

Cálculo II

Cálculo de la integral doble

Clase 7



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Clase 7: Cálculo de la integral doble

Las integrales dobles son herramientas extremadamente útiles, tanto en coordenadas rectangulares como polares. ¿Sabías que se aplican para calcular áreas, volúmenes, masas e, incluso, para determinar centros de gravedad y centroides? También tienen aplicaciones prácticas, como calcular el caudal de fluidos utilizando la ley de Poiseuille.

Lo interesante aquí es que las coordenadas rectangulares y polares están interrelacionadas. Esto significa que puedes cambiar de un sistema de coordenadas al otro si eso facilita el cálculo de la integral. Por ejemplo, en situaciones donde la geometría del dominio D de integración tiene simetría circular, el cambio a coordenadas polares suele simplificar muchísimo el trabajo.

En resumen, la elección entre coordenadas rectangulares y polares no es solo una cuestión de preferencia, sino de estrategia. Adaptarse a la forma del dominio de integración puede marcar una gran diferencia en la eficiencia y claridad del cálculo.

Reto # 2

7. Tema. Integrales dobles de funciones de dos variables independientes.

7.1. Cálculo de integral doble de funciones en coordenadas cartesianas

El cálculo de la integral doble en coordenadas cartesianas es una herramienta esencial para analizar funciones de dos variables independientes, ya que nos permite abordar problemas en dominios bidimensionales de una manera estructurada y precisa. Según N. Piskunov (1977) en su *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo II*, este método no solo establece una base sólida para el análisis matemático, sino que también encuentra aplicaciones prácticas en disciplinas como la física, la ingeniería

y las matemáticas aplicadas, donde es crucial evaluar áreas, volúmenes y otras propiedades relacionadas con regiones delimitadas en el plano.

Por otro lado, Thomas G. B. (2010), en su obra *Cálculo*, resalta que las integrales dobles en coordenadas cartesianas no solo proporcionan un marco teórico robusto, sino que también son herramientas poderosas para resolver problemas reales, como el cálculo de momentos de inercia, la determinación de masas en distribuciones de densidad variable y el análisis de flujos de fluidos.

En este caso, exploraremos en detalle no solo la definición y las propiedades de las integrales dobles en coordenadas cartesianas, sino también los procedimientos prácticos que permiten su cálculo. Además, discutiremos cómo estas herramientas pueden aplicarse eficazmente en diferentes contextos, desde resolver problemas cotidianos hasta abordar desafíos complejos en campos científicos y tecnológicos.

7.1.1 Definición y concepto geométrico

En general la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre una región D en el plano xy se denota como:

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \left[\int_{g^1(x)}^{g^2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

donde dA representa el elemento diferencial de área, usualmente expresado como $dx dy$, dependiendo del orden de integración. Geométricamente, esta integral representa el volumen del sólido que se encuentra por debajo de la superficie definida por $z=f(x,y)$ y por encima de la región D en el plano xy .

7.1.2 Propiedades de la integral doble

1. Linealidad:

$$\begin{aligned}\iint_D c_1[f_1(x, y)]dA + c_2[f_2(x, y)]dA \\ = c_1\iint_D f_1(x, y)dA + c_2\iint_D f_2(x, y)dA\end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

2. Aditividad respecto a la región: Si D puede dividirse en D_1 y D_2 (disjuntos), entonces:

$$\iint_D [f(x, y)]dA = \iint_{D_1} f(x, y)dA + \iint_{D_2} f(x, y)dA$$

3. No negatividad: Si $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos de D , entonces:

$$\iint_D f(x, y)dA \geq 0$$

4. Cambio de orden de integración: El orden de integración puede cambiarse en función de la región y la conveniencia para el cálculo.

7.2.3 Cálculo de la integral doble

El procedimiento de cálculo implica:

1. Determinar la región de integración: Identificar los límites de x y y que describen D .
2. Elegir el orden de integración: Evaluar primero respecto a x y luego y , o viceversa. Por ejemplo:

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

o bien:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h1(y)}^{h2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

3. Evaluar las integrales iteradas: Resolver primero la integral interna y luego la externa.

Ejemplo1:

Calcular la integral doble de $f(x, y) = x + y$ sobre la región rectangular D definida por $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 20$.

1. Definir la integral:

Si se elige el orden:

$$0 \leq x \leq 10 \qquad 0 \leq y \leq 20$$

$$\iint_D (x + y) dA = \int_0^{10} \left[\int_0^{20} (x + y) dy \right] dx$$

2. Resolver la integral interna:

$$\begin{aligned} \int_0^{20} (x + y) dy &= \int_0^{20} x dy + \int_0^{20} y dy = x[y]_0^{20} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{20} \\ &= x[20 - 0] + [200 - 0] = 20x + 200 \end{aligned}$$

3. Resolver la integral externa:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} (20x + 200) dx &= \int_0^{10} 20x dx + 200 \int_0^{10} dx = 20 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + 200[x]_0^{10} \\ &= 20[50 - 0] + 200[10 - 0] = 3000 \end{aligned}$$

El orden que se elige no afecta el resultado de la integral, dependiendo del orden elegido la complejidad en la solución puede cambiar significativamente:

1. Definir la integral:

Si se elige el otro orden:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 20 \quad 0 \leq x \leq 10 \\ \iint_D (x + y) dA = \int_0^{20} \left[\int_0^{10} (x + y) dx \right] dy \end{aligned}$$

2. Resolver la integral interna:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} (x + y) dx &= \int_0^{10} x dx + \int_0^{10} y dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + y[x]_0^{10} \\ &= [50 - 0] + y[10 - 0] = 10y + 50 \end{aligned}$$

3. Resolver la integral externa:

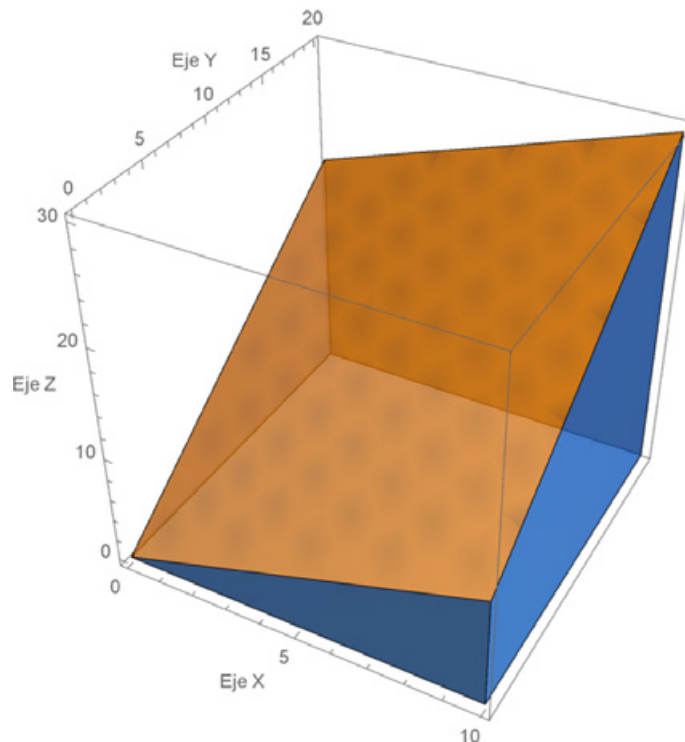
$$\begin{aligned} \int_0^{20} (10y + 50) dy &= \int_0^{20} 10y dy + 50 \int_0^{20} dy = 10 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{20} + 50[y]_0^{20} \\ &= 10[200 - 0] + 50[20 - 0] = 3000 \end{aligned}$$

En este ejemplo se verifica que el orden de integración no afecta el resultado, el valor de la integral es 3000

La interpretación geométrica en este caso, la función $z=x+y$ define un plano. La integral doble calcula el volumen del sólido limitado por este plano y la región rectangular en el plano x, y . Este enfoque geométrico es crucial para comprender aplicaciones prácticas.

Figura 1

Representación gráfica del volumen delimitado en la parte superior por el plano $z=x+y$, y en el plano x,y por su dominio D : $x=0$ a $x=10$; $y=0$ a $y=20$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Ejemplo 2:

Calcular la integral doble de $f(x,y)=4-x^2-y^2$ sobre la región rectangular D definida por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 3/2$.

1. Definir la integral:

Si se elige el orden:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 3/2$$

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^1 \left[\int_0^{3/2} (4 - x^2 - y^2) dy \right] dx$$

2. Resolver la integral interna:

$$\begin{aligned}\int_0^{3/2} (4 - x^2 - y^2) dy &= 4 \int_0^{3/2} dy - x^2 \int_0^{3/2} dy - \int_0^{3/2} y^2 dy = 4[y]_0^{3/2} - x^2[y]_0^{3/2} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{3/2} \\ &= 4\left[\frac{3}{2} - 0\right] - x^2\left[\frac{3}{2} - 0\right] - \left[\frac{27}{24} - 0\right] = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{39}{8}\end{aligned}$$

a. Resolver la integral externa:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{39}{8}\right) dx &= -\frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx + \frac{39}{8} \int_0^1 dx = -\frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{39}{8} [x]_0^1 \\ &= -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} - 0\right] + \frac{39}{8} [1 - 0] = \frac{35}{8}\end{aligned}$$

El orden que se elige no afecta el resultado de la integral, dependiendo del orden elegido la complejidad en la solución puede cambiar significativamente:

1. Definir la integral:

Si se elige el otro orden:

$$\begin{aligned}0 \leq y \leq 3/2 \quad \quad \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \iint_D (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{3/2} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx \right] dy\end{aligned}$$

2. Resolver la integral interna:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx &= 4 \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx - y^2 \int_0^1 dx = 4[x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - y^2[x]_0^1 \\ &= 4[1 - 0] - \left[\frac{1}{3} - 0\right] - y^2[1 - 0] = -y^2 + \frac{11}{3}\end{aligned}$$

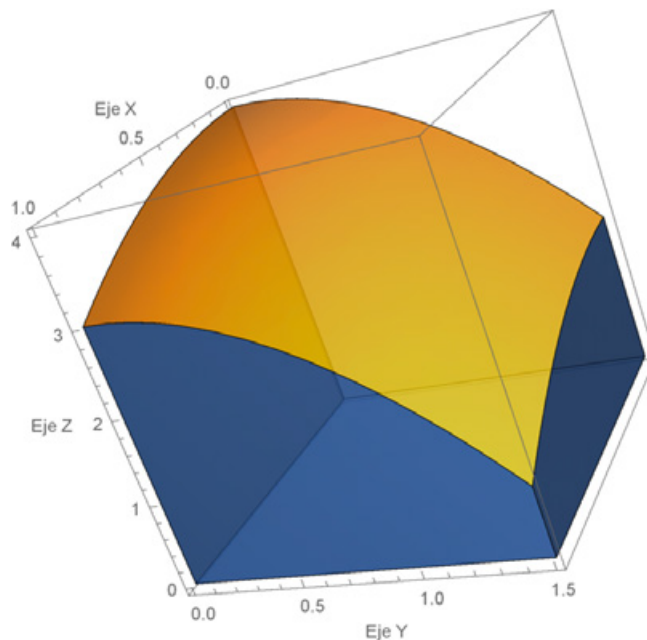
a. Resolver la integral externa:

$$\begin{aligned}\int_0^{3/2} \left(-y^2 + \frac{11}{3}\right) dy &= \int_0^{3/2} -y^2 dy + \frac{11}{3} \int_0^{3/2} dy = -\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{3/2} + \frac{11}{3} [y]_0^{3/2} \\ &= -\left[\frac{27}{24} - 0\right] + \frac{11}{3} \left[\frac{3}{2} - 0\right] = \frac{35}{8}\end{aligned}$$

En este ejemplo se verifica que el orden de integración no afecta el resultado, el valor de la integral es $\frac{35}{8}$

Figura 2

*Representación gráfica del volumen delimitado en la parte superior por el plano $z=4-x^2-y^2$, y en el plano x,y por su dominio D : $x=0$ a $x=1$; $y=0$ a $y=3/2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*



Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Enlace 1. En el siguiente video se muestra la importancia de seguir un orden establecido al momento de integrar funciones de dos variables, el resultado en uno u otro orden no cambia el resultado final.

https://youtu.be/jgUn7ifniwk?si=_iy9Eqv86wYcOsJZ

7.1.4 Conclusión

El cálculo de integrales dobles en coordenadas cartesianas es una técnica poderosa para evaluar el comportamiento de funciones de dos variables en regiones bidimensionales. Las obras de N. Piskunov (1977) y de Thomas G. B. (2010) ofrecen bases sólidas y ejemplos prácticos que ilustran su aplicación en problemas reales. Con el dominio de esta técnica, es posible abordar una amplia variedad de problemas en matemáticas y ciencias aplicadas, por ejemplo, para el cálculo del centro de masa de una lámina con densidad variable.

En ingeniería mecánica y estructural, es común analizar láminas planas con formas y densidades variables. Para determinar el centro de masa de una lámina cuya densidad superficial varía según la posición, se utilizan integrales dobles en coordenadas cartesianas.

Ejemplo 3:

Consideremos una lámina triangular delimitada por el eje x , la recta $x=1$ y la recta $y=2x$ en el primer cuadrante. La densidad en cada punto (x,y) de la lámina está dada por la función $\rho(x,y)=6x+6y+6$.

La masa total M de la lámina se calcula mediante:

$$M = \iint_D \rho(x,y) dA$$

Dominio D : y varía en el intervalo $[0, 2x]$; x varía en el intervalo $[0, 1]$

$$M = \iint_D (6x + 6y + 6) dA$$

$$M = \int_0^1 \left[\int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy \right] dx$$

Primero la integral interna:

$$\int_0^{2x} (6x + 6y + 6)dy = 6x[y]_0^{2x} + 6\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} + 6[y]_0^{2x}$$

$$\int_0^{2x} (6x + 6y + 6)dy = 24x^2 + 12x$$

Segundo la integral externa:

$$M = \int_0^1 (24x^2 + 12x)dx$$

$$M = 24\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 12\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$M = 24\left(\frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{14}$$

La masa total M de la lámina triangular de densidad variable $\rho(x,y)=6x+6y+6$ es 14

7.2. Cálculo de integral doble de funciones en coordenadas polares

El cálculo de la integral doble en coordenadas polares es una herramienta esencial cuando se trata de estudiar funciones de dos variables, especialmente en situaciones donde la región de integración tiene una simetría circular. En estos casos, trabajar en coordenadas cartesianas puede ser complicado y poco eficiente, lo que hace que la conversión a coordenadas polares sea no solo conveniente, sino necesaria. Esta técnica, ampliamente desarrollada en los textos *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo II* de N. Piskunov (1977) y *Cálculo* de Thomas G. B. (2010), nos permite simplificar enormemente el proceso de integración al transformar el sistema de coordenadas cartesianas al sistema polar, adecuado para trabajar con dominios circulares.

Según Piskunov (1977), la conversión a coordenadas polares no solo simplifica los cálculos, sino que también proporciona una mejor comprensión de la geometría del dominio de integración. Por otra parte, Thomas (2010) resalta cómo, al usar coordenadas polares, los elementos diferenciales (como el área) se ajustan adecuadamente al sistema de integración, permitiendo un manejo más eficiente de la integral doble.

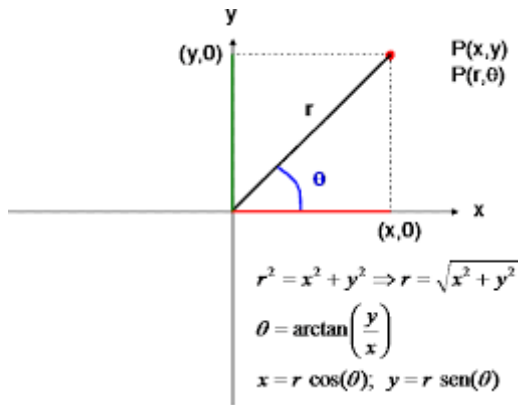
En esta sección, profundizaremos en cómo se realiza esta transformación y cómo la interpretación geométrica de las coordenadas polares facilita la resolución de problemas prácticos en diversas áreas, como la física, la ingeniería y la modelización matemática. Veremos cómo, al aplicar este cambio de sistema, no solo simplificamos las integrales dobles, sino que también resolvemos problemas que serían extremadamente complejos si los tratáramos con coordenadas cartesianas.

7.2.1 Transformación a coordenadas polares

En el sistema de coordenadas polares, cualquier punto en el plano puede representarse mediante un par de valores (r, θ) , donde:

Figura 3

Representación gráfica de la relación entre las coordenadas cartesianas y polares en un plano bidimensional.



Nota. Tomado de <https://images.app.goo.gl/3Tc7fVd1v4oJ3MN6A>

- r es la distancia desde el origen hasta el punto.
- θ es el ángulo formado con el eje positivo x .

La relación entre coordenadas cartesianas y polares está dada por las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

El elemento diferencial de área en coordenadas polares se expresa como:

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

Esto significa que, al transformar una integral doble de coordenadas cartesianas a polares, la expresión general es:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

Esta transformación simplifica los cálculos en dominios con geometrías radiales o circulares, que suelen ser complicados de manejar en coordenadas cartesianas.

Descripción de la región de integración

En coordenadas polares, la región de integración D se describe mediante:

- Un intervalo para r , que indica la distancia radial desde el origen.

- Un intervalo para θ , que representa los ángulos que delimitan el sector angular.

Por ejemplo, si D es un círculo de radio a , se tiene:

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Cuando D corresponde a un sector circular, los límites de θ se ajustan al ángulo que abarca el sector, por ejemplo, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde α y β son los ángulos inicial y final, respectivamente.

7.2.2 Procedimiento para calcular la integral doble

1. Transformar la función y la región: Se sustituyen las variables x y y en la función $f(x,y)$ por sus equivalentes polares $r\cos\theta$ y $r\sin\theta$, se debe tomar en cuenta que r forma parte del diferencial de área.
2. Establecer los límites de integración: Los límites de r y θ dependen de la región D . Estos límites suelen estar determinados por la geometría del problema.
3. Evaluar las integrales iteradas: Se realiza primero la integral respecto a r y luego respecto a θ , o viceversa, dependiendo de la configuración.

Ejemplo 4

Calcular el volumen V del cuerpo limitado por la superficie $z=4$ y el cilindro $x^2+y^2-2y=0$, utilizando integrales dobles en coordenadas polares.

Superficies que limitan el cuerpo:

1. **Plano horizontal:** $z=4 \rightarrow$ esto da la altura constante del sólido.
2. **Cilindro:** $x^2+y^2-2y=0$

Paso 1: Reescribir el cilindro

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Esto representa un cilindro circular en el plano xy , de radio 1 centrado en $(0,1)$.

El volumen a calcular es el volumen del cilindro truncado a altura $z=4$

Paso 2: Coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuación del cilindro se convierte en:

$$r^2 - 2r \sin \theta = 0$$

$$r(r - 2 \sin \theta) = 0$$

Soluciones:

$$r = 0 \quad r = 2 \sin \theta$$

Paso 3: Rango de θ

El círculo centrado en $(0,1)$ está en la parte superior del plano xy , así que para barrer toda la región circular:

$$\theta \text{ varía en el intervalo } [0, \pi]$$

Paso 4: Configuración de la integral

La altura es constante $z=4$, por lo tanto, el volumen se calcula como:

$$V = \iint_D (4) dA = \int_0^\pi \left[\int_0^{2 \sin \theta} (4) r dr \right] d\theta$$

Paso 5: Resolver la integral

Primera integral (en r):

$$\int_0^{2\sin\theta} (4) r dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\sin\theta} = 8\sin^2\theta$$

Segunda integral (en θ):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi (8\sin^2\theta) d\theta = 8 \int_0^\pi (\sin^2\theta) d\theta = 8 \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 8 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\right) d\theta - 8 \int_0^\pi \left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 4[\pi - (1 - 1)] = 4\pi \end{aligned}$$

Resultado final:

Por lo tanto, el volumen es 4π unidades cúbicas.

El resultado es verificable mediante geometría básica, el volumen es un cilindro con base circular de radio 1 y tapa circular de radio 1 plana horizontal paralela al plano x,y con altura 4.

$$\text{Volumen} = \text{Área} * \text{altura}$$

$$\text{Volumen} = (\pi r^2) * 4 = 4\pi$$

Figura 4

*Representación gráfica del volumen delimitado en la parte superior por el plano $z=4-x^2-y^2$, y en el plano x,y por su dominio D : $x=0$ a $x=1$; $y=0$ a $y=3/2$ con **Wolfram Mathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 7, volumen ejemplo 3.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Enlace 2. En el siguiente video se muestra un ejemplo de integración de funciones de dos variables en coordenadas polares.

https://youtu.be/y5hPKFu4_VY?si=BAUu8hX0Bme0byXv

7.2.3 Ventajas de las coordenadas polares

1. Simplificación de cálculos: Las coordenadas polares son ideales para problemas con simetría circular o radial, reduciendo la complejidad de las expresiones algebraicas.
2. Flexibilidad: Permiten describir regiones complicadas de forma sencilla, como sectores circulares o anillos.
3. Intuición geométrica: Facilitan la comprensión visual de los dominios de integración en problemas que implican curvas y regiones circulares.

7.2.4 Aplicaciones en la vida real

El uso de coordenadas polares es común en campos como la física y la ingeniería. Por ejemplo, en electrostática, se emplean para calcular campos eléctricos generados por distribuciones de carga con simetría circular. Asimismo, son esenciales en mecánica de fluidos para estudiar el flujo de líquidos en torno a objetos cilíndricos, además de placas circulares.

Ejemplo 5

Determinar la masa M de una placa redonda de radio R , si la densidad superficial $\rho(x,y)$ del material en cada punto $P(x,y)$ es proporcional a la distancia del punto (x,y) al centro de la placa, es decir, $\rho(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

Utilizamos coordenadas polares:

$$M = \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D \rho(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$M = \iint_D k \sqrt{x^2 + y^2} dA = \iint_D \rho(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

El dominio de integración D es el círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$, entonces se encuentra definido por:

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

La densidad superficial en coordenadas esféricas quedaría expresada como:

$$\rho(x, y) = kr$$

$$M = \iint_D k \sqrt{x^2 + y^2} dA = \iint_D (kr) r dr d\theta$$

$$M = \iint_D kr^2 dr d\theta$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R kr^2 dr d\theta$$

Integramos primero la parte interna:

$$\int_0^R kr^2 dr = k \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R$$

$$\int_0^R kr^2 dr = k \frac{R^3}{3}$$

Integramos la parte externa:

$$M = \int_0^{2\pi} k \frac{R^3}{3} d\theta$$

$$M = k \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$M = \frac{2}{3} k\pi R^3$$

Es la masa de la placa circular de densidad $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

7.2.5 Conclusión

El cálculo de integrales dobles en coordenadas polares es una herramienta valiosa en matemáticas y ciencias aplicadas. Su aplicación simplifica problemas complejos, especialmente en regiones con simetría radial. Los textos de N. Piskunov y Thomas G. B. proporcionan fundamentos teóricos y prácticos para dominar esta técnica, promoviendo una comprensión profunda de su importancia en el análisis de funciones de dos variables.

Referencias citadas en la Clase 7

Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo II*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

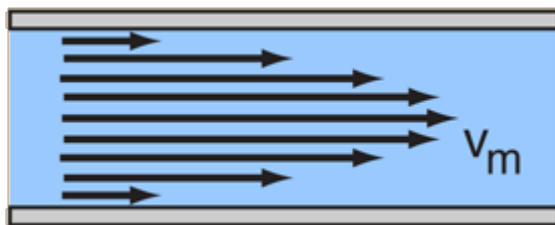
Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 7

Perfil parabólico de velocidad (Definición): Se refiere a la distribución de velocidades dentro de una tubería, para el caso en que el flujo se considera laminar, su distribución corresponde a como se puede visualizar en el siguiente gráfico.

Figura 5

Perfil de velocidades en una tubería de sección circular. Se puede apreciar que, en el centro $r=0$, la velocidad es máxima.

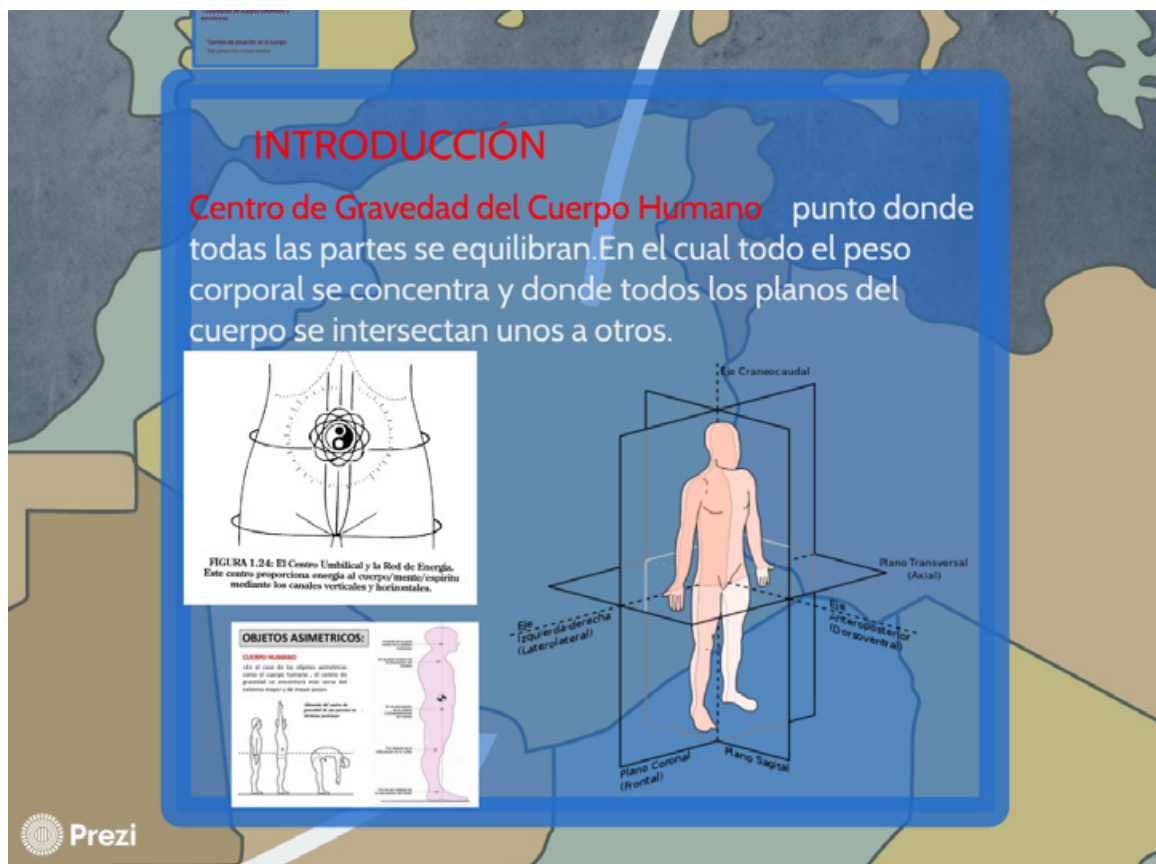


Nota. Tomado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/pfric.html>

Centro de gravedad (Definición): El centro de gravedad es un punto imaginario de un cuerpo donde se considera que actúa la fuerza de gravedad. También se le conoce como centro de equilibrio, centro de balance. En el cuerpo humano, el centro de gravedad se encuentra a la altura del ombligo.

Figura 6

Representación gráfica del centro de gravedad del cuerpo humano



Nota. Tomado de: https://prezi.com/_irop3vdbqz8/centro-de-la-gravedad-del-cuerpo-humano/



La excelencia no se improvisa

síguenos

