

Cálculo II

Dominio de integración
doble

Clase 5



La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Clase 5: Dominio de integración doble

¿Sabías que el dominio de una integral doble es fundamental en el cálculo de funciones de varias variables? Identificarlo correctamente y representarlo gráficamente no solo nos permite resolver integrales dobles con precisión, sino que también nos ayuda a comprender su significado geométrico. Por ejemplo, al visualizar el dominio y analizarlo, se refuerza la comprensión conceptual, lo que hace que las integrales dobles sean herramientas increíblemente versátiles y poderosas en ciencias e ingeniería.

De igual modo, en la ingeniería estructural, el dominio D puede representar algo tan concreto como la sección transversal de un componente, como una viga o una columna. En ese caso, una integral doble nos sirve para calcular propiedades fundamentales como el área o el centroide, elementos clave para diseñar y analizar estructuras de manera eficiente. Así, las matemáticas dejan de ser abstractas y se convierten en un puente entre la teoría y la práctica.

Reto # 2

5. Tema. Cálculo del dominio de integración de funciones en dos variables independientes en coordenadas cartesianas

5.1. Dominio de una integral doble

El dominio de una integral doble es un concepto fundamental en el cálculo de funciones de varias variables, especialmente en coordenadas cartesianas. Este tema es abordado en detalle en los textos *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo I* de N. Piskunov (1977) y *Cálculo* de Thomas G.B (2010), donde se explica cómo determinar las regiones de integración y sus límites correspondientes.

5.1.1 Definición del dominio

El dominio de una integral doble, denotado como D , es una región en el plano xy sobre la cual se evalúa la integral. Matemáticamente, una integral doble se expresa como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

donde $f(x, y)$ es una función definida en D y dA representa un elemento infinitesimal de área, que se puede reemplazar por el área de un rectángulo infinitesimal $dx dy$. El dominio D puede tener diversas formas, desde simples rectángulos hasta regiones delimitadas por curvas más complejas.

5.1.2 Representación del dominio

Para comprender el dominio de integración, es crucial representarlo gráficamente en el plano xy . En coordenadas cartesianas, D se describe mediante desigualdades que determinan los límites de x y y . Por ejemplo, si D es un rectángulo, sus límites se expresan como:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

donde a, b, c, d son constantes. Si D está delimitado por curvas, los límites pueden depender de x o y , como en:

$$g1(x) \leq y \leq g2(x),$$

En este caso, $g1(x)$ y $g2(x)$ son funciones continuas que describen las fronteras superior e inferior de D .

Enlace 1. En el siguiente video se ofrecerá una explicación detallada sobre cómo calcular integrales dobles en regiones generales. A lo largo del contenido, se abordarán técnicas y conceptos clave para resolver este tipo de integrales en áreas no estándar.

<https://youtu.be/64eOuekRU4k?si=FhiVVyDBXXP2J-tq>

5.1.3 Determinación de límites

El cálculo de una integral doble requiere identificar correctamente los límites de xx y yy . Este proceso depende de la forma geométrica de RR :

- **Región rectangular:** Los límites de xy son constantes y la integral se descompone en dos integrales iteradas:

$$a \leq x \leq b \qquad c \leq y \leq d$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

- **Región general:** Cuando D está definido por curvas, los límites de una variable dependen de la otra. Por ejemplo:

Cuando los límites en x son constantes y los de y son funciones de x

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

En este caso, la integración iterada primero considera y , variando entre $g1(x)$ y $g2(x)$, y luego x , variando entre a y b

Cuando los límites en y son constante y en x son funciones de y

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

En este caso, la integración iterada primero considera x , variando entre $h1(y)$ y $h2(y)$, y luego y , variando entre c y d .

5.1.4 Representación gráfica y análisis visual

La representación gráfica del dominio es esencial para visualizar el problema. Esta representación facilita la comprensión del orden de integración y asegura que los límites se establezcan correctamente. Además, permite identificar simetrías o simplificaciones.

Cuando D tiene formas más complejas, como regiones delimitadas por círculos o elipses, es útil dividir D en subregiones más simples. Alternativamente, se pueden usar coordenadas polares para simplificar los límites y el cálculo de la integral.

Ejemplos prácticos

Ejemplo 1:

Graficar y determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x,y)dA$, donde el dominio de integración D está limitado por las rectas $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$

Solución:

Graficamos las rectas que delimitan el dominio. El resultado es el rectángulo, intersección de las dos zonas delimitadas por x entre 2 y 3, mientras que y entre -1 y 5.

Figura 1

*Representación gráfica de región delimitada por las rectas $x=2$ a $x=3$ y región delimitada por las rectas horizontales $y=-1$ a $y=5$, que representa el dominio D , generada en **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 5, dominio ejemplo1.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Se puede visualizar que tanto x , como y son constantes, por lo que los límites de integración quedarían como:

$$2 \leq x \leq 3 \qquad -1 \leq y \leq 5$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_2^3 \left[\int_{-1}^5 f(x, y) dy \right] dx$$

Ejemplo 2:

Graficar y determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x, y) dA$, donde el dominio de integración D está limitado por $y=0$, $y=1-x^2$

Solución:

Primero debemos encontrar los puntos comunes o de corte entre $y=0$, $y=1-x^2$, es indispensable para conocer entre que valores se delimita x .

$$\text{Igualamos } y=0, y=1-x^2$$

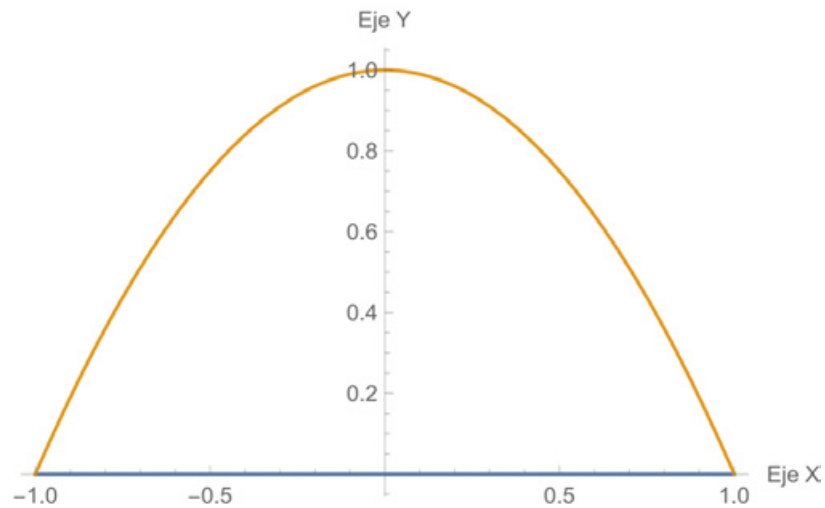
$$0=1-x^2$$

$$x=\pm 1, \text{ entonces } x \text{ varía entre } -1 \text{ y } 1$$

Graficamos las curvas que delimitan el dominio. El resultado es la intersección de las dos zonas delimitadas por y , entre $y=0$ y $y=1-x^2$.

Figura 2

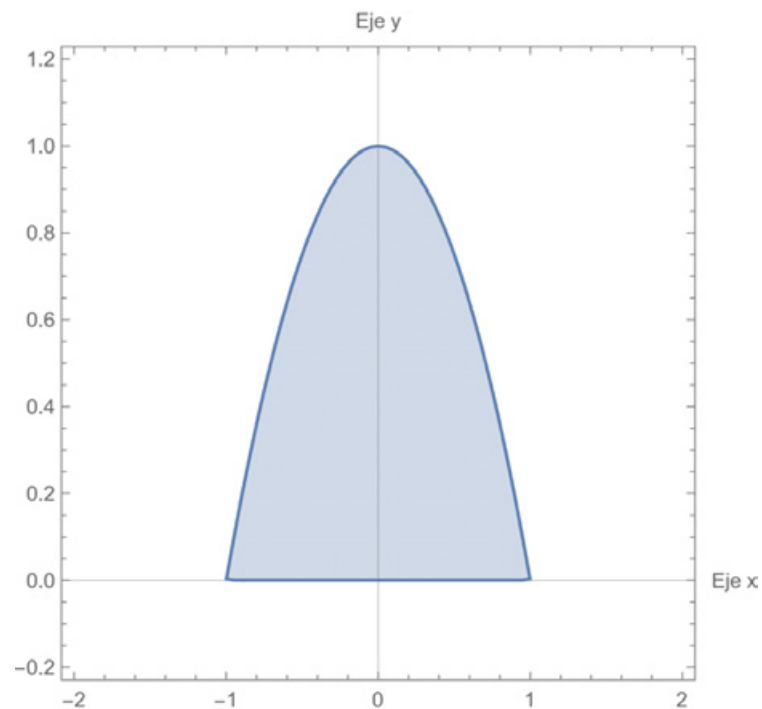
*Representación gráfica de la recta $y=0$ y la curva $y=1-x^2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Figura 3

*Representación gráfica de región delimitada por $y=0$, $y=1-x^2$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Como se determinó que el menor valor de x es $a=-1$ y el valor mayor es $b=1$, se puede visualizar que el menor valor de y es $g1(x)=0$ y $g2(x)=1-x^2$, por lo que los límites de integración quedarían como:

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad 0 \leq y \leq 1-x^2$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{1-x^2} f(x,y) dy \right] dx$$

Ejemplo 3:

Graficar y determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x,y) dA$, donde el dominio de integración D está limitado por $x^2 + y^2 = 2^2$

Solución:

Primero debemos encontrar los valores mínimo y máximo que puede tomar x , es indispensable para conocer entre que valores se delimita x .

Reemplazamos el valor de $y=0$, para tener la ecuación únicamente valores de x .

$$x^2 + 0^2 = 2^2$$

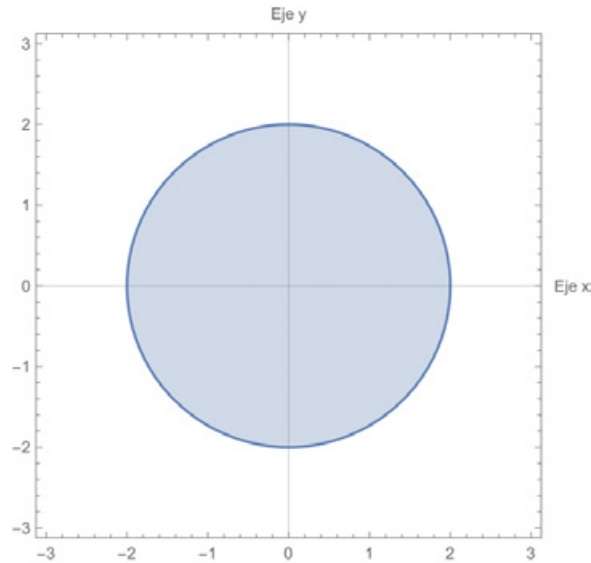
$$0 = 4 - x^2$$

$$x = \pm 2, \text{ entonces } x \text{ varía entre } -2 \text{ y } 2$$

Graficamos la curva $x^2 + y^2 = 2^2$ que delimitan el dominio, su resultado es un círculo de radio 2, delimitadas por x entre -2 y 2, mientras que y entre $y = -(2^2 - x^2)^{1/2}$, $y = (2^2 - x^2)^{1/2}$

Figura 4

*Representación gráfica de región delimitada por $x=-2$, $x=2$, $y=-(2^2 - x^2)^{1/2}$, $y=(2^2 - x^2)^{1/2}$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Como se puede observar que el menor valor de x es $a=-2$ y el valor mayor es $b=2$. El semicírculo inferior, que corresponde al menor valor de y , es $g1(x) = -(2^2 - x^2)^{1/2}$, y el valor mayor de y es $g2(x) = (2^2 - x^2)^{1/2}$. Por tanto, los límites de integración quedarían como:

$$-2 \leq x \leq 2 \quad - (2^2 - x^2)^{1/2} \leq y \leq (2^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{-2}^2 \left[\int_{-(2^2 - x^2)^{1/2}}^{(2^2 - x^2)^{1/2}} f(x, y) dy \right] dx$$

Ejemplo 4:

Graficar y determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x, y) dA$, donde el dominio de integración D está limitado por $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$

Solución:

Primero debemos encontrar los puntos comunes o de corte entre $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$, es indispensable para conocer entre que valores se delimita x .

Igualemos $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$

$$2/(1+x^2) = x^2$$

$$0=(x^2+2)(x^2-1)$$

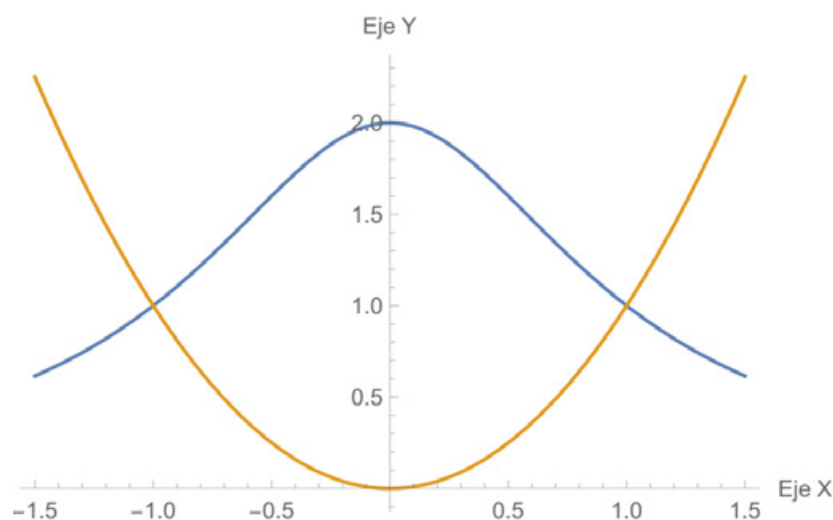
$(x^2+2)=0$ tiene como resultado raíces imaginarias, $(x^2-1)=0$ tiene como resultado raíces reales.

$x=\pm 1$, entonces x varía entre -1 y 1

Graficamos las curvas $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$ que delimitan el dominio, su resultado es un gráfico delimitado por x entre -1 y 1 , mientras que y entre $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$

Figura 5

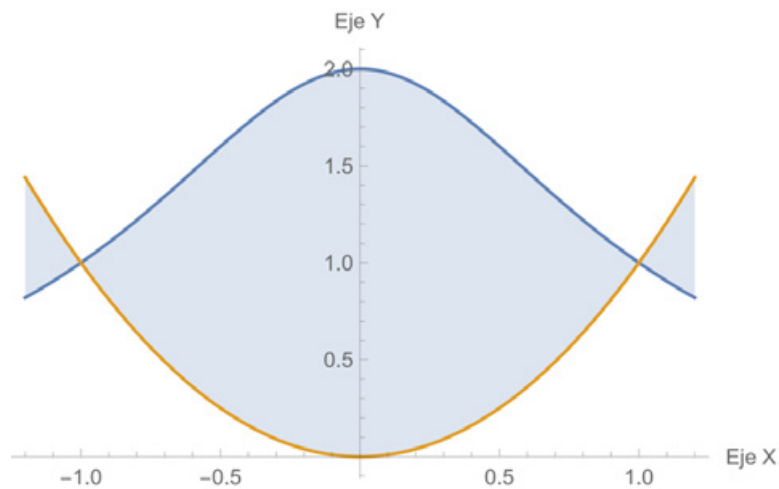
Representación gráfica de las curvas: superior $y=2/(1+x^2)$, inferior $y=x^2$ con Wolfram Mathematica, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Figura 6

Representación gráfica de región delimitada por $y=2/(1+x^2)$, $y=x^2$ que representa el dominio D con Wolfram Mathematica, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Como se puede observar que el menor valor de x es $a=-1$ y el valor mayor es $b=1$, el semicírculo inferior que corresponde al menor valor de y es $g1(x)=x^2$, y el valor mayor de y es $g2(x)=2/(1+x^2)$. Por lo tanto, los límites de integración quedarían como:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad x^2 \leq y \leq 2/(1+x^2)$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{2/(1+x^2)} f(x,y) dy \right] dx$$

Enlace 2. En el siguiente video se ofrecerá una explicación detallada sobre las regiones de tipo 1 y tipo 2 en el contexto de las integrales dobles. A lo largo del video, se describirán las características distintivas de cada tipo de región y se mostrará cómo transformar una región de un tipo a otro.

<https://youtu.be/Edco4PeO7WQ?si=5chOtRRFueQG69L>

5.2. División del dominio en una integral doble

La división del dominio en una integral doble es un concepto clave en el cálculo de integrales de funciones de dos variables. Este proceso permite descomponer un dominio complicado en subdominios más simples, facilitando la evaluación de la integral doble.

5.2.1 Definición y contexto

Un dominio complicado puede ser representado por una fórmula matemática que describe las restricciones sobre las variables de integración. Sin embargo, en muchos casos prácticos, el dominio de integración no es tan sencillo de manejar y requiere una división en subdominios que sean más fáciles de analizar. Esta técnica es particularmente útil cuando el dominio está compuesto por varias regiones no contiguas o cuando las ecuaciones que definen los límites de integración son complicadas, basándonos en los textos de N. Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010).

5.2.2 Estrategias para la división del dominio

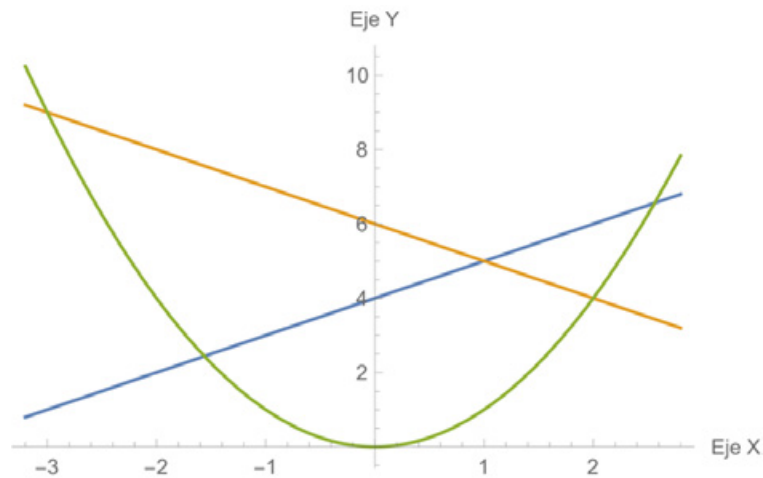
La división del dominio consiste en descomponer una región D en subregiones más simples, de forma que cada subregión sea fácilmente integrable. Este proceso permite aplicar la integral doble en partes más manejables, donde cada subdominio tiene sus propios límites de integración. Dependiendo de la forma y la naturaleza del dominio D , se pueden emplear diversas estrategias de división.

5.2.3 Representación gráfica de la división

Para ilustrar la división del dominio, se considera un ejemplo donde se busca integrar la función $f(x,y)$ sobre una región que está limitada por las rectas y curva: $y=x+4$, $y=-x+6$, $y=x^2$. La forma del dominio D no es un rectángulo. La figura delimitada por las recta y curva tienen un valor menor de formado por $y=x^2$, y dos valores mayores de y formados por las rectas $y=x+4$, $y=-x+6$, lo que dificulta la aplicación directa de la integral doble.

Figura 7

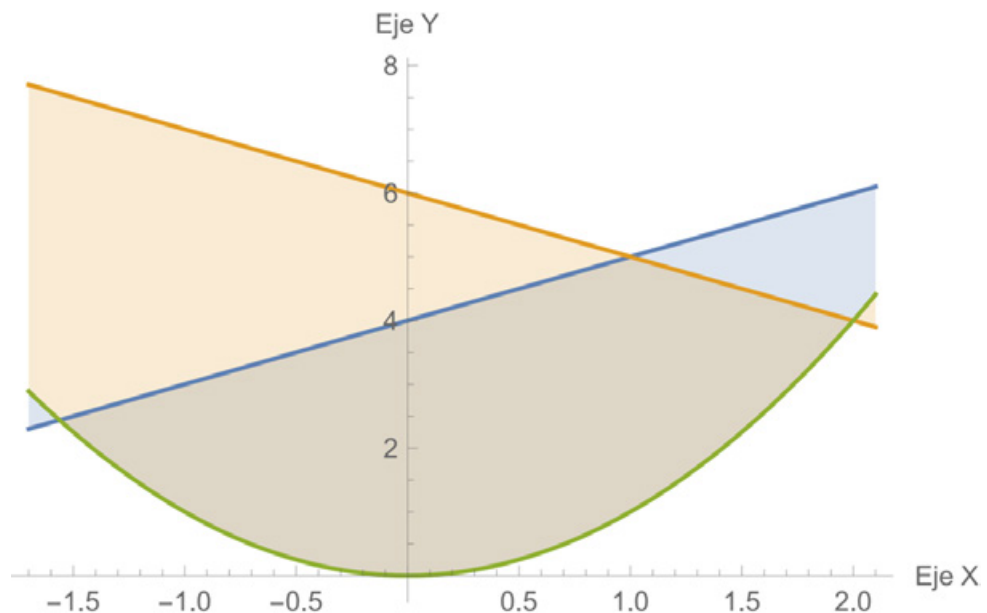
Representación gráfica de las rectas: superiores $y=x+4$, $y=-x+6$, curva inferior $y=x^2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Figura 8

Representación gráfica de la región de dominio D , formado entre las rectas: superiores $y=x+4$, $y=-x+6$, y la curva inferior $y=x^2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.

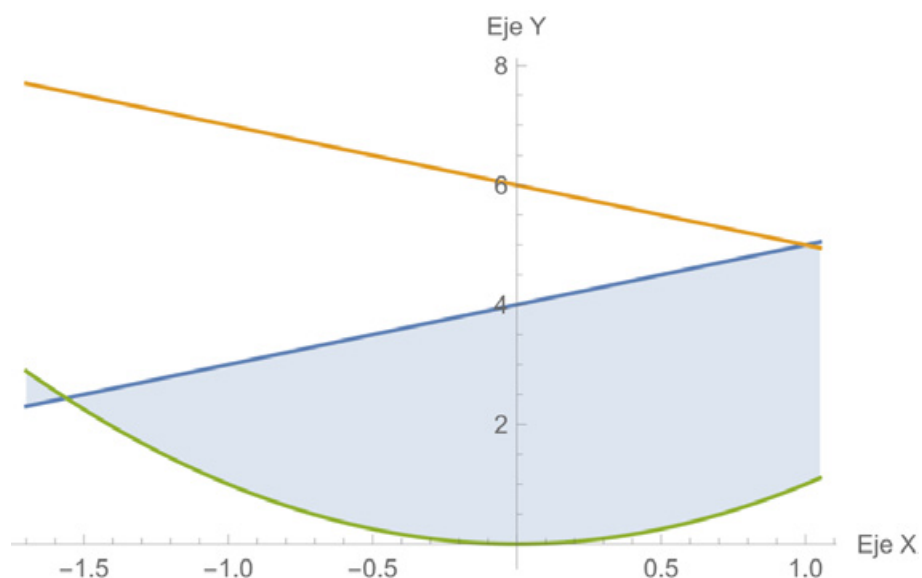


Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Para abordar este caso, se podría dividir el dominio en dos subdominios más simples. El primer subdominio $D1$, sería la región entre las curvas $y=x+4$, $y=x^2$ en el intervalo $[-1.56, 1]$ en el eje x , y el segundo subdominio $D2$ correspondería a la región entre las curvas $y=x+4$, $y=x^2$ en el intervalo $[1, 2]$. De este modo, la integral doble se descompone en dos integrales más simples, que pueden ser evaluadas por separado.

Figura 9

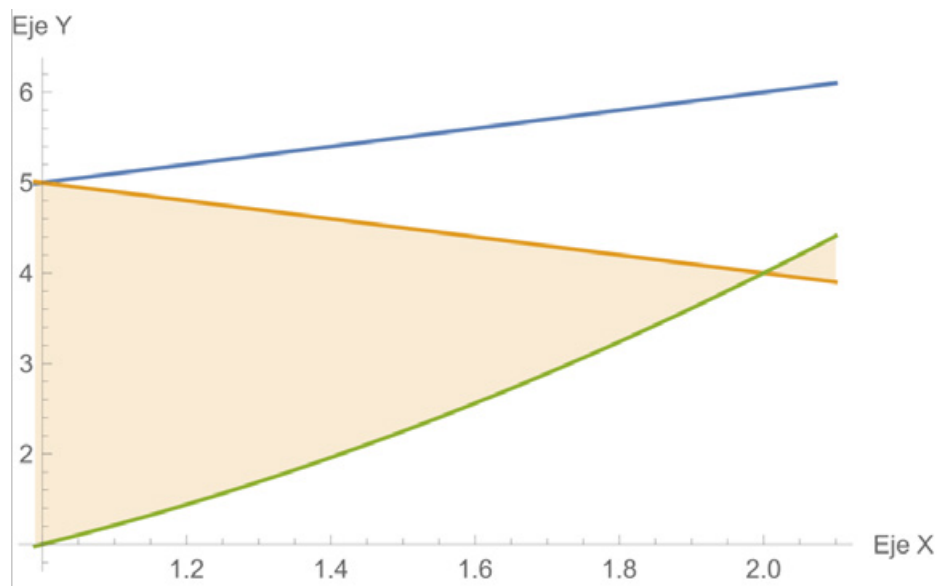
*Representación gráfica de la región de dominio $D1$, formado entre las rectas: superiores $y=x+4$ y la curva inferior $y=x^2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Figura 10

*Representación gráfica de la región de dominio $D2$, formado entre las rectas: superiores $y=-x+6$ y la curva inferior $y=x^2$, con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

5.2.4 Cálculo de la integral en subdominios

Una vez que el dominio ha sido dividido en subdominios $D1$ y $D2$, el siguiente paso es expresar la integral doble como la suma de las integrales sobre cada subdominio. Cada subdominio tiene sus propios límites de integración, lo que permite una evaluación más eficiente. El primer paso es encontrar los puntos de corte entre las rectas y las rectas con la curva.

Igualando las dos rectas $y=x+4$ con $y=-x+6$, se obtiene el punto de corte $(1, 5)$

Igualando la recta $y=x+4$ con la curva $y=x^2$, se obtiene el punto de corte izquierdo $(-1.56, 2.44)$

Igualando la recta $y=-x+6$ con la curva $y=x^2$, se obtiene el punto de corte derecho $(2, 4)$

El primer subdominio $D1$: x varía entre -1.56 y 1 , mientras que y varía entre la curva inferior $y=x^2$ con la recta superior $y=x+4$.

$$-1.56 \leq x \leq 1 \qquad x^2 \leq y \leq x+4$$

$$\iint_{D_1} f(x, y) dA = \int_{-1.56}^1 \left[\int_{x^2}^{x+4} f(x, y) dy \right] dx$$

El segundo subdominio D2: x varía entre 1 y 2, mientras que y varía entre la curva inferior $y = x^2$ con la recta superior $y = -x + 6$

$$1 \leq x \leq 2 \qquad x^2 \leq y \leq -x + 6$$

$$\iint_{D_2} f(x, y) dA = \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{-x+6} f(x, y) dy \right] dx$$

La integral doble total se obtiene sumando las dos integrales:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA \\ \iint_{D_2} f(x, y) dA &= \int_{-1.56}^1 \left[\int_{x^2}^{x+4} f(x, y) dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_{x^2}^{-x+6} f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Este procedimiento de división permite calcular la integral en subdominios más simples, lo que facilita su evaluación.

5.2.5 Conclusión

La división del dominio es una técnica esencial en el cálculo de integrales dobles, que permite abordar dominios complejos de manera más eficiente. Al dividir un dominio en subdominios más simples, el proceso de integración se simplifica, permitiendo evaluaciones más claras y menos propensas a errores. Esta estrategia resulta especialmente útil en aplicaciones prácticas, donde los dominios de

integración no suelen tener formas sencillas, o cuando existen restricciones geométricas complejas, como se observa en el caso presentado.

Ejemplo 5.

Si el dominio de integración D es el área entre dos semicírculos concéntricos con su centro en $(0,0)$ de radios R_1 y R_2 , en el que $R_1 > R_2$.

- El semicírculo de radio R_1 tiene por ecuación $y = +\sqrt{R_1^2 - x^2}$

La variable x , varía desde $-R_1$ a R_1 , entonces $-R_1 \leq x \leq R_1$

La variable y , varía desde 0 a $\sqrt{R_1^2 - x^2}$, entonces $0 \leq y \leq +\sqrt{R_1^2 - x^2}$

- El semicírculo de radio R_2 tiene por ecuación $y = +\sqrt{R_2^2 - x^2}$

La variable x , varía desde $-R_2$ a R_2 , entonces $-R_2 \leq x \leq R_2$

La variable y , varía desde 0 a $\sqrt{R_2^2 - x^2}$, entonces $0 \leq y \leq +\sqrt{R_2^2 - x^2}$

Pero como el dominio D es el área entre los dos semicírculos, se puede describir de la siguiente manera:

En la región negativa de x , el área varía desde $-R_1$ a $-R_2$, entonces $-R_1 \leq x \leq -R_2$

En la región positiva de x , el área varía desde R_2 a R_1 , entonces $R_2 \leq x \leq R_1$

En la región positiva de y , el área varía desde $\sqrt{R_2^2 - x^2}$ a $\sqrt{R_1^2 - x^2}$, entonces

$$\sqrt{R_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R_1^2 - x^2}$$

El dominio D tiene un único intervalo en y , sin embargo, en el eje x no se puede describir en un único intervalo de x , entonces se hace indispensable subdividir el dominio en dos partes, la primera en la región negativa de x , la segunda en la región positiva de x .

$$\iint_D f(x, y) dx = \int_{-R_1}^{-R_2} \left[\int_{\sqrt{R_2^2 - x^2}}^{\sqrt{R_1^2 - x^2}} f(x, y) dy \right] dx + \int_{R_2}^{R_1} \left[\int_{\sqrt{R_2^2 - x^2}}^{\sqrt{R_1^2 - x^2}} f(x, y) dy \right] dx$$

Referencias citadas en la Clase 5.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación.

Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Definición de los términos citados en la Clase 5.

Subdominio: (Definición): Es una **parte del dominio de integración** de una función. La **unión de todos los subdominios** constituye el dominio total de integración.

Diferencial de área dA (Definición): Se considera a un rectángulo infinitesimal de lados paralelos a los ejes x, y . El área del rectángulo infinitesimal dA , es el producto de la base dx por la altura dy .

$$dA = dx \cdot dy$$



La excelencia no se improvisa

síguenos

