

Cálculo II

Límites de la integral doble

Clase 6



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Clase 6: Límites de la integral doble

Cuando abordamos la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre un dominio D en el plano xy , lo primero que debemos hacer es definir los límites de integración que describen dicho dominio. Estos límites son funciones que dependen de las variables x e y y, además, tienen un papel crucial, ya que determinan el área o región sobre la cual se realiza la integración. El dominio D puede estar limitado por varias funciones, como $g1(x)$, $g2(x)$, $h1(y)$, $h2(y)$ y el proceso de integración depende directamente de cómo estas funciones delimitan la región de interés.

La decisión sobre qué orden de integración utilizar depende de las características del dominio D y de las funciones $g1(x)$, $g2(x)$, $h1(y)$, $h2(y)$ y sus respectivas relaciones con las variables x e y . Es importante tener en cuenta que $h1(y)$, $h2(y)$ tienen como origen las funciones $g1(x)$, $g2(x)$. Así que, según la situación, adaptamos el enfoque para simplificar el cálculo y garantizar una integración efectiva.

Reto # 2

6. Tema. Determinación de funciones y constantes que delimitan el dominio de integración.

6.1. Orden de límites de integración

El orden de los límites de integración en una integral doble es un aspecto fundamental que influye directamente en cómo se evalúan las integrales de funciones de dos variables. Como menciona Piskunov (1977), elegir correctamente este orden depende de una delimitación adecuada del dominio y de cómo interpretamos geométricamente las funciones que lo definen. Es decir, hay que visualizar claramente el área en cuestión, analizar sus características y decidir si resulta más conveniente integrar primero con respecto a x o a y .

Por su parte, Thomas (2010) destaca que analizar a fondo las constantes y funciones que establecen estos límites no solo simplifica el proceso de cálculo, sino que también reduce significativamente la posibilidad de cometer errores, especialmente cuando trabajamos con dominios más complejos. Ambos autores coinciden en algo clave: seleccionar el orden correcto no solo facilita los cálculos, sino que también mejora la interpretación geométrica del problema. Además, insisten en que esta decisión debe ajustarse a la disposición del dominio y a la complejidad de las funciones límite, ya que estos factores impactan directamente en la resolución práctica de problemas, especialmente en áreas como la física, la ingeniería y otras disciplinas científicas.

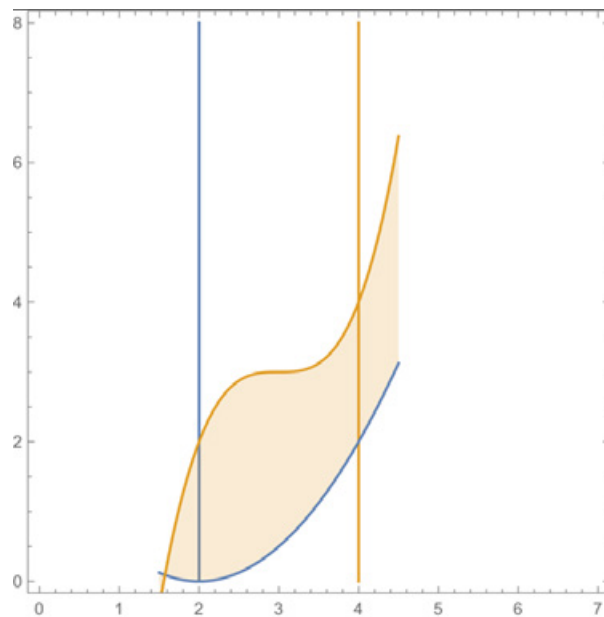
6.1.1 Definición del problema

En la evaluación de una integral doble, los límites de integración se especifican en relación con el orden en el que se realiza la integración. Para una integral doble general de la forma:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Figura 1

*Representación gráfica de región delimitada por las rectas verticales azul de la izquierda $x=a$ y naranja de la derecha $x=b$ y región delimitada por las curvas azul la inferior $y=g1(x)$ y naranja la superior $y=g2(x)$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

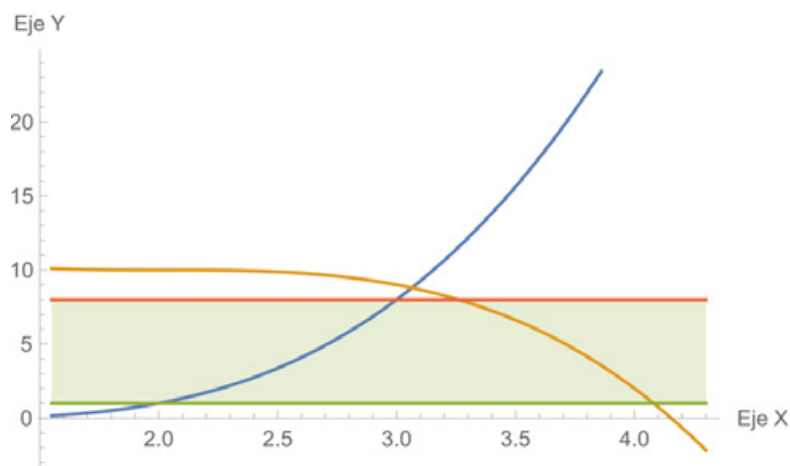
Se puede observar que primero se realiza la integración respecto a la variable y , y luego respecto a x , lo que indica la jerarquía de los corchetes.

Sin embargo, en algunos casos, puede ser conveniente cambiar este orden y realizar primero la integración respecto a x , lo que lleva a una expresión de la forma:

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Figura 2

Representación gráfica de región delimitada por las rectas horizontales verde la inferior $y=c$ y naranja superior $y=d$ con la región delimitada por las curvas azul la izquierda $x=h_1(y)$ y naranja la de la derecha $x=h_2(y)$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Se puede observar que primero se realiza la integración respecto a la variable x , y luego respecto a y , separación que indica el corchete.

En ambos casos, el orden de integración no altera el resultado numérico final de la integral. Sin embargo, elegir el orden adecuado es esencial, ya que en muchos casos una de las variables permite una integración más sencilla que la otra. Por tanto, el orden no debe elegirse al azar, sino mediante un criterio que facilite la resolución analítica.

Enlace 1. En el siguiente video se muestra la importancia de seguir un orden establecido al momento de integrar funciones de dos variables.

<https://youtu.be/2loUJJ0cgHA?si=QbLRulTMUVRA5NeV>

6.1.2 Relación entre las funciones delimitantes y los límites de integración

El proceso de determinación de los **límites de integración** comienza con la descripción del dominio D y las funciones que lo delimitan. Para ilustrar este

proceso, considere un dominio D en el plano xy delimitado por dos curvas $y=g1(x)$ inferior, $y=g2(x)$ superior, que dependen de la variable x .

$$D=\{(x,y)/ a\leq x\leq b, g1(x)\leq y\leq g2(x)\}$$

Además, debemos tomar en cuenta que $x=h1(y)$ izquierda, $x=h2(y)$ derecha, tienen como origen las funciones $y=f1(x)$, $y=f2(x)$. El dominio se describe como la región comprendida entre estas dos curvas para un intervalo $x\in[a,b]$ o $y\in[c,d]$, lo que se expresa como:

$$D=\{(x,y)/ c\leq y\leq d, h1(y)\leq x\leq h2(y)\}$$

El dominio D puede ser más complejo, con funciones delimitantes que dependen de x y de y , y puede involucrar diferentes restricciones geométricas. Dependiendo de la naturaleza del dominio, el orden de integración puede cambiar para simplificar los cálculos.

6.1.3 Importancia de la correcta elección del orden de integración

Elegir correctamente el orden de integración es fundamental para simplificar el proceso de evaluación. Si el orden se ajusta a la geometría del dominio y a la naturaleza de las funciones que lo delimitan, los cálculos serán más eficientes y menos propensos a errores. Además, una elección adecuada puede aprovechar simetrías en el dominio y reducir significativamente la carga de trabajo.

En resumen, la determinación de los límites de integración está íntimamente ligada a la geometría del dominio y a las funciones que lo delimitan. Al elegir el orden de integración correcto, los cálculos se simplifican y la integral puede evaluarse de manera más eficiente. La elección del orden adecuado debe basarse en el análisis detallado del dominio y de las funciones involucradas.

6.2. Cambio de orden de límites de integración

Cuando hablamos del cambio de orden en los límites de integración de una integral doble, nos referimos a un procedimiento esencial que permite simplificar

los cálculos, especialmente cuando la geometría del dominio de integración hace que un orden sea más adecuado que otro. Según N. Piskunov (1977), este proceso ofrece la flexibilidad de modificar el orden de integración sin alterar el valor final de la integral, siempre que los nuevos límites de integración se ajusten correctamente.

Thomas G.B. (2010) destaca que para dominar el cambio de orden es necesario analizar cuidadosamente cómo está definido el dominio de integración. Aquí entra en juego algo crucial: comprender cómo la forma y disposición del dominio afectan la elección del orden. Ambos autores, Piskunov y Thomas, coinciden en algo fundamental: cambiar el orden de integración no solo simplifica los cálculos, sino que nos permite interpretar de manera geométrica lo que está ocurriendo en el dominio y en las funciones que lo delimitan. Cambiar el orden de integración puede ser la clave para hacer que los límites sean más manejables, lo que a su vez hace que los cálculos sean más directos y menos propensos a errores. Piskunov (1977) enfatiza que este cambio no debe realizarse de forma arbitraria, sino sobre la base de una comprensión sólida de la geometría del dominio. Por su parte, Thomas (2010) subraya que visualizar el área o volumen asociado al dominio de integración es clave para establecer correctamente los nuevos límites.

6.2.1 Definición y motivación del cambio de orden de integración

El cambio de orden de integración puede llevarse a cabo si las funciones delimitantes del dominio D pueden ser expresadas de una manera diferente. Al cambiar el orden de integración, se obtiene una nueva formulación de la integral:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

En esta nueva representación, primero se realiza la integración respecto a x y luego respecto a y . Los nuevos límites $h1(y)$ y $h2(y)$ reflejan la relación inversa entre x y y , y describen cómo se modifican los límites de integración cuando se cambia el orden.

6.2.2 Condiciones necesarias para realizar el cambio de orden de integración

Para que el cambio de orden de integración sea válido y efectivo, deben cumplirse ciertas condiciones. Estas condiciones son principalmente geométricas y dependen de la forma y las características del dominio de integración. Si el dominio es complejo o tiene límites no convencionales, es esencial comprender cómo sus fronteras afectan a los límites de integración en cada orden.

6.2.3 El dominio debe ser bien definido

El dominio de integración debe ser **rectificable** o, en términos simples, debe ser un área bien definida que esté delimitada por funciones que puedan expresarse de manera continua. En otras palabras, debe existir una descripción clara de los límites de integración en términos de las funciones que definen las fronteras del dominio.

6.2.4 Funciones delimitantes del dominio

Para cambiar el orden de integración, es necesario identificar cómo las funciones $g1(x)$ y $g2(x)$ pueden expresarse en términos de y . Esto requiere despejar x en las ecuaciones que describen las curvas, lo cual puede implicar hallar las intersecciones entre ellas.

6.2.5 Identificación de los puntos de intersección

Al cambiar el orden de integración, es crucial identificar los puntos de intersección de las curvas que delimitan el dominio. Estos puntos determinan los nuevos límites de integración y ayudan a definir la nueva región sobre la que se integra. En casos donde el dominio está formado por varias curvas que se

intersecan, es necesario determinar con precisión estos puntos de intersección para evitar errores al establecer los límites.

6.2.6 Ejemplos de cambio de orden de integración

Ejemplo 1:

Graficar el dominio e invertir el orden de integración en la integral:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right] dx$$

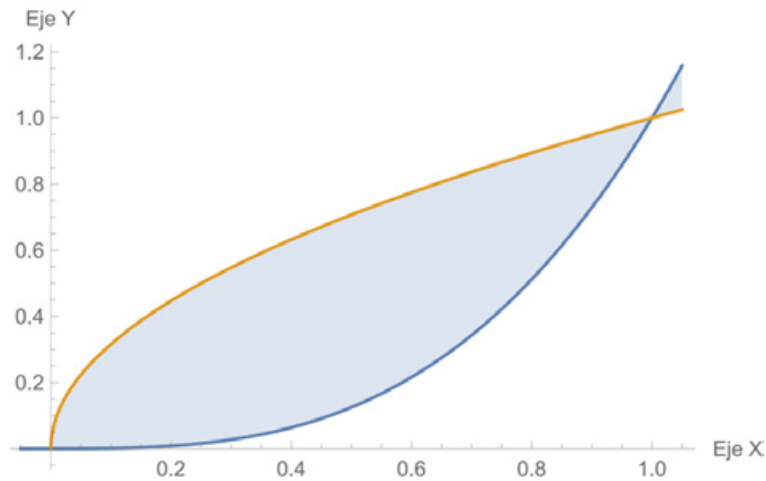
Solución:

El dominio D se encuentra delimitado por: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.

Graficamos las curvas que delimitan el dominio. El resultado es la región de intersección entre las curvas inferior $y=g1(x)=x^3$, superior $y=g2(x)=\sqrt{x}$.

Figura 3

Representación gráfica de región delimitada por las rectas $x=0$ a $x=1$ y región delimitada por las curvas inferior $y=x^3$, superior $y=\sqrt{x}$ que representa el dominio D con *Wolfram Mathematica*, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Para invertir el orden de integración necesitamos obtener $h1(y)$, $h2(y)$ de tal manera que los límites de integración quedarían como:

$$c \leq y \leq d \qquad h1(y) \leq x \leq h2(y)$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d f(x, y) \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Por encontrar los puntos de corte entre las curvas del dominio:

Igualamos las curvas $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$

$$x^3 = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \left(x^{\frac{5}{2}} - 1 \right) = 0, \text{ igualamos a 0 para encontrar las raíces.}$$

$x=0$, $x=1$, cuyos valores correspondientes en el eje y serían $y=0$, $y=1$.

Despejamos la variable x de $y=x^3$, el resultado es $x=\sqrt[3]{y}$, en adelante es $h2(y)$ porque se encuentra a la derecha en el eje x .

Despejamos la variable x de $y=\sqrt{x}$, el resultado es $x=y^2$, en adelante es $h1(y)$ porque se encuentra a la izquierda en el eje x .

Los límites de integración quedarían como:

$$0 \leq y \leq 1 \qquad y^2 \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_0^1 f(x,y) \left[\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx \right] dy$$

Ejemplo 2:

Graficar el dominio e invertir el orden de integración en la integral:

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right] dx$$

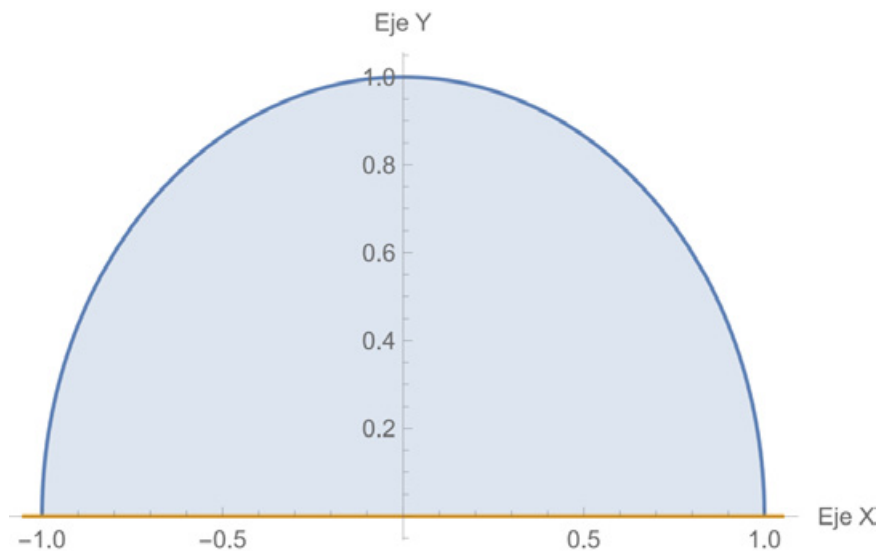
Solución:

El dominio D se encuentra delimitado por: $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=\sqrt{1-x^2}$.

Graficamos las curvas que delimitan el dominio, su resultado es la región de intersección entre las curvas inferior $y=g1(x)=0$, superior $y=g2(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Figura 4

*Representación gráfica de región delimitada por las rectas $x=-1$ a $x=1$ y región delimitada por las curvas inferior $y=0$, superior $y=\sqrt{1-x^2}$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Para invertir el orden de integración necesitamos obtener $h1(y)$, $h2(y)$ de tal manera que los límites de integración quedarían como:

$$c \leq y \leq d \qquad h1(y) \leq x \leq h2(y)$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d f(x, y) \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Por encontrar los puntos de corte entre las curvas del dominio:

$$\text{Igualamos las curvas } y=0, y=\sqrt{1-x^2}$$

$$0=\sqrt{1-x^2}$$

$$(x^2 - 1) = 0, \text{ igualamos a } 0 \text{ para encontrar las raíces.}$$

$$x=-1, x=1, \text{ cuyos valores correspondientes en el eje } y \text{ serían } y=0, y=1.$$

Despejamos la variable x de $y=\sqrt{1-x^2}$, el resultado es $x=\pm\sqrt{1-y^2}$, en adelante es $h_2(y)$ sería la raíz que lleva signo positivo porque se encuentra a la derecha en el eje x .

En adelante es $h_1(y)$ sería la raíz que lleva signo negativo porque se encuentra a la izquierda en el eje x .

Los límites de integración quedarían como:

$$0 \leq y \leq 1 \qquad -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_0^1 f(x,y) \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \right] dy$$

Ejemplo 3:

Graficar el dominio e invertir el orden de integración en la integral:

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx \right] dy$$

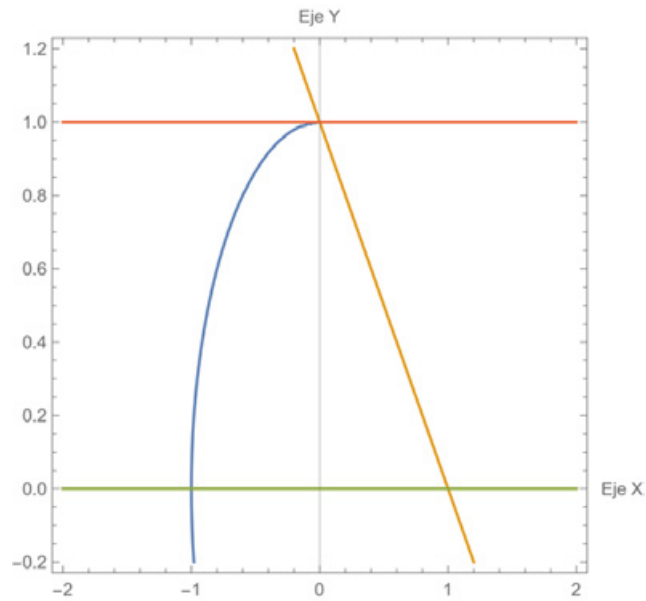
Solución:

El dominio D se encuentra delimitado por $y=0$, $y=1$, $x=-\sqrt{1-y^2}$, $x=1-y$.

Graficamos las curvas que delimitan el dominio, su resultado es la región de intersección entre las curvas izquierda $x=-\sqrt{1-y^2}$, derecha $x=1-y$.

Figura 5

*Representación gráfica de región delimitada por las rectas $x=0$ a $x=1$ y región delimitada por las curvas izquierda $x=-\sqrt{1-y^2}$, derecha $x=1-y$ que representa el dominio D con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Para invertir, a diferencia de los dos ejemplos anteriores, para determinar el orden de integración necesitamos obtener $g1(x)$, $g2(x)$ de tal manera que los límites de integración quedarían como:

$$a \leq x \leq b \quad g1(x) \leq y \leq g2(x)$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b f(x, y) \left[\int_{g1(x)}^{g2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Por encontrar los puntos de corte entre las curvas del dominio:

Igualemos las curvas $x = -\sqrt{1 - y^2}$, $x = 1 - y$.

$$-\sqrt{1 - y^2} = 1 - y$$

$2y(y - 1) = 0$, igualamos a 0 para encontrar las raíces.

$y=0$, $y=1$, cuyos valores correspondientes en el eje x se obtienen igualando $y=0$ con

$$x=-\sqrt{1-y^2}, \quad x=1-y.$$

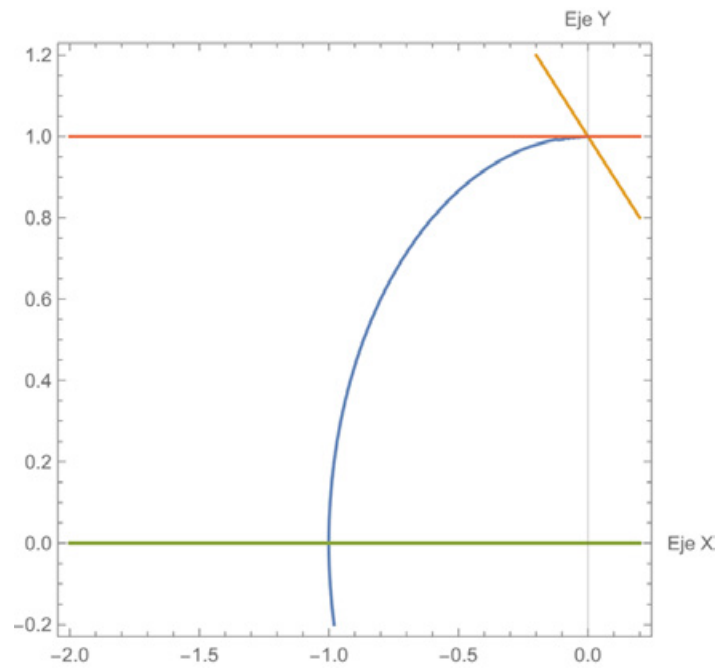
serían $x=-1$, $x=1$

En el dominio general se puede observar que existen dos curvas superiores $g(x)$ y una inferior. Se hace necesario partir el dominio D en dos subdominios $D1$ y $D2$.

Para determinar $D1$, despejamos la variable y de $x=-\sqrt{1-y^2}$, el resultado es $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, como y se encuentra entre $y=0$, $y=1$ en adelante es $y=g2(x)$ con la raíz positiva y se encuentra arriba de $y=0$.

Figura 6

*Representación gráfica del dominio $D1$, región delimitada por la curva inferior $y=g1(x)=0$ y $y=g2(x)=\sqrt{1-x^2}$, entre $x=-1$, $x=0$, con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*

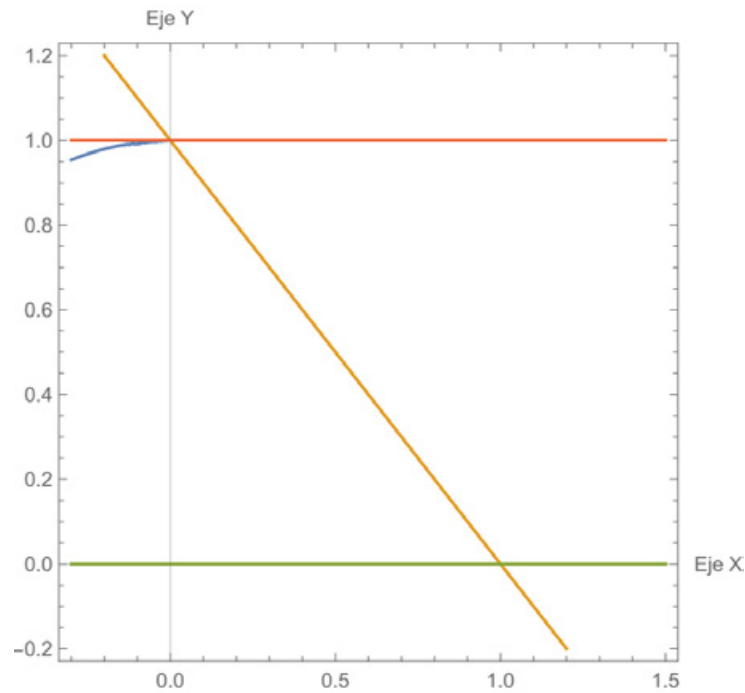


Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Para determinar $D2$, despejamos la variable y de $x=1-y$, el resultado es $y=1-x$, como y se encuentra entre $y=0$, $y=1$ en adelante es $y=g2(x)$ porque se encuentra arriba de $y=0$.

Figura 7

*Representación gráfica del dominio $D2$, región delimitada por la curva inferior $y=g1(x)=0$ y $y=g2(x)=1-x$, entre $x=0$, $x=1$, con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Los límites de integración quedarían como:

$$-1 \leq x \leq 0 \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1-x$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dA &= \int_{-1}^0 f(x,y) \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right] dx \\ &+ \int_0^1 f(x,y) \left[\int_0^{1-x} f(x,y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Enlace 2. En el siguiente video se muestra un ejemplo de cambio de orden de integración de una función de dos variables en la que se conoce un dominio de integración inicial.

<https://youtu.be/TSgnUIPpVQk?si=SBIfyUGTvholsmZg>

Referencias citadas en la Clase 6.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo II*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación.

Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 6

Orden de los límites de integración (Definición): El orden de los límites de integración se refiere a cuál de las integrales simples se resuelve primero en una integral doble. Este orden es indispensable conocerlo al comenzar el cálculo, ya que la segunda integral se resuelve a partir de los resultados obtenidos en la primera. Determinar correctamente este orden garantiza la coherencia del procedimiento y la validez del resultado.

Invertir(Definición): Invertir el orden de integración significa cambiar la secuencia en que se integran las variables. Es decir, se resuelve primero la integral que originalmente estaba en segundo lugar, y luego la que se encontraba en primer lugar. Para realizar este cambio es necesario despejar las variables de las funciones delimitantes y redefinir los límites de integración en función del nuevo orden.



La excelencia no se improvisa

síguenos

