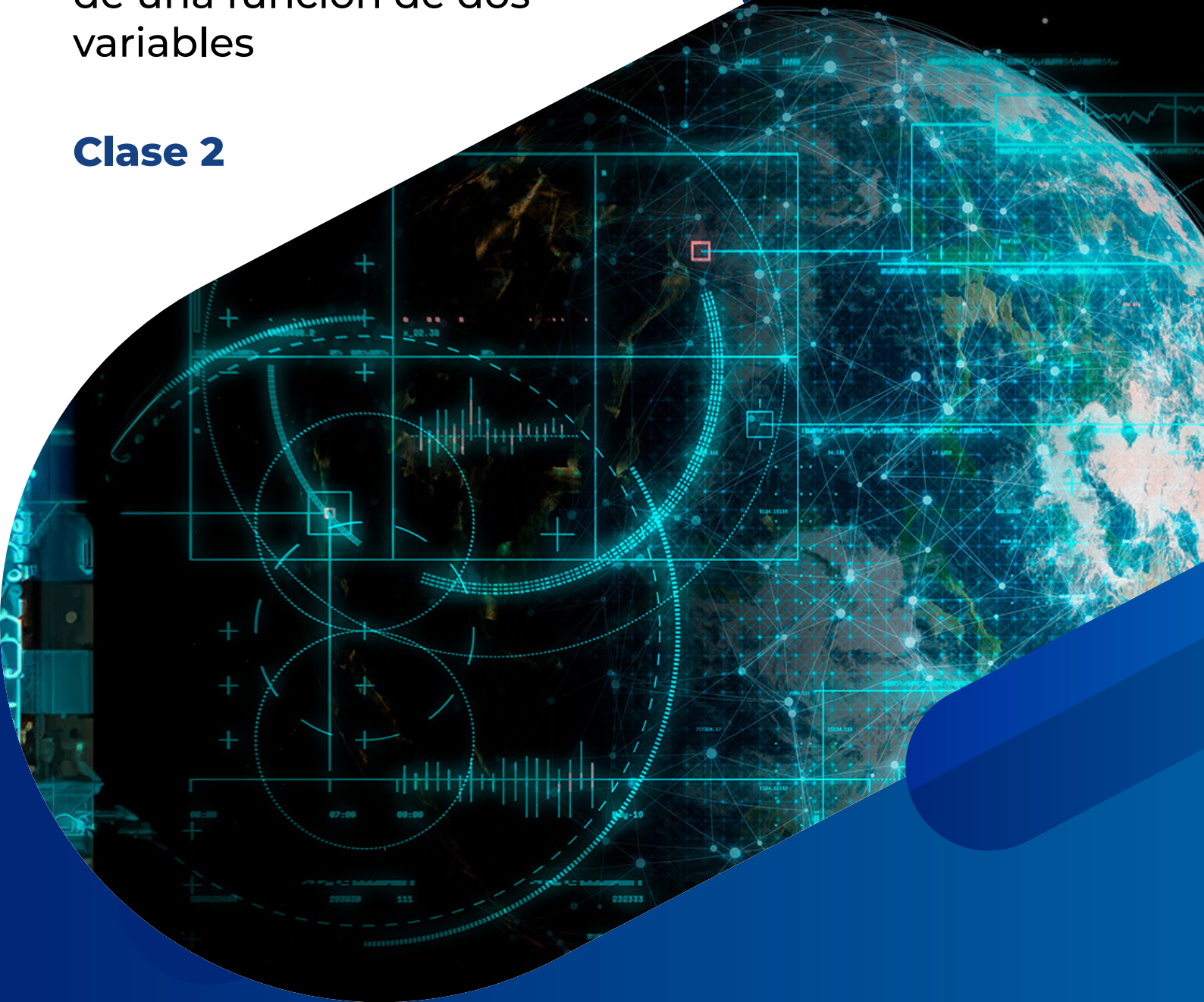


Cálculo II

Representación geométrica
de una función de dos
variables

Clase 2



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Clase 2: Representación geométrica de una función de dos variables

Imaginemos una función de dos variables $z=f(x,y)$ definida en el dominio D del plano xy . Este dominio puede, en algunos casos, abarcar todo el plano y estar representado dentro de un sistema de coordenadas cartesianas x,y,z . Toma cualquier punto (x,y) dentro del dominio D . Desde ese punto, tracemos una línea perpendicular al plano xy y marquemos sobre ella un segmento cuya longitud es igual al valor $z=f(x,y)$. De esa manera, obtenemos en el espacio un punto P de coordenadas (x,y,z) .

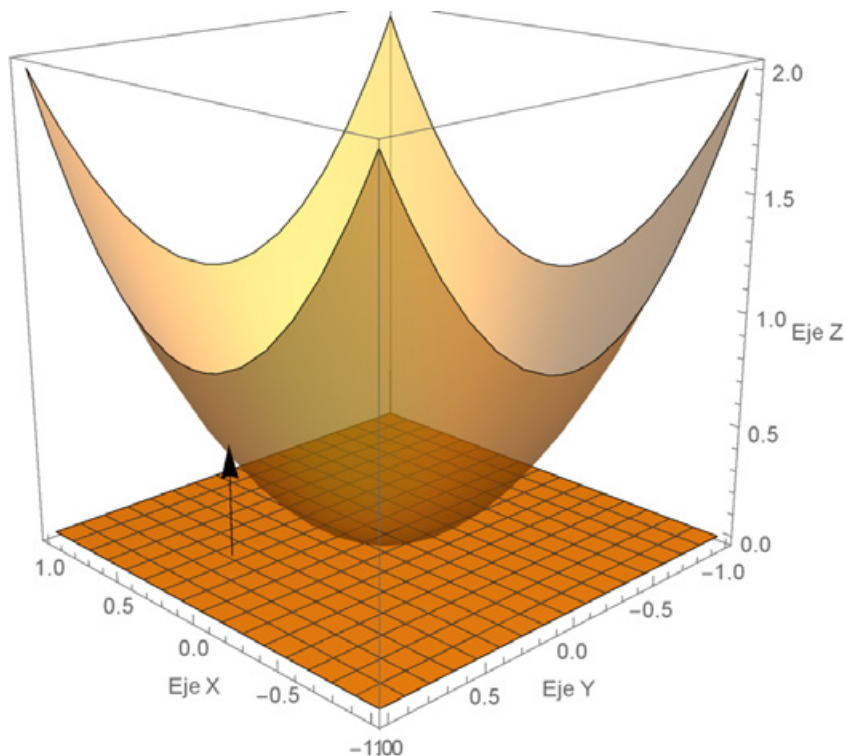
En esencia, el lugar geométrico de los diferentes puntos P , cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $z=f(x,y)$, representa una superficie en el espacio, conocida como gráfica de la función de dos variables; así, por ejemplo:

Ejemplo 1

Graficar la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ con su dominio.

Figura 1

Ejemplo de gráfico de función en dos variables independientes con su dominio D que resulta ser todo el plano x,y (en cuadrícula) en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Alpha

En el gráfico se puede apreciar que no existe restricción para los valores de x, y , y el dominio representa todo el plano x, y . Para cada punto (x_l, y_l) del dominio, se obtiene una altura z_l que se calcula con la ecuación $z_l = x_l^2 + y_l^2$, para obtener un punto $P_l = (x_l, y_l, z_l)$ que forma parte de la superficie. Entonces la superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (semitransparente) se encuentra formada por un enorme cantidad de puntos P .

Reto # 1

2. Tema: Interpretación gráfica de límites y continuidad en gráficos

2.1. Incremento parcial y total de una función de dos variables

El análisis de las variaciones de una función de dos variables constituye uno de los pilares fundamentales en el cálculo diferencial, ya que permite comprender cómo pequeñas alteraciones en las variables

independientes afectan al valor de la función. Dentro de este marco, los conceptos de incremento parcial y total son herramientas clave para descomponer y analizar esos cambios de manera precisa.

Según Piskunov (1977), estos incrementos permiten aproximar de forma eficaz el comportamiento de una función alrededor de un punto dado, facilitando la interpretación de fenómenos complejos en términos matemáticos. Por su parte, Thomas (2010) resalta que el incremento total se construye a partir de los incrementos parciales, lo que refleja cómo cada variable contribuye individualmente al cambio total en la función.

Estos conceptos no solo tienen relevancia teórica, sino que también son fundamentales en aplicaciones prácticas, como la optimización de procesos, la modelización de sistemas físicos y la resolución de problemas ingenieriles. Al analizar cómo una función responde a variaciones específicas, se obtiene una base sólida para el estudio de gradientes, derivadas direccionales y aproximaciones lineales.

A continuación, se desarrollará el concepto de incremento parcial y total, basado en los textos de N. Piskunov (1977) y G. B. Thomas (2010), explicando sus propiedades y mostrando ejemplos prácticos que ilustran su utilidad en contextos diversos. Este recorrido permitirá no solo asimilar los fundamentos teóricos, sino también visualizar su aplicación en problemas reales, conectando la teoría con su impacto en múltiples disciplinas.

2.1.1 Definición del Incremento Parcial

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables independientes x y y . El incremento parcial de f mide el cambio en su valor cuando una de las variables independientes cambia de valor mientras la otra se mantiene constante. Esto permite aislar el efecto de una sola variable en la función.

2.1.2 Incremento Parcial respecto a x

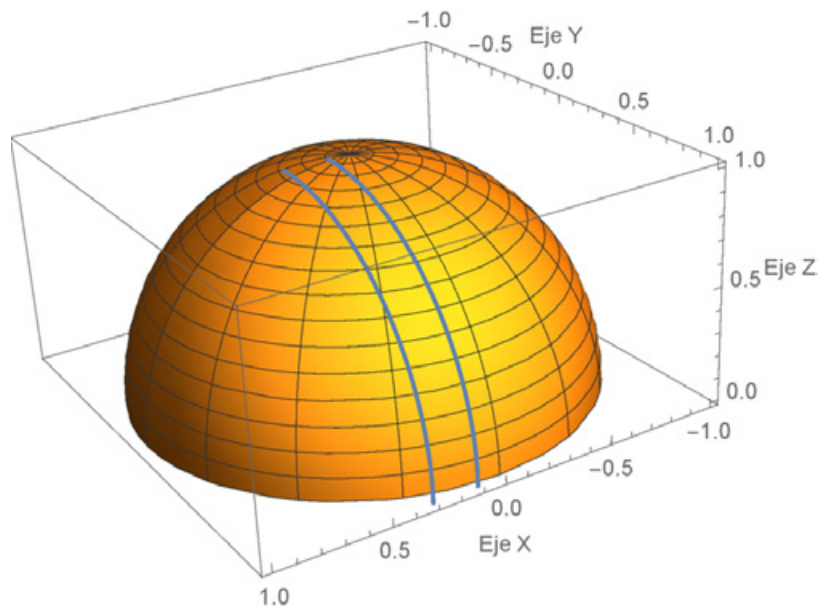
Si x experimenta un cambio Δx , manteniendo la variable y constante, el incremento parcial de z respecto a x se define como:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Este incremento refleja el cambio en el valor de z cuando solo x varía, manteniendo la variable y fijo, es decir la variación se presenta únicamente en el plano xz conforme se indica en el siguiente gráfico:

Figura 2

Representación de la función $z=f(x, y)$, $x_1=0.1$; $\Delta x=0.2$; $x_2=0.1+\Delta x=0.3$ en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

2.1.3 Incremento Parcial respecto a y

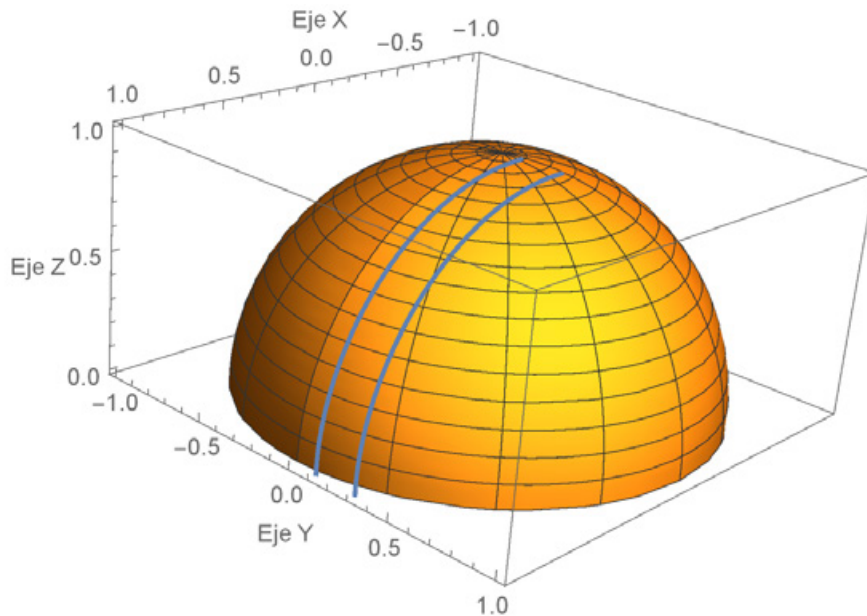
De forma análoga, si y varía en Δy , mientras que x permanece constante, el incremento parcial de z respecto a y se define como:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

El incremento parcial de z respecto a y refleja cómo cambia z cuando solo y se modifica, manteniendo x constante, es decir la variación se presenta únicamente en el plano yz conforme se indica en el siguiente gráfico:

Figura 3

Representación de la función $z=f(x, y)$, $y_1=0.1$; $\Delta y=0.2$; $y_2=0.1+\Delta y=0.3$ en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

2.1.4 Representación Geométrica del Incremento Parcial

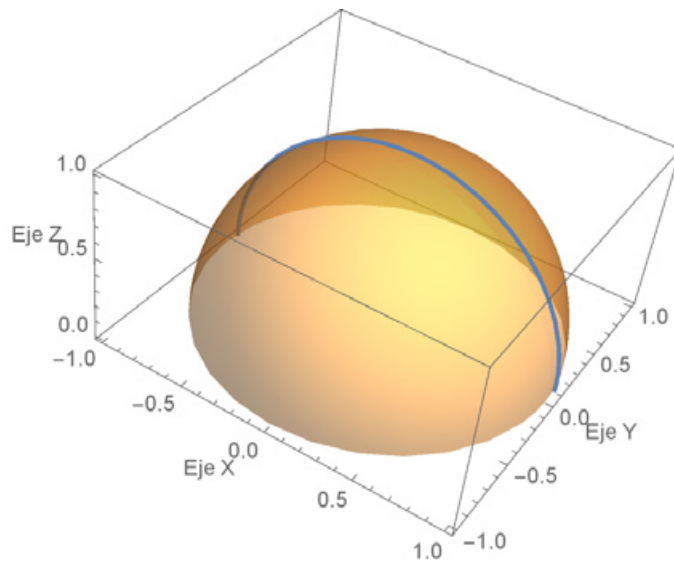
Los incrementos parciales se pueden visualizar geométricamente a través de las curvas de nivel de la función. Estas curvas representan las intersecciones de la superficie $z=f(x,y)$ con planos xz , yz paralelos a los ejes coordenados.

Curvas Paralelas a los Planos Coordenados

- **Plano xz :** Cuando y es constante, el incremento parcial respecto a x corresponde a la pendiente de la curva obtenida al cortar la superficie $z=f(x,y)$ con un plano paralelo al plano xz .

Figura 4

Representación de la curva de nivel (curva celeste) en el plano xz con y constante en formato GIF.

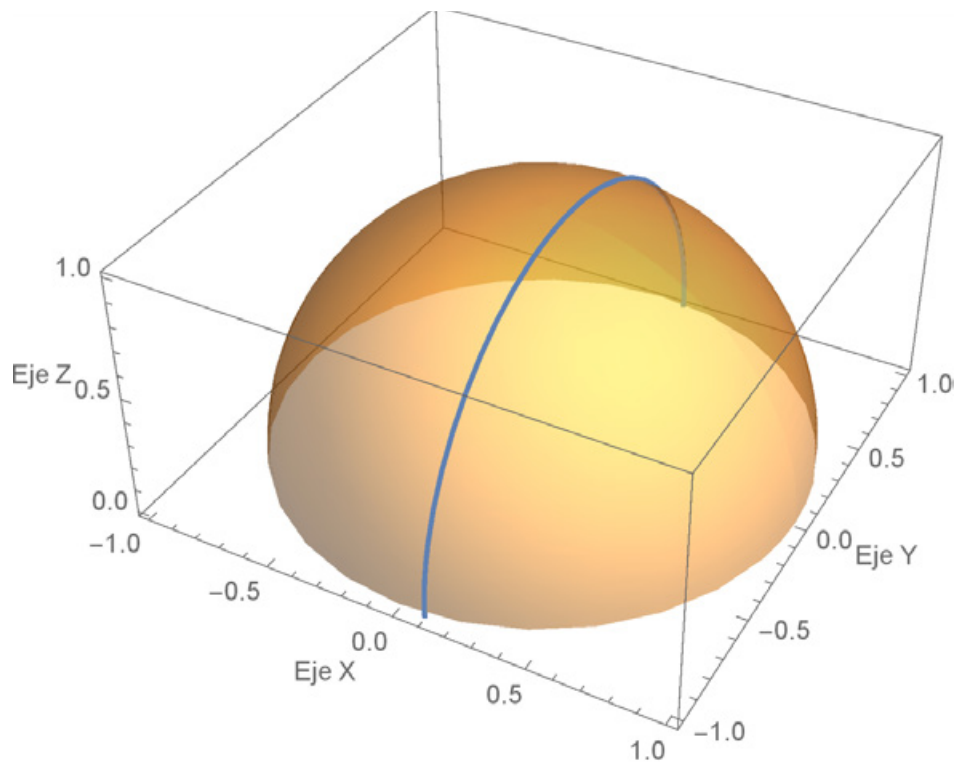


Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

- **Plano yz :** Cuando x es constante, el incremento parcial respecto a y es la pendiente de la curva obtenida al cortar la superficie $z=f(x,y)$ con un plano paralelo al plano yz .

Figura 5

Representación de la curva de nivel (curva celeste) en el plano xz con x constante en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

2.1.5 Incremento Total de una Función de Dos Variables

El incremento total de una función de dos variables se refiere al cambio en $z=f(x,y)$ cuando ambas variables x y y experimentan pequeños cambios Δx y Δy simultáneamente. Este cambio se puede aproximar por una aproximación lineal, que es la base para el cálculo del incremento total.

La definición del incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Notemos que, en general, el incremento total no es igual a la suma de los incrementos parciales, es decir, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

2.1.6 Interpretación Geométrica del Incremento Total

Geométricamente, el incremento total representa el cambio en la altura de la superficie $z=f(x,y)$ cuando nos movemos desde el punto (x,y) hacia el punto

$(x+\Delta x, y+\Delta y)$. La aproximación lineal del incremento total se interpreta como el plano tangente a la superficie en el punto (x,y) , el cual proporciona una estimación del cambio total en $z=f(x,y)$ cuando Δx y Δy son pequeños.

Ejemplo de incrementos parciales y total

Consideremos la función $z=f(x,y)=xy$, para $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0,2$, $\Delta y=0,3$.

Determinar:

- Los incrementos parciales $\Delta_x z$, $\Delta_y z$
- El incremento total Δz
- Verificar que se cumple $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y \Delta x$$

$$\Delta_x z = 0,4$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x \Delta y$$

$$\Delta_y z = 0,3$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - f(x, y) = y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \Delta y$$

$$\Delta z = 0,76$$

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

$$0,76 \neq 0,4 + 0,3$$

2.1.7 Aplicaciones del Incremento Parcial y Total

1. **Optimización Multivariable:** El estudio de los incrementos parciales y totales es esencial para la optimización multivariable, donde se busca encontrar puntos críticos y determinar la dirección del cambio más rápido de una función.
2. **Aproximación Numérica:** En ingeniería y física, el incremento total se utiliza para aproximar los cambios en sistemas complejos donde las variables cambian simultáneamente.
3. **Modelado de Sistemas:** Los incrementos parciales y totales son clave para modelar fenómenos que dependen de múltiples variables, como la transferencia de calor, el flujo de fluidos y otros fenómenos físicos.

Ejemplo de aplicación:

Enlace 1. Un consumidor puede comprar dos artículos A y B en cantidades x e y . La utilidad que se consigue con este consumo viene dada por la función: $z=U(x, y)=(xy^2)^{1/3}$. Actualmente su consumo es de 24 unidades de A y 3 de B . Calcular:

- La utilidad obtenida por el consumo actual.
- Δy $U(24,3)$, si $\Delta y = 0,5$. Interpretar el resultado obtenido.
- Si el consumidor decidiera dejar de consumir 4 unidades de A para consumir otras tantas de B ¿Aumentaría con ello la utilidad?

En el siguiente video se muestra la solución del ejemplo descrito y otro aplicado a la economía.

<https://youtu.be/rbnU9eDyt-k?si=CHTmcbJnzjIL0gyu>

2.1.8 Conclusión

El análisis de los incrementos parciales y totales en funciones de dos variables es un aspecto fundamental del cálculo diferencial que facilita la comprensión de cómo las variaciones de las variables afectan el comportamiento de una función. A través de aproximaciones lineales, como las derivadas

parciales, se pueden hacer estimaciones precisas sobre los cambios en la función cuando las variables experimentan pequeñas modificaciones. Estas herramientas son esenciales en múltiples campos, incluyendo la optimización, el modelado físico y la ingeniería.

2.2. Continuidad de la función de dos variables

La continuidad de una función de dos variables es un concepto fundamental en el cálculo multivariable, estrechamente relacionado con el comportamiento suave y predecible de las funciones en su dominio.

Un ejemplo que ilustra este concepto es una función cuyo dominio incluye discontinuidades, como puntos donde el valor de la función no está definido o donde la función cambia abruptamente. Estas discontinuidades suelen reflejarse en la gráfica como interrupciones o irregularidades en la superficie. Basándonos en los textos de Piskunov (1977) y Thomas (2010), podemos entender este tema desde una perspectiva teórica y práctica.

Piskunov describe la continuidad como la propiedad que permite que pequeños cambios en las variables independientes x e y resulten en pequeños cambios en el valor de la función $z=f(x,y)$. Esto implica que la gráfica de la función, interpretada como una superficie en el espacio tridimensional, no presenta rupturas, saltos ni discontinuidades.

Thomas, por su parte, establece que para que una función $f(x,y)$ sea continua en un punto (a,b) , deben cumplirse tres condiciones esenciales.

La continuidad no solo es un tema teórico, sino también una herramienta práctica para modelar fenómenos naturales y resolver problemas en diversas disciplinas. A lo largo del estudio de este concepto, es crucial analizar tanto las definiciones formales como los ejemplos gráficos que facilitan su comprensión y aplicación.

2.2.1 Definición de Continuidad de una Función de dos Variables

Una función $z=f(x,y)$ de dos variables es continua en un punto $M_0(x_0,y_0)$ si, al acercarse al punto $M_0(x_0,y_0)$ desde cualquier dirección, el valor de la función se aproxima al valor de la función en ese punto, a lo que se denomina *vecindad* del punto .

Definición: Sea $M_0(x_0,y_0)$ el punto que pertenece al dominio de definición de la función $f(x,y)$. se dice que la función $z=f(x,y)$ es continua en el punto $M_0(x_0,y_0)$, si se cumple la igualdad:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Es decir, el límite de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) se acerca a $M_0(x_0,y_0)$ debe ser igual al valor de la función en ese punto. La continuidad en dos variables depende del comportamiento del límite en todas las direcciones posibles en el plano xy .

Si la condición anterior no se cumple en en cierto punto $N(x_0,y_0)$, este se llama punto de discontinuidad de la función $z=f(x,y)$.

Si reescribimos las variables $x=x_0+\Delta x$, $y= y_0+\Delta y$, entonces la ecuación de la definición se puede escribir como:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0)$$

Al tratarse de incrementos perpendiculares en un plano, se puede utilizar el teorema de Pitágoras $\Delta\rho=(\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}$, cuando Δx , Δy tienden a 0, entonces $\Delta\rho$ tiende a 0, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] &= 0 \\ \Delta x &\rightarrow 0 \\ \Delta y &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Sin embargo, $[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$ representa el incremento total Δz , por tanto:

$$\begin{aligned}\lim \Delta z &= 0 \\ \Delta\rho &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Entonces, una función continua en cada punto de un cierto dominio D , se llama continua en ese dominio.

2.2.2 Condiciones de Continuidad

De acuerdo con los libros de Piskunov (1977) y Thomas (2010), para que una función $f(x,y)$ sea continua en un punto (x_0,y_0) , deben cumplirse tres condiciones:

1. Existencia del valor de la función en el punto: $f(x_0,y_0)$ debe estar definido.
2. Existencia del límite de la función cuando $(x,y)\rightarrow (x_0,y_0)$: El límite debe existir de manera independiente de la dirección desde la que se acerquen los puntos (x,y) a (x_0,y_0) .
3. Igualdad entre el límite y el valor de la función: El límite de la función debe coincidir con el valor de la función en el punto de interés:

$$\begin{aligned}\lim f(x, y) &= f(x_0,y_0) \\ x &\rightarrow x_0 \\ y &\rightarrow y_0\end{aligned}$$

Enlace 2. Si la condición 3 no se cumple en cierto punto $N(x_0, y_0)$ este se llama punto de discontinuidad de la función $z=f(x, y)$.

En el siguiente video se muestra la solución de un ejemplo de análisis de continuidad de una función de dos variables mediante límites.

<https://youtu.be/IVLYkNxxkR0Y?si=Fbv-UtGHtEt9SVb>

Ejemplo de Función Continua

Consideremos la función $z=f(x,y)=x^2+y^3$

Esta es una función **continua** en todos los puntos (x,y) del dominio D que resulta ser todo el plano xy (No existen puntos impedidos x, y para que exista z)

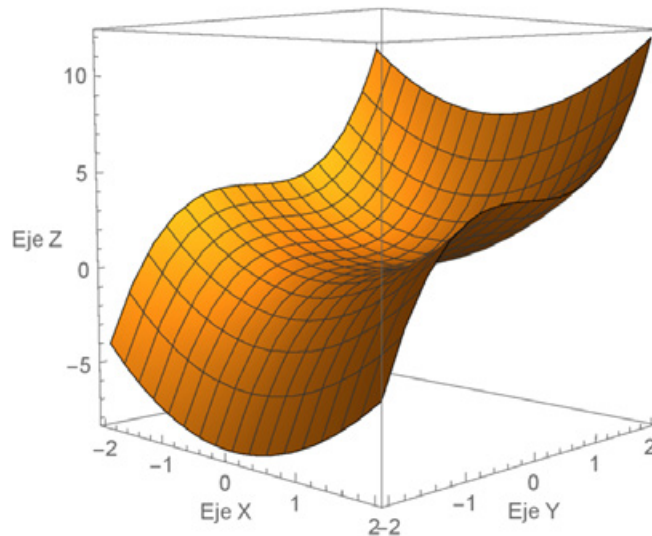
$$\begin{aligned}\Delta z &= [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^3 - (x^2 + y^3)] \\ \Delta z &= 2x \Delta x + 3y^2 \Delta y + 3y \Delta y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^3\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\lim \Delta z &= 0 \\ \Delta x &\rightarrow 0 \\ \Delta y &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Figura 6

*Representación de la función $z=f(x,y)=(x^2+y^3)$, para todo x, y elemento de los reales existe gráfico. Es **continua** en todo (x,y) elemento de los reales en formato GIF.*



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

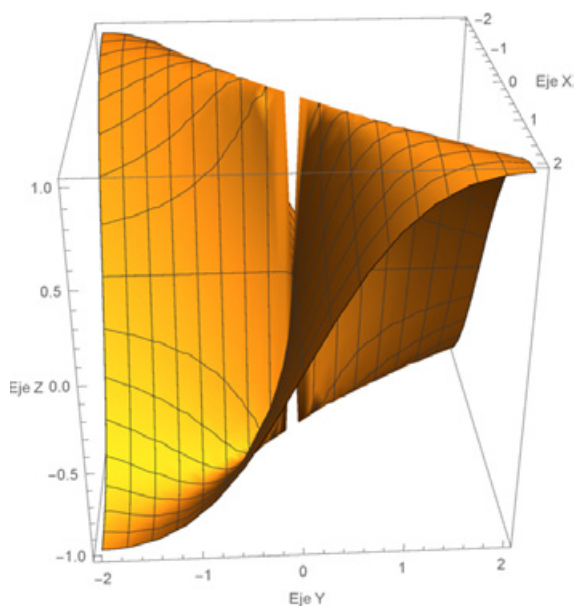
Ejemplo de función no Continua

Consideremos la función $z=f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$

Esta es una función **no continua** en todos los puntos (x,y) elemento de los reales, la discontinuidad se presenta en el punto $(0,0)$ porque no existe división para 0 (Si existen puntos impedidos x, y para que exista z)

Figura 7

Representación de la función $z=f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$, en $x=0$; $y=0$ no existe gráfico. Es discontinua en $(0,0)$ en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

2.2.3 Conclusión

La continuidad de funciones de dos variables es fundamental para el estudio del cálculo multivariable. A través de la comprensión de los límites y la forma en que se comporta una función en diferentes trayectorias, los estudiantes pueden identificar puntos de discontinuidad y comprender cómo se puede modelar el comportamiento de una función en su dominio. La clave es verificar la existencia del límite, y en caso de que no sea uniforme, concluir que la función no es continua en el punto.

Referencias citadas en la Clase 2

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación.

Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 2.

Incremento (Definición): Es el cambio que experimenta una variable o función, ya sea positivo o negativo, se calcula como la diferencia entre el valor final y el valor inicial. Su notación si la variable es x , sería Δx , cuya lectura es incremento de la variable x

Continuidad (Definición): Una función es continua en un punto si el límite bilateral en ese punto existe y es igual al valor de la función, es cuando una función no tiene interrupciones en su gráfico.



La excelencia no se improvisa

síguenos

