

Cálculo II

Límites de la integral triple

Clase 10

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El teorema de Fubini nos presenta una técnica para el cálculo de una función de varias variables mediante el cálculo de varias integrales de funciones de una variable. Ahora bien, si tenemos una integral triple y los valores de $f(x,y,z)$ son continuos para una caja rectangular $V=[a,b]*[c,d]*[e,f]$, en el que a,b,c,d,e,f son números reales., entonces, podemos expresar la integral triple iterada en 6 formas diferentes:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) dzdydx = \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x,y,z) dzdxdy$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x,y,z) dydzdx = \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x,y,z) dydxdz$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) dx dydz = \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x,y,z) dx dzdy$$

El teorema de Fubini nos ofrece una herramienta práctica para calcular funciones de varias variables, descomponiendo el problema en el cálculo de varias integrales de funciones de una sola variable. Ahora bien, si tenemos una integral triple y los valores de $f(x,y,z)$. El teorema de Fubini nos ofrece una herramienta práctica para calcular funciones de varias variables, descomponiendo el problema en el cálculo de varias integrales de funciones de una sola variable. Ahora bien, si tenemos una integral triple y los valores de $f(x,y,z)$

Reto # 3

Clase 10: Límites de la integral triple

10. Tema. Determinación de funciones y constantes que delimitan el dominio de integración.

10.1. Orden de límites de integración

El concepto de orden de límites de integración es un aspecto clave cuando nos enfrentamos al cálculo de integrales dobles y triples. En esencia, define el orden en que evaluamos las variables que intervienen dentro de una integral definida sobre un dominio específico. Esta idea no es meramente técnica; está profundamente vinculada con cómo identificamos las funciones y las constantes que limitan dicho dominio. Imagina que el orden de integración funciona como una guía que nos permite recorrer el espacio de forma organizada y eficiente, adaptándonos a las características del problema.

Tanto N. Piskunov (1977) como Thomas G.B. (2010) destacan la relevancia de este tema como una herramienta fundamental del cálculo integral. Ambos autores no solo proporcionan los fundamentos teóricos necesarios, sino también ejemplos claros y aplicaciones prácticas que facilitan su comprensión. A través de sus textos,

es posible explorar cómo el orden de integración influye en la simplicidad y viabilidad de resolver una integral. Comprender y dominar este concepto resulta esencial, no solo en el ámbito académico, sino también en aplicaciones prácticas, como las que encontramos en la física, la ingeniería y las ciencias computacionales.

10.1.1 Definición y Fundamentos Teóricos

El orden de límites de integración se refiere a la secuencia en la cual se integran las variables en una integral múltiple. En una integral doble, por ejemplo, $\iint_D f(x, y) dA$, el orden con el que se define dA puede ser $dx dy$ o $dy dx$. De manera similar, en una integral triple, $\iiint_V f(x, y, z) dV$, el orden con el que se define el diferencial de volumen dV puede variar según las variables x, y y z .

El orden de integración depende de cómo esté definido el dominio D o V y de la complejidad de las funciones que delimitan dicho dominio. Por ejemplo:

1. **Integrales Dobles:** En un dominio D definido por funciones de x y y , el orden $dx dy$ implica que se evalúan primero los límites respecto a x y luego los de y . Si el orden cambia a $dy dx$, los límites se ajustan en consecuencia.
2. **Integrales Triples:** En un dominio tridimensional V , el orden de integración podría ser, por ejemplo, $dx dy dz$, $dz dx dy$, u otra combinación, dependiendo de cómo esté delimitado el volumen.

El establecimiento del orden correcto de los límites permite simplificar el proceso de cálculo y evitar errores. La elección del orden se basa en criterios como:

- La naturaleza geométrica del dominio.
- La simplicidad de las funciones que lo delimitan.
- La conveniencia computacional para resolver las integrales.

10.1.2 Importancia Práctica del Orden de Límites

El orden de límites de integración tiene aplicaciones en diversas disciplinas, incluyendo:

1. **Ingeniería:** Cálculo de áreas y volúmenes en diseños estructurales.
2. **Física:** Determinación de distribuciones de masa o densidad en sistemas materiales.
3. **Economía:** Evaluación de funciones de beneficio o costo en regiones bidimensionales o tridimensionales.

Ejemplo 1

Determinar los límites de integración de la integral triple, conociendo que el dominio de integración es V que representa el volumen de un paraboloides definido por $z = 4 - x^2 - y^2$, sobre el plano $z=0$:

Figura 1

*Representación gráfica del dominio de integración V ($z = 4 - x^2 - y^2$; $z = 0$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 10, ejemplo1.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Solución:

El paraboloides está dado por:

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

El plano $z=0$, al tener intersección con el paraboloides, genera una sección circular en el plano x,y , dando lugar a la condición:

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$$

La sección circular es un disco:

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

1. Definición del dominio:

- En coordenadas cartesianas, el dominio en el plano xy es una zona circular de radio 2, dado por $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$x^2 + y^2 = 4$$

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$; con signo positivo la mitad superior del círculo, negativo la mitad inferior del círculo de radio 2.

Figura 2

*Representación gráfica del círculo en el plano x,y ($y = \sqrt{4 - x^2}$, mitad superior, $y = -\sqrt{4 - x^2}$, mitad inferior) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 10, círculo plano x,y ejemplo1.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Los límites en z serían: $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

2. Planteamiento de la integral triple:

- Con el orden $dz \, dy \, dx$:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x, y, z) \, dz dy dx$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} f(x, y, z) \, dz dy dx$$

Ejemplo 2

Determinar los límites de integración de la integral triple, conociendo que el dominio de integración es V que representa el volumen de un paralelepípedo rectangular definido por:

$$-1 \leq x \leq 4$$

$$2 \leq y \leq 5$$

$$-3 \leq z \leq 2$$

Figura 3

Representación gráfica del dominio V que representa al paralelepípedo rectangular ($-1 \leq x \leq 4$; $2 \leq y \leq 5$; $-3 \leq z \leq 2$) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 10, dominio V ejemplo2.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Solución:

El paralelepípedo tiene caras rectangulares con límites constantes

1. Definición del dominio:

En coordenadas cartesianas, el dominio en el plano xy es un rectángulo formado por:

$$-1 \leq x \leq 4 \quad 2 \leq y \leq 5$$

- Los límites en z serían: $-3 \leq z \leq 2$ que representa la altura

2. Planteamiento de la integral triple:

- Con el orden $dx \, dy \, dz$:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_e^f \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(y,z)}^{h2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-3}^2 \int_2^5 \int_{-1}^4 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Este ejemplo destaca la importancia de seleccionar un orden adecuado para simplificar el proceso de integración.

10.1.3 Conclusión

El orden de los límites de integración es fundamental en el cálculo de integrales múltiples, especialmente al trabajar con dominios complejos. Cambiar este orden no solo simplifica los cálculos, sino que también permite abordar problemas difíciles de resolver. Este procedimiento, esencial para el cálculo de áreas, volúmenes y problemas tridimensionales, tiene aplicaciones en matemáticas aplicadas, ingeniería, física y diversas ciencias.

Los textos de Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010) ofrecen una base sólida para comprender este concepto, proporcionando explicaciones claras y ejemplos prácticos. Estas obras destacan la importancia de identificar correctamente las relaciones entre las variables y los límites, mostrando cómo un cambio estratégico puede simplificar significativamente la solución de una integral.

Enlace 1: En el siguiente enlace se encuentra un artículo destinado a comprender como se articulan los procesos para designar los límites de integración sobre un dominio V que representa un volumen “Semiótica de límites de integración triple para volúmenes”

<https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/107>

10.2. Cambio de orden de límites de integración

El cambio de orden de límites de integración es una herramienta poderosa y esencial en el cálculo de integrales dobles y triples, diseñada para simplificar la resolución de problemas complejos al reorganizar el orden en el que se evalúan las variables. Esta técnica resulta particularmente útil cuando el dominio de integración presenta límites que dificultan la evaluación directa en el orden original. A través de un análisis cuidadoso de las funciones y constantes que

delimitan el dominio, podemos redefinir los límites para adaptarlos a un enfoque más eficiente.

Tanto N. Piskunov (1977) como Thomas G.B. (2010) abordan este tema en profundidad, destacando su importancia y proporcionando una metodología clara y rigurosa para su aplicación. En sus textos, se enfatiza cómo el cambio de orden no solo facilita los cálculos, sino que también ofrece una perspectiva más amplia para comprender la relación entre las variables y el dominio de integración. Además, esta técnica tiene aplicaciones prácticas significativas en campos como la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas, donde los dominios complejos son comunes. Comprender cómo y cuándo utilizar esta estrategia es clave para enfrentar con éxito problemas avanzados en el cálculo integral.

10.2.1 Fundamentos Teóricos

El cambio de orden de límites de integración se aplica principalmente cuando el dominio de integración es más fácil de describir o de integrar en un orden diferente al que inicialmente se plantea. Dado un dominio V sobre el cual se define una integral triple:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

el cambio de orden implica reorganizar los límites de integración para que la integral adopte la forma:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_e^f \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(y,z)}^{h2(y,z)} f(x, y, z) dx dy dz$$

Esto requiere una redefinición del dominio V en términos de las nuevas variables de integración, asegurándose de que los límites reflejen con precisión el volumen de integración.

10.2.2 Procedimiento General

1. Identificación del dominio: Se comienza analizando el dominio de integración en el sistema original. Esto implica determinar las funciones y constantes que delimitan V .
2. Reexpresión del dominio: Se reescribe V en términos de las nuevas variables, asegurándose de que las desigualdades representen el mismo conjunto de puntos.

3. Reorganización de los límites: Una vez definido el dominio en el nuevo orden, se reorganizan los límites en consecuencia, considerando primero los límites internos y luego los externos.
4. Evaluación de la integral: Se lleva a cabo el cálculo con los nuevos límites de integración, lo que puede simplificar significativamente el proceso.

10.2.3 Cambio de Orden

El cambio de orden de integración no altera su resultado, ya que se conserva el mismo volumen de integración, aunque este sea descrito de manera diferente. Sin embargo, dependiendo del nuevo orden elegido, la integral puede volverse más sencilla o, por el contrario, más compleja de resolver, lo que subraya la importancia de seleccionar adecuadamente el orden según el problema planteado.

Ejemplo 3

Calcular la integral triple en tres órdenes diferentes de la función $f(x, y, z) = x^2yz$ conociendo que el dominio de integración es V que representa el volumen de un paralelepípedo rectangular definido por:

$$1 \leq x \leq 4$$

$$2 \leq y \leq 8$$

$$4 \leq z \leq 6$$

Solución:

El paralelepípedo tiene caras rectangulares con límites constantes

1. Definición del dominio:

En coordenadas cartesianas, el dominio en el plano xy es un rectángulo formado por:

$$1 \leq x \leq 4 \quad 2 \leq y \leq 8$$

- Los límites en z serían: $4 \leq z \leq 6$ que representa la altura

2. Planteamiento de la integral triple:

- Con el orden $dz\,dy\,dx$:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_1^4 \left(\int_2^8 \left(\int_4^6 x^2 y z \, dz \right) dy \right) dx$$

Primero la integral interna: x, y se consideran constantes, la variable es z

$$\int_4^6 x^2 y z \, dz = x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \right)_4^6 = 10x^2 y$$

Segundo la integral respecto a y con el resultado obtenido en la primera integral $10x^2 y$, considerando x constante.

$$\int_2^8 (10x^2 y) \, dy = 10x^2 \int_2^8 y \, dy = 10x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right)_2^8 = 300x^2$$

Tercero: La integral respecto a x con el resultado obtenido en la segunda integral $300x^2$

$$\int_1^4 300x^2 \, dx = 300 \int_1^4 x^2 \, dx = 300 \left(\frac{x^3}{3} \right)_1^4 = 6300$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_1^4 \left(\int_2^8 \left(\int_4^6 x^2 y z \, dz \right) dy \right) dx = \mathbf{6300}$$

Figura 4

*Cálculo de la integral triple en el orden $dz\,dy\,dx$ utilizando la aplicación Symbolab ($-1 \leq x \leq 4$; $2 \leq y \leq 5$; $-3 \leq z \leq 2$) utilizando **Symbolab**, en formato GIF.*

https://es.symbolab.com/solver/triple-integrals-calculator/%5Cint_%7B4%7D%5E%7B6%7D%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B8%7D%20x%5E%7B2%7Dyzydydxdz?or=input

Symbolab Soluciones Gráficos Calculadoras Geometría Herramientas

Pasos de solución ☐ Un paso a la vez

$$\int_1^4 \int_2^8 \int_4^6 x^2 y z dz dy dx$$

$$\int_4^6 x^2 y z dz = x^2 y \cdot 10$$

$$= \int_1^4 \int_2^8 x^2 y \cdot 10 dy dx$$

$$\int_2^8 x^2 y \cdot 10 dy = 300 x^2$$

$$= \int_1^4 300 x^2 dx$$

$$\int_1^4 300 x^2 dx = 6300$$

$$= 6300$$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

- **Con el orden $dx dy dz$:**

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_4^6 \left(\int_2^8 \left(\int_1^4 x^2 y z dx \right) dy \right) dz$$

Primero: La integral interna: y, z se consideran constantes, la variable es x .

$$\int_1^4 x^2 y z dx = yz \left(\frac{x^3}{3} \right)_1^4 = \frac{63}{3} yz$$

Segundo: La integral respecto a y con el resultado obtenido en la primera integral $\frac{63}{3} yz$, considerando z constante.

$$\int_2^8 \left(\frac{63}{3} yz \right) dy = \frac{63}{3} z \int_2^8 y dy = \frac{63}{3} z \left(\frac{y^2}{2} \right)_2^8 = 630z$$

Tercero: La integral respecto a z con el resultado obtenido en la segunda integral $630z$

$$\int_4^6 630z \, dz = 630 \int_4^6 z \, dz = 630 \left(\frac{z^2}{2} \right)_4^6 = 6300$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \int_4^6 \left(\int_2^8 \left(\int_1^4 x^2 y z \, dx \right) dy \right) dz = 6300$$

Figura 5

Cálculo de la integral triple en el orden $dx \, dy \, dz$ utilizando la aplicación Symbolab ($-1 \leq x \leq 4$; $2 \leq y \leq 5$; $-3 \leq z \leq 2$) utilizando **Symbolab**, en formato GIF.

https://es.symbolab.com/solver/triple-integrals-calculator/%5Cint_%7B4%7D%5E%7B6%7D%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B8%7D%20x%5E%7B2%7Dyzydxdz?or=input

The screenshot shows the Symbolab interface with the following steps:

- Problem:** $\int_4^6 \int_2^8 \int_1^4 x^2 y z \, dx \, dy \, dz$
- Step 1:** $\int_1^4 x^2 y z \, dx = yz \cdot 21$
- Step 2:** $= \int_2^8 \int_4^6 yz \cdot 21 \, dy \, dz$
- Step 3:** $\int_2^8 yz \cdot 21 \, dy = 630z$
- Step 4:** $= \int_4^6 630z \, dz$
- Step 5:** $\int_4^6 630z \, dz = 6300$
- Final Answer:** $= 6300$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

- **Con el orden $dy \, dx \, dz$:**

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \int_4^6 \left(\int_1^4 \left(\int_2^8 x^2 y z \, dy \right) dx \right) dz$$

Primero: La integral interna: x, z se consideran constantes, la variable es y .

$$\int_2^8 x^2 y z \, dy = x^2 z \left(\frac{y^2}{2} \right)_2^8 = 30x^2 z$$

Segundo: La integral respecto a x con el resultado obtenido en la primera integral $30x^2 z$, considerando z constante.

$$\int_1^4 (30x^2 z) \, dx = 30z \int_1^4 x^2 \, dx = 30z \left(\frac{x^3}{3} \right)_1^4 = 630z$$

Tercero: La integral respecto a z con el resultado obtenido en la segunda integral $630z$

$$\int_4^6 630z \, dz = 630 \int_4^6 z \, dz = 630 \left(\frac{z^2}{2} \right)_4^6 = 6300$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dV = \int_4^6 \left(\int_1^4 \left(\int_2^8 x^2 y z \, dy \right) dx \right) dz = \mathbf{6300}$$

Figura 6

*Cálculo de la integral triple en el orden $dy \, dx \, dz$ utilizando la aplicación Symbolab ($-1 \leq x \leq 4$; $2 \leq y \leq 5$; $-3 \leq z \leq 2$) utilizando **Symbolab**, en formato GIF.*

https://es.symbolab.com/solver/triple-integrals-calculator/%5Cint_%7B4%7D%5E%7B6%7D%5Cint_%7B1%7D%5E%7B4%7D%5Cint_%7B2%7D%5E%7B8%7D%20x%5E%7B2%7Dyzdydxdz?or=input

6300

Ocultar pasos ^

Pasos de solución Un paso a la vez

$$\int_4^6 \int_0^2 \int_0^3 2xyz \, dy \, dx \, dz$$

$$\int_0^3 x^2 y \, dy = x^2 z \cdot 30$$

$$= \int_0^2 x^2 z \cdot 30 \, dx \, dz$$

$$\int_0^2 x^2 z \cdot 30 \, dx = 630z$$

$$= \int_4^6 630z \, dz = 6300$$

$$= 6300$$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Enlace 2: En el siguiente video se puede apreciar el cambio de orden de una integral triple en un dominio de volumen V delimitado por $4z = x^2 + y^2$; $z = 4$

Figura 7

Representación gráfica del dominio de integración V ($4z = x^2 + y^2$; $z = 4$) utilizando *WolframMathematica*, en formato GIF.

[CLASE 10, gráfico enlace 2.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

<https://youtu.be/5WGW82fSXnU?si=XQn5UIFeUyj2dH15>

Las tres expresiones con su propio orden representan el mismo dominio, pero la reorganización puede facilitar el cálculo dependiendo de la función $f(x,y,z)$.

10.2.4 Representación Gráfica

El dominio V , que corresponde a un volumen en el espacio tridimensional, puede representarse gráficamente para facilitar la comprensión de su estructura y límites. Esta representación visual es especialmente útil al aplicar el cambio de orden de límites de integración, ya que nos permite identificar cómo se reorganizan los límites sin alterar el área o el volumen cubierto por el dominio.

Al cambiar el orden de integración, la orientación de los límites se ajusta según las nuevas variables de integración, pero el dominio original permanece inalterado en términos geométricos. Este concepto, discutido en detalle por Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010), es clave para garantizar que el proceso de integración mantenga la consistencia matemática y geométrica. Representar gráficamente el dominio antes y después del cambio de orden es una práctica recomendada para verificar la correcta interpretación de los nuevos límites y para evitar errores en la formulación de la integral.

10.2.5 Conclusión

El cambio de orden de límites de integración es una herramienta poderosa en el cálculo de integrales múltiples, ya que simplifica el proceso al reorganizar el dominio y los límites de integración. Esta técnica es útil para resolver problemas complejos con geometrías complicadas, optimizando el cálculo de áreas, volúmenes y otras propiedades en matemáticas aplicadas, física e ingeniería.

Los textos de Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010) ofrecen una base sólida para comprender esta técnica, proporcionando explicaciones claras y ejemplos prácticos. Ambos autores destacan cómo este método no solo facilita la integración, sino que amplía la comprensión de la relación entre variables y límites del dominio.

Referencias citadas en la Clase 10

- Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.
- Symbolab. (s. f.). *Calculadoras de integrales múltiples y herramientas matemáticas avanzadas*. Recuperado de <https://es.symbolab.com>.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.
- Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>
-
- Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.
- Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 10.

Teorema de Fubini: El teorema lleva el nombre del matemático italiano Guido Fubini, permite calcular integrales dobles y triples de funciones de varias variables mediante integración iterada de una variable. A partir de ahí se podrán utilizar todas las técnicas conocidas de análisis de una variable para el cálculo de integrales mediante cálculo de primitivas y el teorema fundamental de cálculo.

Diferencial de volumen: También conocidos como elemento diferencial de volumen, se compone por elemento diferenciales de línea y de área, geométricamente se puede aproximar a un cubo de medidas extremadamente pequeñas, es decir de lados de tamaño diferencial, su volumen dV es el producto de sus tres lados sin importar el orden.

$$dV = dx dy dz \quad dV = dz dx dy \quad dV = dy dx dz$$



La excelencia no se improvisa

síguenos

