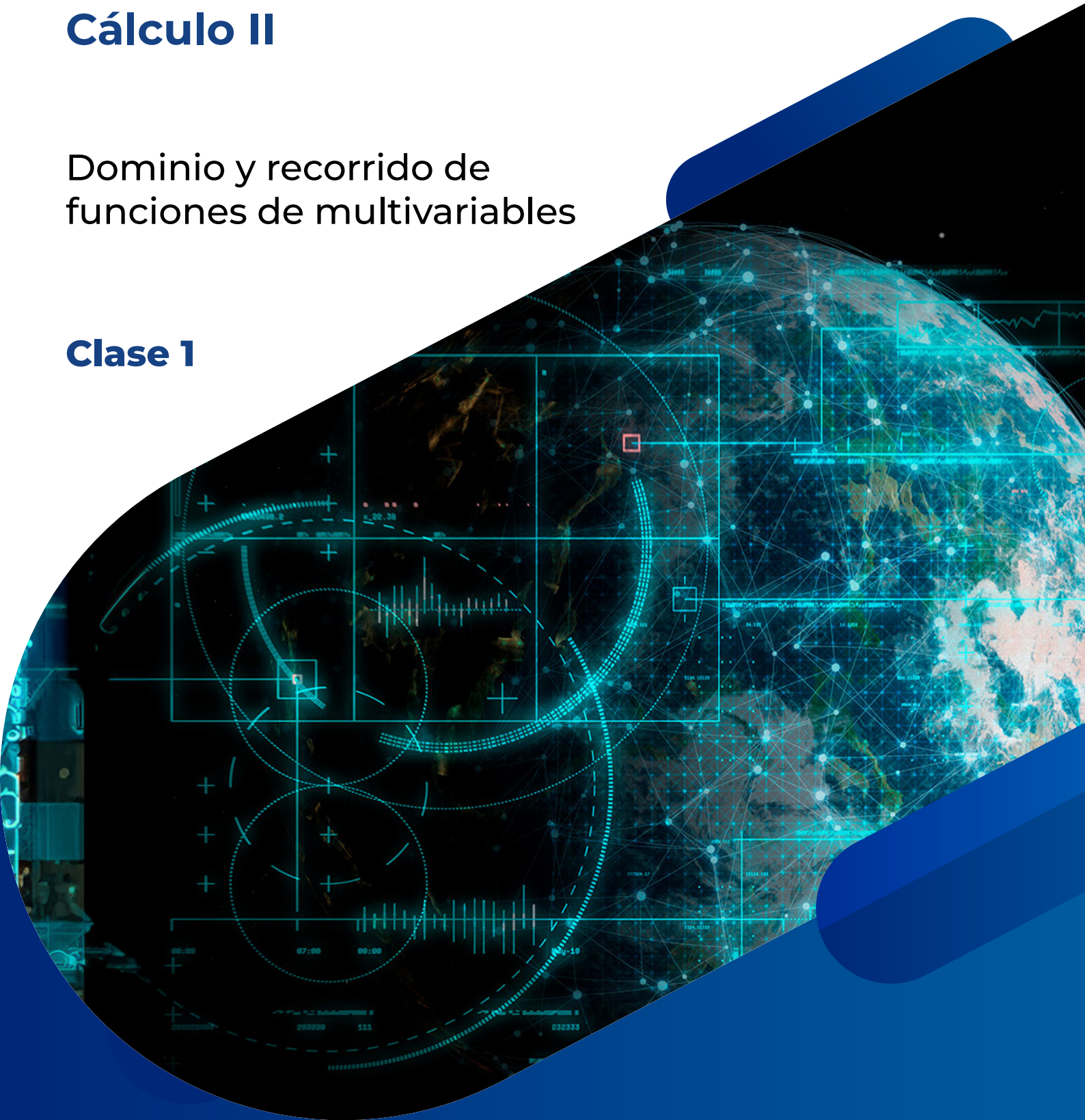


Cálculo II

Dominio y recorrido de funciones de multivariables

Clase 1



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Cuando me puse a estudiar los fenómenos de la naturaleza, me ocurrió algo curioso. Al principio, pensaba que con una sola variable podía explicarlo todo, pero pronto me di cuenta de que no era tan simple. Me encontré con situaciones en las que una sola variable no era suficiente, y comencé a usar funciones que dependían de dos o más variables. Fue como abrir una nueva puerta para comprender mejor lo que estaba observando.

Con el tiempo, entendí por qué ocurría esto. Muchos de estos fenómenos son multidimensionales, es decir, dependen de varios factores al mismo tiempo. Por ejemplo, la temperatura en una ciudad no solo depende del día, sino también de la hora y del lugar específico en el que se mida. Entonces, usar una sola variable sería como mirar solo una parte del todo. Y ahí fue cuando todo empezó a tener más sentido para mí.

Ejemplo1

El área A de un rectángulo de base (x) y altura (y), se describe mediante una función de dos variables.

$$A = xy$$

A es la función de dos variables independientes. A es la variable dependiente, porque por cada valor que se asigna de forma arbitraria a x , y , se cambia el valor único de A .

Tabla 1

Variables independientes (x,y) vs dependientes (A)

x=base	y=altur a	A=área del rectángulo
--------	--------------	-----------------------

1	1	1
1,5	2	3
2	2,5	5
3	3	9
3,5	4	14

Nota. Tabla creada por el autor

Ejemplo 2

El volumen V de un paralelepípedo rectangular de base (x), altura (y) y espesor (z), se describe mediante una función de tres variables:

$$V=xyz$$

V es función de tres variables independientes, V es la variable dependiente porque por cada valor que se asigna de forma arbitraria a x , y , z .

Tabla 2

Variables independientes (x,y,z) vs. dependientes (V)

x=base	y=altur a	z=espesor	V=volumen
1	1	1	1
2	2	3	12
3	2,5	2	15
4	3	5	60
5	4	2,5	50

Nota. Tabla creada por el autor

Reto # (1)

1. Tema. Dominio y recorrido de funciones de multivariabes

1.1.Dominio

Definición 1. Como menciona Piskunov (1977), si a cada par de valores (x, y) en las que x, y son dos variables independientes entre sí, valores que son tomados de un conjunto D , le corresponde un valor determinado de la magnitud z (variable dependiente de las variables x, y). Entonces z es una función de dos variables independientes x, y definida en el conjunto DE , su notación se puede escribir como:

$$z = f(x, y)$$

$$z = F(x, y)$$

Definición 2. El conjunto de los valores de (x, y) para los cuales se encuentra definida la función $z = f(x, y)$ se llama dominio de existencia de la función.

De las definiciones anteriores podemos apreciar que cada valor de pares ordenados (x, y) corresponden a puntos del plano x, y , entonces el dominio de existencia es una parte del plano x, y delimitado por líneas, estas líneas que delimitan al dominio se denominan frontera del dominio y los valores de pares ordenados (x, y) son interiores del dominio.

1.1.1. Funciones en componentes cartesianas

Las funciones en componentes cartesianas son aquellas cuyas variables independientes son las que corresponden a los tres ejes del plano cartesiano x, y, z . Las funciones con dos variables se encuentran en uno de los 3 planos cartesianos, formados al considerar únicamente dos ejes, dando lugar a tres planos:

Plano x, y

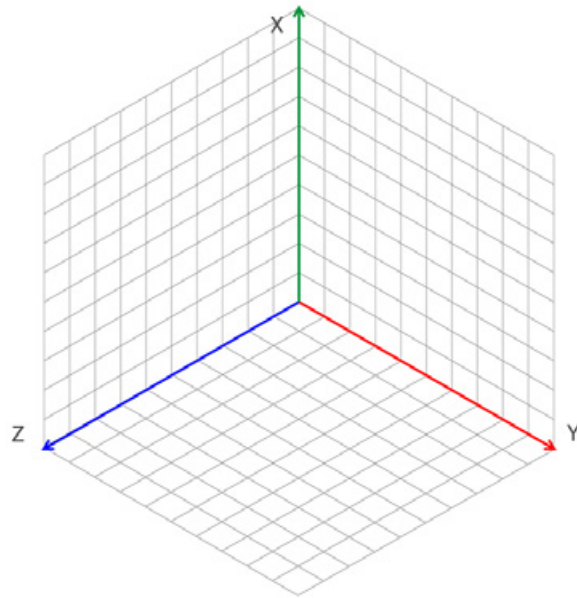
Plano x, z

Plano y, z

Los tres planos en un único gráfico se muestran a continuación.

Figura 1

Plano cartesiano y sistema de coordenadas en perspectiva tridimensional.



Se concluye entonces que:

- a) Si se tiene $z = f(x, y)$, las variables independientes son x, y . El dominio es una superficie delimitada dentro del plano x, y .
- b) Si se tiene $y = f(x, z)$, las variables independientes son x, z . El dominio es una superficie delimitada dentro del plano x, z .
- c) Si se tiene $x = f(y, z)$, las variables independientes son y, z . El dominio es una superficie delimitada dentro del plano y, z .

Ejemplo 3

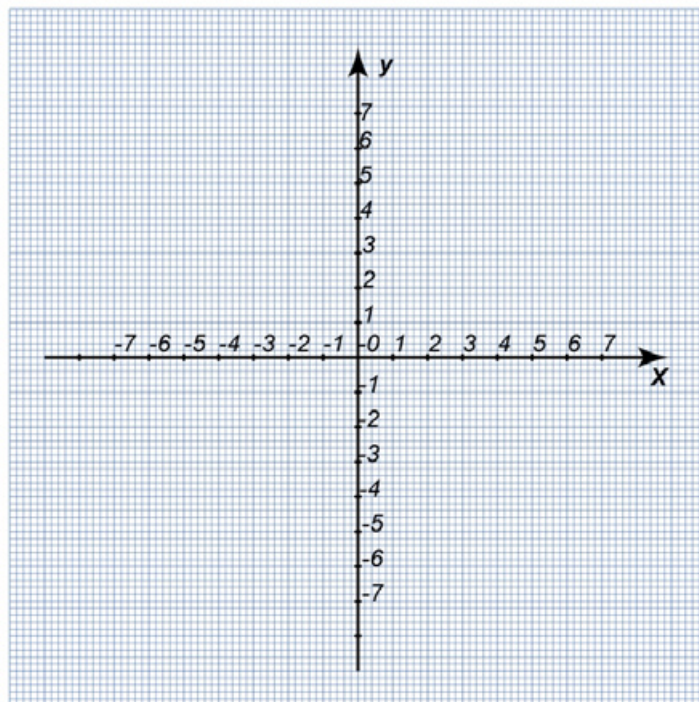
Encontrar el dominio de la función

$$z = 3x + 2y$$

La expresión $3x+2y$ tiene sentido para todos los valores de x,y . Por lo tanto, el dominio para que exista z , es todo el plano $x y$; es decir, no existen valores de x, y impedidos.

Figura 2

Ejes coordenados sobre papel cuadriculado con el origen destacado.



Ejemplo 4

Encontrar el dominio de la función

$$y = (1-x^2-z^2)^{1/2}$$

La expresión $(1-x^2-z^2)^{1/2}$ no tiene sentido dentro de los números reales si $(1-x^2-z^2)$ es menor o igual a 0, porque tendríamos raíz de un número negativo.

Entonces la condición de existencia de y , variable dependiente, es que $(1-x^2-z^2) \geq 0$, o lo que es lo mismo $1 \geq x^2+z^2$, o también $x^2+z^2 \leq 1$

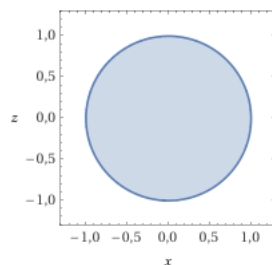
Para encontrar el dominio de la función debemos considerar primero la ecuación $x^2+z^2=1$ que representa a un círculo de radio 1, y es la frontera del dominio.

Los puntos (x,y) internos representan el dominio D porque representan a $x^2+z^2 \leq 1$.

Como se indica en la zona sombreada de la figura que representa el dominio en el plano x,z .

Figura 3

Ejemplo de dominio gráfico en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Alpha

Ejemplo 5

Encontrar el dominio de la función

$$x = \ln(y+z)$$

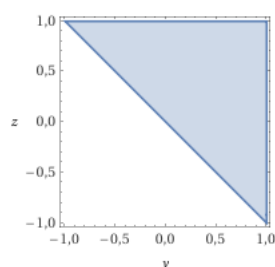
Para el presente caso debemos recordar que únicamente existen logaritmos de números positivos, por tanto, para que exista x , las variables independientes $(y+z)$ debe ser mayor a 0, entonces $(y+z) > 0$, o lo que es lo mismo $y > -z$.

Para encontrar el dominio de la función debemos considerar primero la ecuación $y = -z$ que representa a una recta en el plano yz con pendiente negativa, y es la frontera del dominio. Los puntos (x,y) sobre la recta representan el dominio D porque representan a $(y+z) > 0$.

Como se indica en la zona sombreada de la figura que representa el dominio en el plano y,z .

Figura 4

Ejemplo de gráfico de dominio representado en formato GIF



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Alpha

En general, para determinar el dominio de una función se debe considerar las características de la función, por ejemplo, si contiene raíz, es fraccionaria, logarítmica u otras similares.

Enlace 1. Para el caso de funciones que contienen raíz cuadrada, lo primero a considerar es que, al trabajar en los números reales, la expresión que se encuentra dentro de la raíz debe ser mayor o igual a 0, de esa condición salen las restricciones para las variables independientes y generan el área de dominio. En el siguiente video se muestra la solución de dos ejemplos y se propone la solución de otros.

<https://youtu.be/Qn2p1b1HB38?si=VnZWpMKpcVF17whO>

Enlace 2. Para el caso de funciones que contienen fracciones, lo primero a considerar es que, no existe división para 0, por tanto, toda la expresión que compone el denominador debe ser diferente de 0, de esa condición salen las restricciones para las variables independientes y generan el área de dominio. En el siguiente video se muestra la solución de dos ejemplos y se propone la solución de otros.

<https://youtu.be/k9Ierxuawho?si=x-gcpcTsE3Gh8BK7>

1.1.2. Funciones en componentes paramétricas

De acuerdo con George B. Thomas (2010), las funciones también pueden ser vectoriales cuyas componentes cartesianas son también funciones en términos de una variable independiente llamada parámetro, cuyo dominio se encuentra supeditado a lo que representa el parámetro. Así, por ejemplo, si el parámetro es t que representa el tiempo, no puede ser negativo. Son funciones que facilitan la descripción de fenómenos, especialmente físicos.

$$F[X(t), Y(t), Z(t)] = X(t)i + Y(t)j + Z(t)k$$

$X(t), Y(t), Z(t)$ son funciones con parámetro t

Funciones vectoriales se utilizan en física para describir posiciones, velocidades y aceleraciones en el tiempo.

Ejemplo 6

La función P representa el vector posición para cualquier tiempo t .

$$P = \text{sen}(t)i + \cos(t)j$$

La componente x de la posición se encuentra representada por $x = \text{sen}(t)$

La componente y de la posición se encuentra representada por $y = \cos(t)$

Para cada valor del parámetro t que representa el tiempo, se obtiene un punto de coordenadas (x, y) en el plano xy . El dominio de la función P son los valores reales positivos de t .

En el ejemplo se puede apreciar que todos los puntos de coordenadas (x,y) que se obtienen para cada valor de t real positivo, forman parte de un círculo de radio 1.

Si partimos de una identidad trigonométrica muy conocida

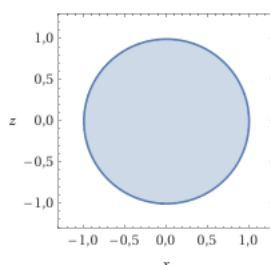
$$\text{sen}^2(t) + \text{cos}^2(t) = 1, \text{ reemplazando } x = \text{sen}(t), y = \text{cos}(t)$$

Obtenemos:

$x^2 + y^2 = 1$ Ecuación de un círculo, es decir la trayectoria en el tiempo es un círculo.

Figura 5

Representación de una trayectoria circular mediante una función vectorial en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Alpha

1.1.3. Aplicaciones en la vida real

El análisis del dominio de funciones de múltiples variables es una herramienta fundamental en la resolución de problemas del mundo real. Según Piskunov (1977) y Thomas (2010), comprender las restricciones y características

de los dominios no solo permite definir el alcance de las funciones matemáticas, sino que también ayuda a modelar fenómenos naturales y tecnológicos de manera precisa.

En física, el dominio se aplica al modelado de campos vectoriales, como los campos electromagnéticos, donde las funciones vectoriales definen propiedades como la intensidad y dirección en una región específica del espacio. Por ejemplo, al estudiar la propagación de ondas electromagnéticas, el dominio de la función que describe la onda está limitado por las condiciones iniciales y los medios a través de los cuales viaja.

En ingeniería civil, el dominio se utiliza en el análisis estructural y geotécnico. Las funciones multivariantes pueden describir la distribución de tensiones en un material o la interacción entre estructuras y el suelo. En estos casos, el dominio está definido por los límites físicos del objeto de estudio y las condiciones de contorno, como las fronteras de un terreno o el área de una estructura.

En economía, el dominio de funciones multivariantes permite modelar sistemas complejos, como la relación entre producción, costos y beneficios. Por ejemplo, una función que describe el beneficio de una empresa puede tener como dominio los valores de insumos y factores productivos disponibles. La comprensión de este dominio ayuda a los economistas a identificar las combinaciones viables para maximizar los resultados.

Por último, en el diseño gráfico y la animación por computadora, el dominio de las funciones vectoriales es esencial para definir trayectorias y movimientos. Las curvas paramétricas permiten describir movimientos precisos en animaciones, donde el dominio del parámetro, como el tiempo, determina la duración y el alcance de la animación.

1.1.4. Conclusión

El dominio de las funciones de múltiples variables es un concepto clave en matemáticas aplicadas, ya que define las restricciones y posibilidades dentro de las cuales una función puede operar. Tanto Piskunov (1977) como Thomas (2010) subrayan la importancia de analizar el dominio para interpretar y modelar fenómenos complejos de manera efectiva.

Desde aplicaciones en física hasta problemas económicos y de diseño, el análisis del dominio permite resolver desafíos prácticos y aprovechar al máximo las herramientas matemáticas. La identificación precisa del dominio no solo garantiza resultados coherentes, sino que también amplía las posibilidades de aplicación, convirtiéndose en un recurso esencial para científicos, ingenieros y diseñadores en su trabajo cotidiano.

1.2. Recorrido

El recorrido de una función representa los valores que toma la variable dependiente para cada combinación posible de las variables independientes dentro del dominio D . Según Piskunov (1977), el recorrido es fundamental para comprender la relación entre las entradas y salidas de una función, ya que define el conjunto de resultados que pueden esperarse al operar dentro de los límites del dominio. Por su parte, Thomas (2010) enfatiza que analizar el recorrido es clave para interpretar gráficamente el comportamiento de una función y determinar cómo esta responde ante variaciones en sus variables independientes.

En este contexto, entender el recorrido no solo implica conocer los valores alcanzables de la función, sino también explorar cómo estos se distribuyen y si presentan alguna restricción o simetría en su representación gráfica. Esto es particularmente relevante en aplicaciones prácticas, donde el recorrido puede determinar las posibles soluciones de un problema o las limitaciones de un modelo.

1.2.1. Funciones en componentes cartesianas

En el ejemplo 3, el recorrido, es el valor que toma z para cualquier punto del dominio D , que es cualquier punto del plano $x y$. El recorrido son los reales.

En el ejemplo 4, el recorrido, es el valor que toma y para cualquier punto (x, z) del dominio D de la función, que corresponde a los puntos ubicados dentro del círculo de radio 1. El recorrido son los reales positivos.

1.2.2. Funciones en componentes paramétricas

Con el mismo criterio, cuando una función está definida en componentes paramétricas, el recorrido se obtiene considerando cómo los valores del parámetro (o parámetros) afectan las variables dependientes. En este caso, la relación funcional se expresa en términos de uno o más parámetros que actúan como intermediarios para conectar las variables independientes con las dependientes.

Por ejemplo, una curva en el espacio puede describirse mediante funciones paramétricas:

$$x=f(t), y=g(t), z=h(t)$$

donde t es el parámetro que define la posición en la curva. Aquí, el recorrido se forma por todos los puntos (x,y,z) generados al variar t dentro de un intervalo específico, que depende del dominio permitido para t .

En términos prácticos, determinar el recorrido en este contexto implica:

1. Identificar el intervalo del parámetro t .
2. Calcular las imágenes de las funciones $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ dentro de ese intervalo.

3. Analizar las relaciones geométricas o algebraicas entre las componentes para comprender la forma y límites del recorrido.

Este enfoque es especialmente útil en geometría analítica y física, donde las trayectorias de objetos o partículas suelen describirse paramétricamente.

1.2.3. Aplicaciones en la vida real

El concepto de recorrido de funciones de múltiples variables tiene aplicaciones prácticas en numerosos campos de la ciencia, la ingeniería y la tecnología. Según Piskunov (1977) y Thomas (2010), el análisis del recorrido es esencial para modelar fenómenos en los que la relación entre las variables es compleja y depende de múltiples factores.

En física, por ejemplo, el recorrido de una función puede describir las posiciones posibles de una partícula dentro de un espacio tridimensional, dependiendo de parámetros como el tiempo. Esto es crucial en el estudio de trayectorias, donde las funciones paramétricas se utilizan para definir las coordenadas espaciales de un objeto en movimiento.

En ingeniería, el recorrido se aplica al diseño de sistemas mecánicos y electrónicos. Por ejemplo, en la modelación de circuitos eléctricos, las funciones multivariantes pueden representar la relación entre voltaje, corriente y resistencia, mientras que el recorrido determina las salidas posibles bajo diferentes condiciones de operación.

En economía y estadística, los modelos de múltiples variables utilizan el recorrido para analizar cómo los cambios en ciertos factores afectan los resultados esperados. Un ejemplo clásico es el análisis de precios y demanda, donde el recorrido representa los valores posibles de las ganancias o costos en función de las variables relacionadas.

Finalmente, en la geometría computacional y en el diseño gráfico, el recorrido permite definir formas y estructuras en espacio tridimensional, facilitando la creación de modelos visuales y su interpretación en simulaciones o animaciones.

1.2.4. Conclusión

En resumen, el estudio del recorrido en funciones de múltiples variables es un tema fundamental para entender las relaciones entre variables y sus aplicaciones prácticas. Desde la definición teórica hasta su representación paramétrica, el recorrido no solo describe el comportamiento de una función, sino que también ofrece herramientas para resolver problemas reales en áreas como la física, la ingeniería y las ciencias sociales.

Referencias citadas en la Clase 1.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación.

Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 1

Dominio (Definición): Una función $z=f(x,y)$ de un conjunto D a un conjunto E es una regla que asigna a cada elemento (x,y) que pertenece a D un solo o único elemento $f(x,y)$ que pertenece a E . El conjunto D de todos los valores posibles de entrada se denomina dominio de la función.

Recorrido o Rango (Definición): El conjunto de todos los valores de $f(x,y)$ cuando (x,y) varía por todos los valores de D se denomina recorrido o rango de la función. El rango podría no incluir a todos los elementos del conjunto E .



La excelencia no se improvisa

síguenos

