

Cálculo de áreas planas mediante integral doble

Clase 8

1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Clase 8: Cálculo de áreas planas mediante integral doble

Cuando hablamos de la integral doble de una función $z=f(x,y)$ sobre una región D del plano xy , esta se interpreta como el volumen de un sólido tridimensional cuya base está delimitada por D y cuya altura en cada punto está determinada por $z=f(x,y)$. Ahora, ¿cómo se calcula este volumen? Lo hacemos sumando infinitesimales "bloques" de volumen $\Delta A f(x, y)$, donde ΔA es un área pequeña dentro del dominio D y $z=f(x,y)$ es la altura.

En el límite, cuando el tamaño de ΔA tiende a cero, la suma infinita de estos bloques converge al valor exacto de la integral doble:

$$\iint_D f(x,y) dA$$

= Volumen bajo la superficie $f(x,y)$ delimitado por un contorno D

Si la altura $z=f(x,y)$ es 1, entonces el volumen se convierte en el área del dominio D .

$$\iint_D dA = \text{Área delimitado por un contorno } D$$

Por lo que la integral doble con $f(x,y)$ representa el área que comprende el dominio D

Reto # 2

8. Tema. Cálculo de áreas

8.1. Cálculo de área mediante integrales dobles en coordenadas cartesianas

El cálculo de área mediante integrales dobles en coordenadas cartesianas es una aplicación fundamental del análisis matemático, especialmente cuando estamos trabajando con funciones de dos variables. Este enfoque no solo nos permite calcular áreas, sino que también es una herramienta poderosa para entender cómo se comportan las funciones dentro de un dominio específico. Con integrales dobles, podemos determinar el área de regiones planas delimitadas por curvas, utilizando tanto herramientas algebraicas como geométricas, lo que facilita el análisis de superficies y objetos en el espacio.

Como señalan N. Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010) en sus respectivos textos, este procedimiento no es solo una técnica de cálculo; es una manera de conectar la teoría matemática con la resolución de problemas reales. Piskunov, por ejemplo, dedica una parte importante de su obra a explicar cómo el uso de las integrales dobles se extiende más allá de los problemas puramente matemáticos, permitiendo aplicaciones en la física, la ingeniería y la economía. Thomas, por su parte, enfatiza la importancia de comprender las propiedades de las funciones que se integran, ya que esto nos ayuda a interpretar de manera más precisa el significado de los resultados obtenidos.

En este sentido, aprender a aplicar las integrales dobles en coordenadas cartesianas no solo abre la puerta a resolver problemas complejos, sino que también nos proporciona una herramienta clave para abordar diversas áreas de estudio y disciplinas.

8.1.1 Fundamentos teóricos

En el sistema de coordenadas cartesianas, una región D en el plano xy se define por desigualdades que describen las curvas o líneas que la delimitan. El área de dicha región puede calcularse utilizando una integral doble, cuya expresión general es:

$$\begin{aligned} \text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y &= \iint_D dA = \int_a^b \left[\int_{g^1(x)}^{g^2(x)} dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_{h^1(y)}^{h^2(y)} dx \right] dy \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de esta expresión es que se suma el "peso unitario" de cada pequeña porción de área dentro de la región D , resultando en el área total. La integral doble se evalúa como una integral iterada, resolviendo primero respecto a una variable y luego respecto a la otra.

8.1.2 Descripción de la región de integración

La región D puede estar delimitada de varias maneras. Dos configuraciones comunes incluyen:

1. Curvas tipo $y=g^1(x)$, $y=g^2(x)$: En este caso, la región está acotada por dos funciones de x , con $a \leq x \leq b$.
2. Curvas tipo $x=h^1(y)$, $x=h^2(y)$: Aquí, D está definido por funciones de y , con $c \leq y \leq d$.

8.1.3 Procedimiento para calcular el área

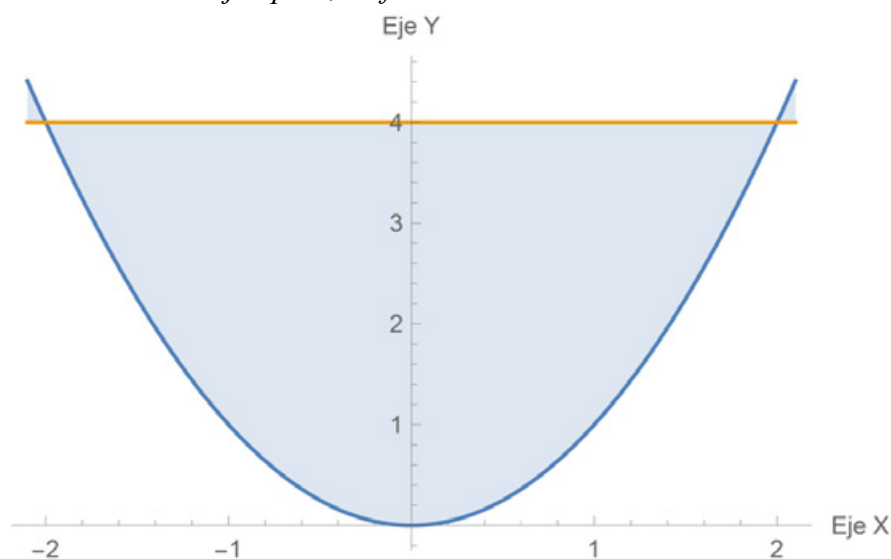
1. Definir la región de integración: Identificar los límites de las variables x y y según las curvas que delimitan D .
2. Plantear la integral doble: Establecer la expresión de la integral doble, indicando los límites externos e internos.
3. Resolver la integral iterada: Evaluar la integral respecto a una variable (internamente) y luego respecto a la otra (externamente).

Ejemplo 1 de cálculo de área de dominio D en coordenadas cartesianas

Calcular el área de la región D delimitada por las curvas $y=x^2$, $y=4$.

Figura 1

Representación gráfica del dominio de integración D ($y=x^2$, $y=4$) utilizando *WolframMathematica* de ejemplo1, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

1. Identificar la región de integración: La curva $y=x^2$ es una parábola, y $y=4$ una recta horizontal. Los puntos de intersección se obtienen igualando:

$$x^2 = 4$$

$(x+2)(x-2)=0$; $x = -2$, $x = 2$. Por tanto, la región está delimitada por $-2 \leq x \leq 2$

2. Plantear la integral doble:

$$\text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y = \iint_D dA = \int_{-2}^2 \left[\int_{x^2}^4 dy \right] dx$$

○ Resolver la integral iterada:

○ Primero, integrar respecto a y :

$$\int_{x^2}^4 dy = [y]_{x^2}^4 = [4 - x^2]$$

○ Luego, integrar respecto a x :

$$\begin{aligned} \text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y &= \int_{-2}^2 [4 - x^2] dx = \int_{-2}^2 [4] dx + \int_{-2}^2 [-x^2] dx \\ &= 4[x]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 4[(2) - (-2)] - \left[\left(\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{8}{3} \right) \right] = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y = \frac{32}{3}$$

Figura 2

*Captura de pantalla de solución de la integral doble que representa el área de la región D delimitada por las curvas $y=x^2$, $y=4$ utilizando **WolframAlpha** del ejemplo 1.*



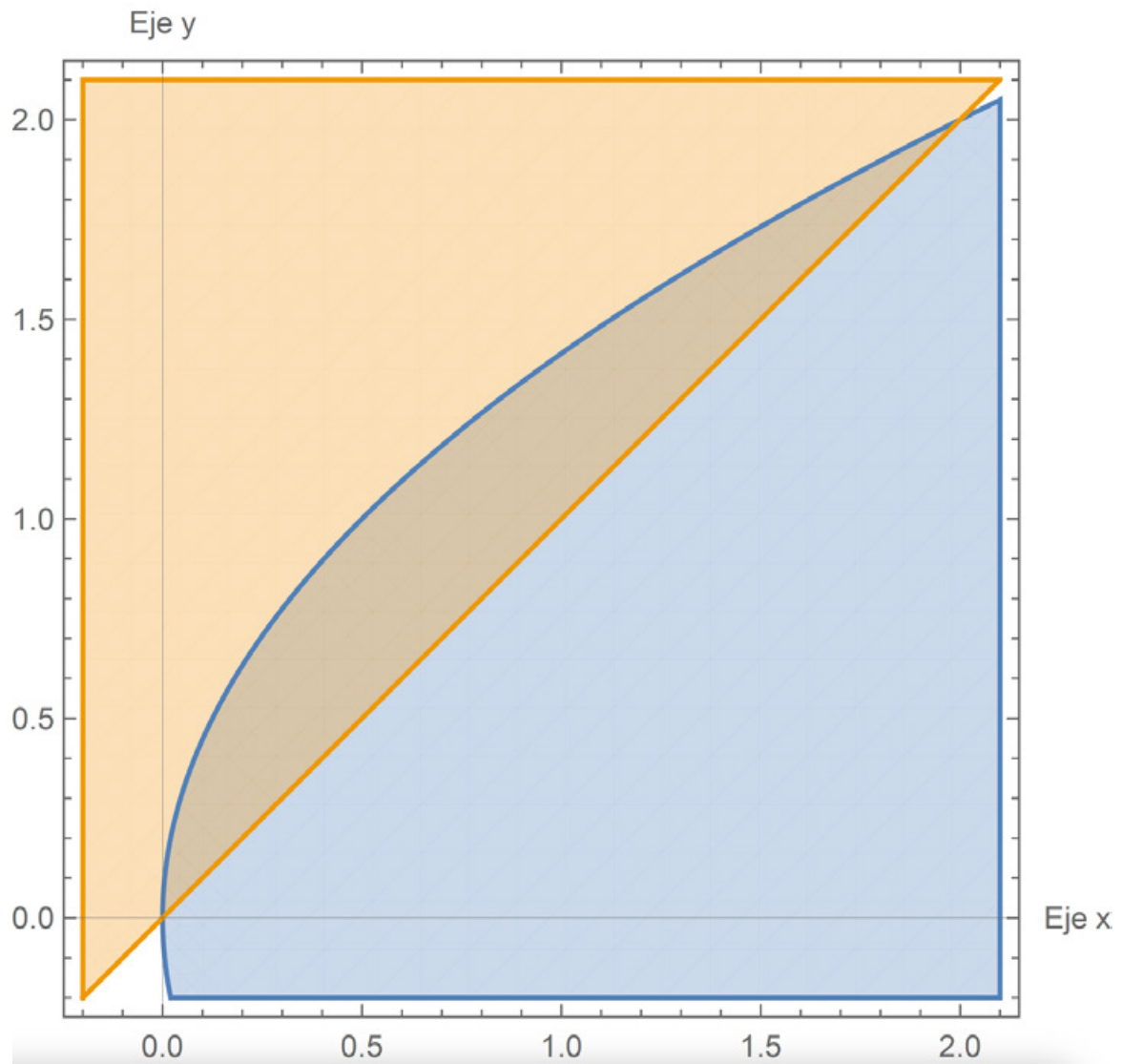
Nota. Fuente: Creación del autor generada en WolframAlpha

Ejemplo 2 de cálculo de área de dominio D

Calcular el área de la región D delimitada por las curvas $2x=y^2$, $y=x$.

Figura 3

*Representación gráfica del dominio de integración D , región bajo la parábola $2x=y^2$ y sobre la recta $y=x$ utilizando **WolframMathematica** de ejemplo 2, en formato GIF.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

2. Identificar la región de integración: La curva $2x=y^2$ es una parábola, y $y=x$ una recta horizontal. Los puntos de intersección se obtienen igualando:

$$\frac{y^2}{2} = y$$

$(y)(y-2)=0$; $y = 0$, $y = 2$. Por tanto, $x=0$, $x=2$, la región está delimitada por $0 \leq x \leq 2$.

3. Plantear la integral doble:

$$\text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y = \iint_D dA = \int_0^2 \left[\int_x^{\sqrt{2x}} dy \right] dx$$

4. Resolver la integral iterada:

○ Primero, integrar respecto a y:

$$\int_x^{\sqrt{2x}} dy = [y]_x^{\sqrt{2x}} = [\sqrt{2x} - x]$$

○ Luego, integrar respecto a x:

$$\begin{aligned} \text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y &= \int_0^2 [\sqrt{2x} - x] dx = \int_0^2 [\sqrt{2x}] dx - \int_0^2 [x] dx \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \sqrt{2} \left[\left(\frac{4}{3} \right) \sqrt{2} - 0 \right] - \left[\left(\frac{4}{2} \right) - 0 \right] = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y = \frac{2}{3}$$

Figura 4

*Captura de pantalla de solución de la integral doble que representa el área de la región D delimitada por las curvas $2x=y^2$, $y=x$ utilizando **WolframAlpha** del ejemplo 2.*



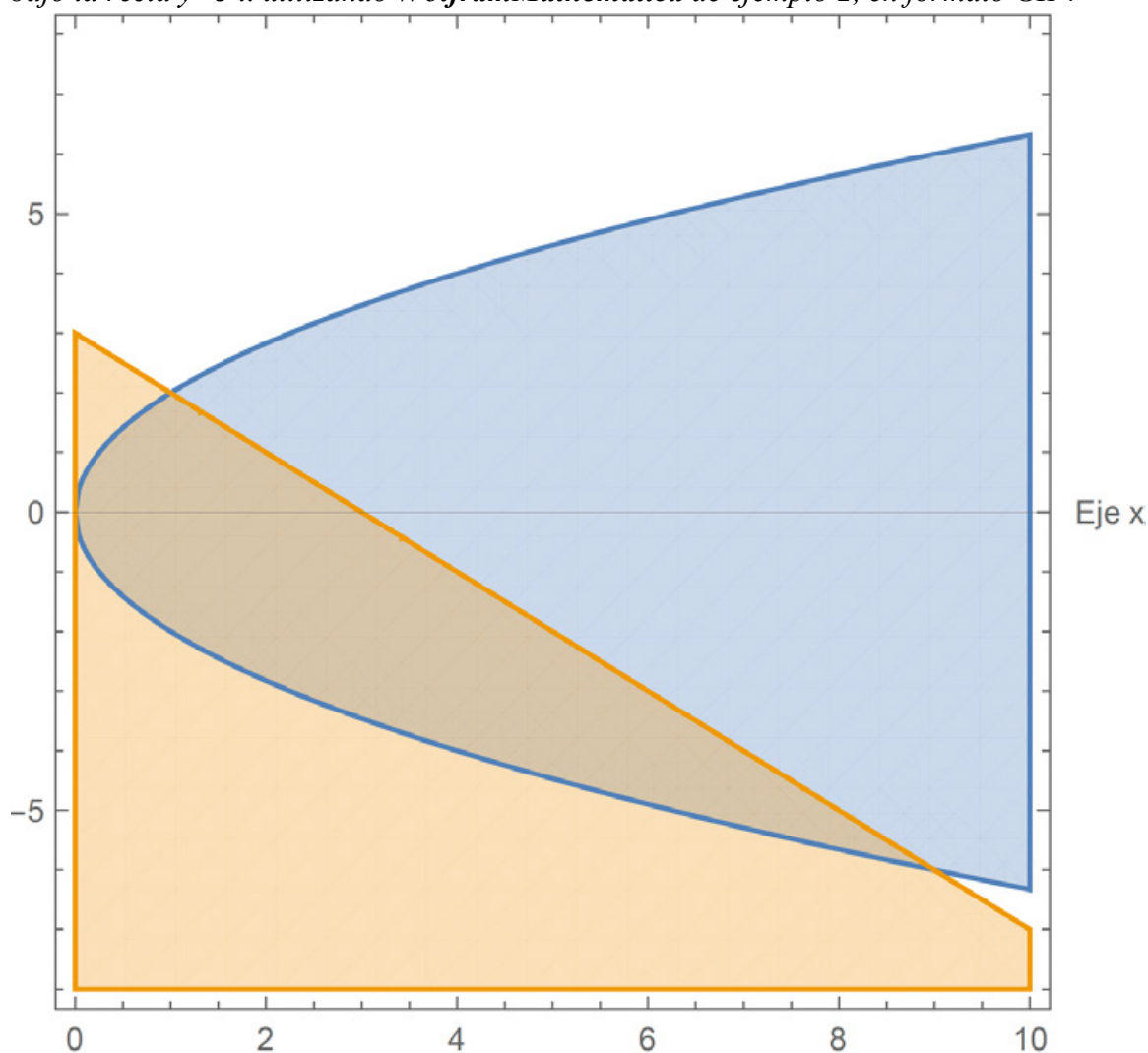
Nota. Fuente: Creación del autor generada en WolframAlpha

Ejemplo 3 de cálculo de área de dominio D

Calcular el área de la región D delimitada por las curvas $4x=y^2$, $y=3-x$.

Figura 5

Representación gráfica del dominio de integración D , región sobre la parábola $4x=y^2$ y bajo la recta $y=3-x$ utilizando **WolframMathematica** de ejemplo 2, en formato GIF.



Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

3. Identificar la región de integración: La curva $4x=y^2$ es una parábola, y $y=3-x$ una recta horizontal. Los puntos de intersección se obtienen igualando:

$$\frac{y^2}{4} = 3-y$$

$(y+6)(y-2)=0$; $y = -6$, $y = 2$. Por tanto, $x=1$, $x=9$, dos puntos de corte $(1,2)$, $(9,-6)$. La región está delimitada por $0 \leq x \leq 9$.

4. Plantear la integral doble: Al existir dos curvas superiores, dividimos en dos subdominios $D1$ [$0 \leq x \leq 1$, $g1(x)=-\sqrt{4x}$, $g2(x)=\sqrt{4x}$], $D2$ [$1 \leq x \leq 9$, $g1(x)=-\sqrt{4x}$, $g2(x)=3-x$]

$$\begin{aligned} \text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y &= \iint_D dA \\ &= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} dy \right] dx + \int_1^9 \left[\int_{-\sqrt{4x}}^{3-x} dy \right] dx \end{aligned}$$

5. Resolver la integral iterada:

- Primero, integrar respecto a y :

$$\int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} dy = [y]_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} = [\sqrt{4x} - (-\sqrt{4x})] = 2\sqrt{4x}$$

$$\int_{-\sqrt{4x}}^{3-x} dy = [y]_{-\sqrt{4x}}^{3-x} = [3-x - (-\sqrt{4x})] = 3-x + \sqrt{4x}$$

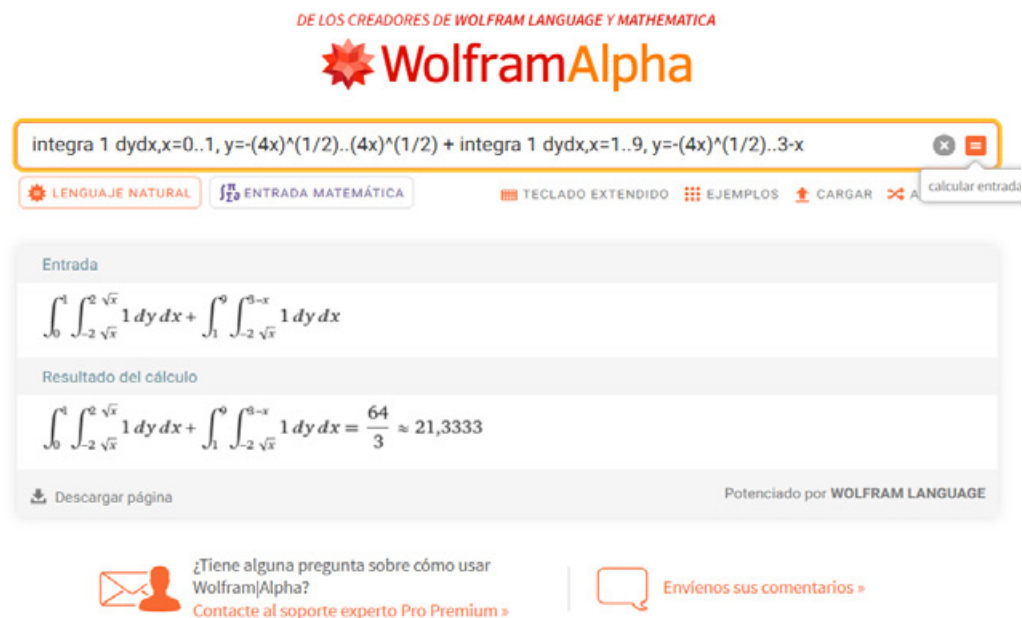
- Luego, integrar respecto a x :

$$\begin{aligned} \text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y &= \int_0^1 [2\sqrt{4x}] dx + \int_1^9 [3-x + \sqrt{4x}] dx \\ &= 2 \int_0^1 [\sqrt{4x}] dx + \int_1^9 3 dx - \int_1^9 [x] dx + \int_1^9 [\sqrt{4x}] dx \\ &= 4 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + 3[x]_1^9 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^9 + 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 \\ &= 4 \left[\frac{2}{3} - 0 \right] + 3[9-1] - \left[\left(\frac{81}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + 2 \left[18 - \frac{2}{3} \right] = \frac{8}{3} + 24 - \frac{80}{2} + \frac{104}{3} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Área del dominio } D \text{ en el plano } x, y = \frac{64}{3}$$

Figura 6

*Captura de pantalla de solución de la integral doble que representa el área de la región D delimitada por las curvas $4x=y^2$ y bajo la recta $y=3-x$ utilizando **WolframAlpha** del ejemplo 3.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en WolframAlpha.

Enlace 1: En el siguiente link se encuentra un video con dos ejemplos de cálculo de área del dominio D mediante la integral doble en coordenadas cartesianas.

<https://youtu.be/fcTskRqgyA?si=XpAj6rA6BbgYSAEp>

8.1.4 Ventajas del cálculo de área mediante integrales dobles

1. **Precisión:** Permite calcular áreas de regiones complejas con alta exactitud.
2. **Flexibilidad:** Puede adaptarse a una amplia variedad de dominios, incluyendo regiones delimitadas por funciones no lineales.
3. **Aplicaciones:** Es ampliamente utilizado en disciplinas como física, ingeniería y economía para modelar fenómenos reales.

8.1.5 Aplicaciones en la vida real

El cálculo de áreas mediante integrales dobles es esencial en campos como:

- **Ingeniería estructural:** Determinación de áreas transversales de vigas y columnas para calcular esfuerzos.
- **Cartografía:** Cálculo de áreas geográficas delimitadas por coordenadas conocidas o para calcular la extensión de una parcela con bordes no lineales.
- **Economía:** Evaluación de áreas bajo curvas que representan ingresos o costos acumulativos.

8.1.6 Conclusión

El cálculo de área mediante integrales dobles en coordenadas cartesianas proporciona un enfoque robusto y versátil para resolver problemas matemáticos y prácticos. Los textos de Piskunov y Thomas ofrecen una guía completa para dominar esta herramienta, destacando su aplicación tanto en el ámbito académico como profesional.

8.2. Cálculo de área mediante integrales dobles en coordenadas polares

El cálculo de área mediante integrales dobles en coordenadas polares es una técnica esencial del análisis matemático que facilita la resolución de problemas relacionados con regiones delimitadas por curvas en un sistema de coordenadas polares. Esta metodología es especialmente útil cuando las fronteras de la región presentan simetría radial, o cuando la descripción de dichas fronteras resulta ser mucho más sencilla en coordenadas polares que en coordenadas cartesianas. De hecho, como señala Piskunov (1977), las coordenadas polares permiten simplificar problemas que serían más complejos en un sistema cartesiano. Al usar este enfoque, podemos abordar de manera eficiente áreas y volúmenes en sistemas con simetrías circulares o esféricas.

Por otro lado, Thomas (2010) resalta que este método no solo simplifica los cálculos, sino que también aprovecha la naturaleza geométrica del sistema polar, lo que facilita la resolución de problemas en situaciones donde las curvas involucradas son funciones del ángulo polar. Ambos autores coinciden en que la comprensión adecuada de esta metodología no solo mejora el proceso de cálculo, sino que también amplía significativamente las aplicaciones del cálculo en campos como la geometría, la física, y la ingeniería. Con una correcta interpretación de las integrales en coordenadas polares, podemos abordar desafíos más complejos de manera más efectiva, mejorando tanto la precisión de los resultados como nuestra capacidad para abordar aplicaciones prácticas.

8.2.1 Fundamentos teóricos

En el sistema de coordenadas polares, un punto en el plano se representa mediante el par (r, θ) donde r es la distancia del punto al origen (radio) y θ es el ángulo formado con el eje polar (habitualmente el eje x). Para transformar una región definida en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, se utilizan las relaciones:

El elemento diferencial de área en coordenadas polares se expresa como:

lo cual introduce un factor adicional que refleja la naturaleza radial del sistema. La integral doble para calcular el área de una región en coordenadas polares se plantea como:

Aquí, $r_1(\theta)$ y $r_2(\theta)$ son las funciones que delimitan la región en el sentido radial, mientras que θ_1 y θ_2 son los límites angulares.

8.2.2 Procedimiento para calcular áreas

1. **Identificación de la región:** Determinar las curvas que delimitan la región en términos de y , así como sus respectivos límites.
2. **Planteamiento de la integral doble:** Establecer la expresión de la integral en coordenadas polares, asegurándose de incluir el factor en el elemento diferencial de área.
3. **Evaluación de la integral iterada:** Resolver primero la integral interna respecto a r y luego la integral externa respecto a θ .

Ejemplo 4 de cálculo de área de dominio D

Calcular el área de un cuarto de círculo de radio 3 situado en el primer cuadrante.

$$x^2+y^2=3^2, \quad x=r\cos \theta, y=r\sin \theta;$$

$$r=3$$

$$\theta=0, \theta=\pi, \text{ medio círculo varía de } 0 \text{ a } \pi$$

Figura 7

Representación gráfica del dominio de integración D, región de semicírculo de radio r, con el ángulo $\theta=0$ a $\theta=\pi$, correspondiente a medio círculo utilizando WolframMathematica de ejemplo 2, en formato GIF.

[CLASE 8, área ejem4.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica

Solución:

1. **Identificar la región:** En coordenadas polares, la mitad de círculo de radio 3, está delimitado por:

$$\theta \text{ varía de } 0 \text{ a } \pi.$$

$$r \text{ varía de } 0 \text{ a } 3.$$

2. **Plantear la integral:**

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_D (1)rdrd\theta = \int_0^\pi \left[\int_0^r r dr \right] d\theta$$

3. **Resolver la integral iterada:**

- Integrar primero respecto a r:

$$\int_0^3 r dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

- Luego, integrar respecto a θ :

$$\int_0^\pi \frac{9}{2} d\theta = \frac{9}{2} [\theta]_0^\pi = \frac{9\pi}{2}$$

Figura 8

*Captura de pantalla de solución de la integral doble que representa el área de la región D en coordenadas polares de radio $r=3$ y ángulo $\theta=0$ a $\theta=\pi$, utilizando **WolframAlpha** del ejemplo 4.*



Nota. Fuente: Creación del autor generada en WolframAlpha

El área del cuarto de círculo es $\frac{9\pi}{2}$ unidades cuadradas lo cual coincide con la fracción correspondiente del área total de un círculo completo.

Enlace 2: En el siguiente link se encuentra un video con dos ejemplos de cálculo de área del dominio D mediante la integral doble en coordenadas polares.

https://youtu.be/SGMrojoE_x4?si=dFsSWkcR9FDDPp0o

8.2.3 Aplicaciones prácticas

El cálculo de áreas mediante integrales dobles en coordenadas polares tiene numerosas aplicaciones en la vida real. Por ejemplo, en ingeniería estructural, se utiliza para calcular el área de secciones transversales de tuberías circulares o pilares cilíndricos, determinando así su capacidad de soportar cargas. En cartografía, permite medir áreas de regiones delimitadas por radios y ángulos en mapas topográficos, como lagos con bordes curvos. Además, en física, es esencial para analizar distribuciones de masa en discos rotantes, como los discos galácticos o las bases de turbinas. Entre las aplicaciones generales destacan:

- **Ingeniería y diseño estructural:** Determinación de áreas transversales de estructuras circulares, como tuberías, pilares o engranajes.
- **Cartografía y geografía:** Cálculo de áreas de regiones circulares o elípticas en mapas topográficos.
- **Física y astronomía:** Análisis de distribuciones de masa o carga en dominios radiales, como discos galácticos o campos magnéticos.

8.2.4 Conclusión

El cálculo de áreas utilizando integrales dobles en coordenadas polares es un método increíblemente eficiente, especialmente cuando trabajamos con regiones que tienen simetría radial. Piensa en círculos, sectores o cualquier figura que se expanda desde un punto central. Usar coordenadas polares no solo simplifica los cálculos, sino que también se adapta de manera natural a la geometría de estos problemas.

Algo interesante es el factor adicional que aparece en el elemento diferencial. Este factor no es arbitrario; refleja la naturaleza geométrica del sistema polar, permitiéndonos abordar problemas con precisión y claridad.

Referencias citadas en la Clase 8

Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo II*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación.
Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

-
Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 8

Coordenadas cartesianas (Definición): Son coordenadas cuyos valores se encuentran sobre los ejes cartesianos o sus paralelas, un punto P en coordenadas cartesianas se definen con $P(x,y)$ en R^2 , y con $P(x,y,z)$ en R^3 en el plano y en el espacio respectivamente.

Coordenadas polares (Definición): Son coordenadas cuyos valores se definen mediante un radio r que puede ser constante o variable y un ángulo θ que generalmente se empieza midiendo desde la horizontal en sentido antihorario, un punto P en coordenadas polares se definen con $P(r, \theta)$, que se encuentra sobre un plano que puede ser el plano x,y .



La excelencia no se improvisa

síguenos

