

Cálculo II

Cálculo de la integral triple

Clase 11



Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

A diferencia de cuando hablamos de integrales dobles, que trabajan con funciones de dos variables sobre un dominio de área D , y cuyo resultado podemos representar como el volumen bajo la superficie de la función $f(x,y)$. Cuando hablamos de integrales triples su interpretación cambia. El resultado de las integrales triples ya no tiene una representación geométrica, sin embargo, tiene gran significado físico como distribución de temperatura, flujo de calor, cálculo de masa de sólidos no homogéneos, centros de masa, momentos de inercia, y distribución de presión en fluidos.

Ahora bien, dependiendo de la complejidad del dominio V y de la función $f(x,y,z)$, el cambio de variables a coordenadas esféricas $f(r, \theta, \varphi)$ o cilíndricas $f(r, \theta, z)$, podría facilitar la solución de la integral.

Reto # 3

Clase 11: Cálculo de la integral triple

11. Tema. Tema. Integrales triples de funciones de tres variables independientes.

11.1. Cálculo de integrales triples de funciones en coordenadas cartesianas

El cálculo de integrales triples en coordenadas cartesianas es una herramienta fundamental en el análisis matemático, especialmente para evaluar volúmenes y otras propiedades relacionadas con funciones de tres variables independientes. Esta técnica se aplica ampliamente en diversas áreas, como la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas, donde los problemas suelen requerir una descripción precisa de fenómenos tridimensionales.

Los textos clásicos de N. Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010) abordan este tema con un enfoque riguroso y sistemático, proporcionando a los estudiantes y profesionales una base sólida para comprender y aplicar estas integrales en situaciones prácticas. Ambos autores destacan la importancia de establecer correctamente los límites de integración y de elegir el orden adecuado para el cálculo iterativo. Además, subrayan cómo las coordenadas cartesianas, aunque básicas, son una herramienta poderosa para resolver problemas cuando el dominio de integración y la función se expresan naturalmente en términos de x, y y z .

Esta metodología no solo facilita la resolución de problemas, sino que también permite interpretar los resultados en contextos físicos y geométricos, reforzando la conexión entre las matemáticas abstractas y sus aplicaciones reales.

11.1.1 Definición y Contexto

Una integral triple en coordenadas cartesianas permite integrar una función $f(x,y,z)$ sobre una región tridimensional V del espacio. Matemáticamente, se representa como:

$$\iiint_V f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

Aquí, dx , dy , y dz representan diferenciales en las direcciones x , y , y z , respectivamente. El dominio de integración V se define mediante funciones y constantes que determinan los límites en cada una de las variables.

11.1.2 Procedimiento General

El proceso para calcular una integral triple en coordenadas cartesianas consta de varios pasos esenciales:

1. **Definir el dominio de integración:** Se identifica V , que puede estar delimitado por planos, superficies o regiones específicas en el espacio tridimensional. Este dominio puede expresarse mediante desigualdades en las variables x , y , y z .
2. **Establecer el orden de integración:** El orden de integración puede ser $dx dy dz$, o cualquier otra permutación, dependiendo de la complejidad del dominio y la función $f(x,y,z)$.
3. **Configurar los límites de integración:** Los límites externos corresponden a la primera variable a integrar y suelen ser constantes. Los límites intermedios e internos pueden depender de una o más variables integradas previamente.
4. **Evaluar las integrales:** Se realiza la integración en el orden establecido, resolviendo primero la integral interna, luego la intermedia, y finalmente la externa.

Ejemplo 1

Determinar la integral triple de la función $f(x,y,z)=xyz$ sobre el dominio de integración V que es un tetraedro limitado por los planos $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

- Definir el dominio de integración:

Figura 1

Representación gráfica del dominio de integración V

$(x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0)$ utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 11, dominio V ejemplo1.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $dzdydx$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} (xyz) dzdydx$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

$x + y + z = 1$, entonces $z = 1 - x - y$

$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

$x + y + z = 1$, entonces en el plano xy en $z=0$ $x + y = 1$; $y = 1 - x$

$$0 \leq y \leq 1 - x$$

$y = 1 - x$, entonces para $y=0$; $x=1$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (xyz) dzdydx$$

- Evaluar las integrales:

Paso 1. Integración respecto a z , se consideran constantes x, y :

$$\int_0^{1-x-y} (xyz) dzdydx = xy \int_0^{1-x-y} z dz = xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} = xy \frac{(1-x-y)^2}{2}$$

$$\int_0^{1-x-y} (xyz) dzdydx = \frac{1}{2} (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2)$$

Paso 2. Integración respecto a y , se considera constante x :

Luego de factorar y sumar términos semejantes:

$$\int_0^{1-x} \frac{1}{2} (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2) dy = \frac{1}{24} [x(1-x)^4]$$

Paso 3. Integración respecto a x:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{24} [x(1-x)^4] dx &= -\frac{1}{24} \left[\frac{(1-x)^5}{5} - \frac{(1-x)^6}{6} \right]_0^1 \\ \int_0^1 \frac{1}{24} [x(1-x)^4] dx &= -\frac{1}{24} \left\{ \left[\frac{(1-1)^5}{5} - \frac{(1-1)^6}{6} \right] - \left[\frac{(1-0)^5}{5} - \frac{(1-0)^6}{6} \right] \right\} \\ \int_0^1 \frac{1}{24} [x(1-x)^4] dx &= -\frac{1}{24} \left\{ \left[\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^6}{6} \right] - \left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^6}{6} \right] \right\} = -\frac{1}{24} \left\{ [0] - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] \right\} \\ \int_0^1 \frac{1}{24} [x(1-x)^4] dx &= -\frac{1}{24} \left\{ -\left[\frac{1}{30} \right] \right\} = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

Figura 2

Cálculo de la integral triple en el orden ***dz dy dx*** utilizando la aplicación Symbolab ($x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$) utilizando ***Symbolab***, en formato GIF.

[integral de 0 a 1 de integral de 0 a 1-x de integral de 0 a 1-x-y de \(xyz\)](#)

Symbolab Soluciones Gráficos Calculadoras Geometría Herramientas

Pasos de solución ☐ Un paso a la vez

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (xyz) dz dy dx$$

$$\int_0^{1-x-y} (xyz) dz = \frac{xy(1-x-y)^2}{2}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{xy(1-x-y)^2}{2} \right) dy dx$$

$$\int_0^{1-x} \left(\frac{xy(1-x-y)^2}{2} \right) dy = \frac{x(8x(-x+1)^3 - 8(-x+1)^3 + 3(-x+1)^4 - 12x(-x+1)^2 + 6x^2(-x+1)^2 + 6(-x+1)^2)}{24}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x(8x(-x+1)^3 - 8(-x+1)^3 + 3(-x+1)^4 - 12x(-x+1)^2 + 6x^2(-x+1)^2 + 6(-x+1)^2)}{24} \right) dx = \frac{1}{720}$$

$$= \frac{1}{720}$$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Figura 3

Cálculo de la integral triple en el orden ***dx dy dz*** utilizando la aplicación Symbolab ($x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$) utilizando ***Symbolab***, en formato GIF.
[integral de 0 a 1 de integral de 0 a 1-z de integral de 0 a 1-y-z de \(xyz\)](#)

Symbolab Soluciones Gráficos Calculadoras Geometría Herramientas

Pasos de solución ☐ Un paso a la vez

$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (xyz) dx dy dz$

$\int_0^{1-y-z} (xyz) dx = \frac{yz(1-y-z)^2}{2}$

$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(\frac{yz(1-y-z)^2}{2} \right) dy dz$

$\int_0^{1-z} \left(\frac{yz(1-y-z)^2}{2} \right) dy = \frac{z(8z(-z+1)^3 - 8(-z+1)^3 + 3(-z+1)^4 - 12z(-z+1)^2 + 6z^2(-z+1)^2 + 6(-z+1)^2)}{24}$

$= \int_0^1 \left(\frac{z(8z(-z+1)^3 - 8(-z+1)^3 + 3(-z+1)^4 - 12z(-z+1)^2 + 6z^2(-z+1)^2 + 6(-z+1)^2)}{24} \right) dz = \frac{1}{720}$

$= \frac{1}{720}$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Figura 4

Cálculo de la integral triple en el orden **dy dx dz** utilizando la aplicación Symbolab ($x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$) utilizando **Symbolab**, en formato GIF.

[integral de 0 a 1 de integral de 0 a 1-z de integral de 0 a 1-x-z de \(xyz\)](#)

Symbolab Soluciones Gráficos Calculadoras Geometría Herramientas

Pasos de solución ☐ Un paso a la vez

$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} (xyz) dy dx dz$

$\int_0^{1-x-z} (xyz) dy = \frac{xz(1-x-z)^2}{2}$

$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(\frac{xz(1-x-z)^2}{2} \right) dx dz$

$\int_0^{1-z} \left(\frac{xz(1-x-z)^2}{2} \right) dx = \frac{z(8z(-z+1)^3 - 8(-z+1)^3 + 3(-z+1)^4 - 12z(-z+1)^2 + 6z^2(-z+1)^2 + 6(-z+1)^2)}{24}$

$= \int_0^1 \left(\frac{z(8z(-z+1)^3 - 8(-z+1)^3 + 3(-z+1)^4 - 12z(-z+1)^2 + 6z^2(-z+1)^2 + 6(-z+1)^2)}{24} \right) dz = \frac{1}{720}$

$= \frac{1}{720}$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Ejemplo 2

Determinar los límites de integración de la integral triple de la función $f(x,y,z)=yz$ sobre el dominio de integración V que es un cilindro $x^2 + y^2 = 3^2$, limitado por los planos $z=0, z=4$.

- Definir el dominio de integración:

Figura 5

Representación gráfica del dominio de integración V ($x^2 + y^2 = 3^2$) limitado por los planos $z = 0, z = 4$ utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 11, dominio V ejemplo2.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $dz dy dx$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} (yz) dz dy dx$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

$$0 \leq z \leq 4$$

$x^2 + y^2 = 3^2$ entonces $y^2 = 3^2 - x^2$, despejando $y = \pm\sqrt{3^2 - x^2}$, en el plano xy en $z=0$, se forma un círculo de radio 3, mitad superior representado por $y = +\sqrt{3^2 - x^2}$, mitad inferior representado por $y = -\sqrt{3^2 - x^2}$

$$-\sqrt{3^2 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{3^2 - x^2}$$

$y = \pm\sqrt{3^2 - x^2}$, entonces para $y=0$; $x=\pm 3$

$$-3 \leq x \leq 3$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{3^2 - x^2}}^{+\sqrt{3^2 - x^2}} \int_0^4 (yz) dz dy dx$$

Ejemplo 3 (por resolver)

Calcular la integral triple de la función $f(x,y,z)=xz$ de forma analítica y utilizando **Symbolab** sobre el dominio de integración V que es un cono $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{z^2}{4^2}$, limitado por el plano, $z=4$.

Ejemplo 4

Calcular la integral triple utilizando una aplicación de cálculo de integrales de la función $f(x,y,z)=x+y$ sobre el dominio de integración V que es un sólido en el primer octante limitado por las superficies $x + y = 2$; $z = 4 - y^2$.

Figura 6

Representación gráfica del dominio de integración V ($x + y = 2$; $z = 4 - y^2$ en el primer octante) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 11, dominio V ejemplo4.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Solución:

Se puede utilizar el software utilizado en la clase 10

[integral de 0 a 2 de integral de 0 a 2-x de integral de 0 a 4-y^2 de \(x+y\)](#)

Figura 7

Cálculo de la integral triple en el orden $dzdydx$ utilizando la aplicación Symbolab($x + y = 2$; $z = 4 - y^2$ en el primer octante) utilizando **Symbolab**, en formato GIF.

The screenshot shows the Symbolab interface with the 'Pasos de solución' (Steps of solution) section. The problem is to evaluate the triple integral $\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-y^2} (x+y) dz dy dx$. The steps are as follows:

- Integrate with respect to z : $\int_0^{4-y^2} (x+y) dz = (-y^2+4)(x+y)$
- Integrate with respect to y : $= \int_0^2 \int_0^{2-x} (-y^2+4)(x+y) dy dx$
- Integrate with respect to x : $\int_0^2 \left(-2x^2 - \frac{x(-x+2)^3}{3} - \frac{(-x+2)^4}{4} + 8 \right) dx$
- Evaluate the final integral: $\int_0^2 \left(-2x^2 - \frac{x(-x+2)^3}{3} - \frac{(-x+2)^4}{4} + 8 \right) dx = \frac{128}{15}$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Enlace 1: En el siguiente enlace se encuentra un video con el ejemplo 4 bien detallado sobre cálculo de integrales triples en coordenadas cartesianas, para los gráficos utiliza GEOGEBRA.

<https://youtu.be/BO8iKxmSK-A?si=2E0PriEAq6lQnj6L>

11.1.3 Aplicaciones Prácticas

El cálculo de integrales triples en coordenadas cartesianas tiene aplicaciones en física, ingeniería y otras ciencias aplicadas. Un ejemplo común es determinar la masa de un objeto con densidad variable. Si una región del espacio contiene un material cuya densidad está dada por $\rho(x,y,z)$, la masa total M se calcula mediante:

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dV$$

Por ejemplo, para un bloque de dimensiones $1 \times 2 \times 3$ y densidad $\rho(x,y,z)=x+y+z$, el cálculo realizado anteriormente representa su masa.

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dV = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz$$

11.1.4 Conclusión

El cálculo de integrales triples en coordenadas cartesianas es un concepto fundamental que permite evaluar volúmenes y propiedades físicas en espacios tridimensionales, ofreciendo una base sólida para abordar problemas complejos en matemáticas aplicadas y ciencias físicas. Este enfoque no solo es útil para determinar volúmenes, sino también para calcular propiedades como la masa, el centro de masa, y los momentos de inercia en sólidos de diversas formas y composiciones.

La metodología presentada por Piskunov (1977) y Thomas (2010) destaca la importancia de comprender a fondo el dominio de integración y el orden de los límites, enfatizando cómo una adecuada configuración de estos elementos puede simplificar significativamente el proceso de cálculo. Estos textos proporcionan herramientas prácticas y teóricas que permiten adaptar las integrales triples a una amplia variedad de situaciones, desde aplicaciones académicas hasta problemas del mundo real en áreas como la ingeniería y la física.

11.2. Cálculo de integrales triples de funciones en coordenadas cilíndricas y esféricas.

El cálculo de integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas es una técnica esencial en matemáticas aplicadas para resolver problemas tridimensionales en dominios que poseen simetrías cilíndricas o radiales. Este enfoque es particularmente útil cuando la geometría del problema o la función a integrar se ajustan naturalmente a estas coordenadas, simplificando significativamente el proceso de cálculo y reduciendo la complejidad algebraica en comparación con las coordenadas cartesianas.

Los fundamentos y metodologías de estas integrales se describen con detalle en los textos de N. Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010), quienes enfatizan la importancia de comprender las transformaciones entre sistemas de coordenadas. Por ejemplo, las coordenadas cilíndricas son ideales para dominios con simetría alrededor de un eje, como cilindros o conos, mientras que las coordenadas esféricas son adecuadas para dominios con simetría radial, como esferas o partes de ellas.

Ambos autores destacan cómo el cambio de variables a coordenadas cilíndricas o esféricas no solo simplifica la formulación de los límites de integración, sino que también facilita la interpretación física y geométrica de los resultados, haciendo de estas técnicas una herramienta versátil en áreas como la física, la ingeniería y la geometría aplicada.

11.2.1 Coordenadas Cilíndricas

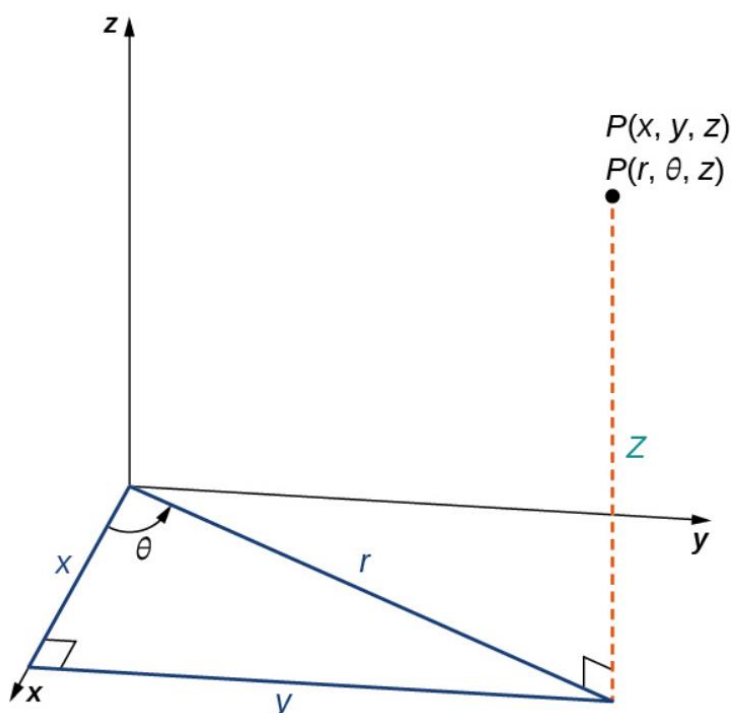
Definición y Transformación

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto en el espacio tridimensional se representa mediante $P(r, \theta, z)$, donde:

- r es la distancia radial desde el eje z .
- θ es el ángulo medido en el plano xy respecto al eje x .
- z es la coordenada vertical.

Figura 8

Representación gráfica de un punto P en coordenadas cilíndricas, (captura de pantalla) en formato GIF.



Nota. Fuente: <https://openstax.org/books/calculo-volumen-3/pages/2-7-coordenadas-cilindricas-y-esfericas>

La transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas se expresa como:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

El elemento de volumen en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

Evaluación de la Integral

Una integral triple en coordenadas cilíndricas tiene la forma general:

$$\iiint_V f(r, \theta, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g1(\theta)}^{g2(\theta)} \int_{h1(r, \theta)}^{h2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

donde el volumen V es el dominio de integración.

Esta representación es especialmente útil para calcular integrales en regiones simétricas alrededor del eje z , como cilindros y conos.

11.2.2 Coordenadas Esféricas

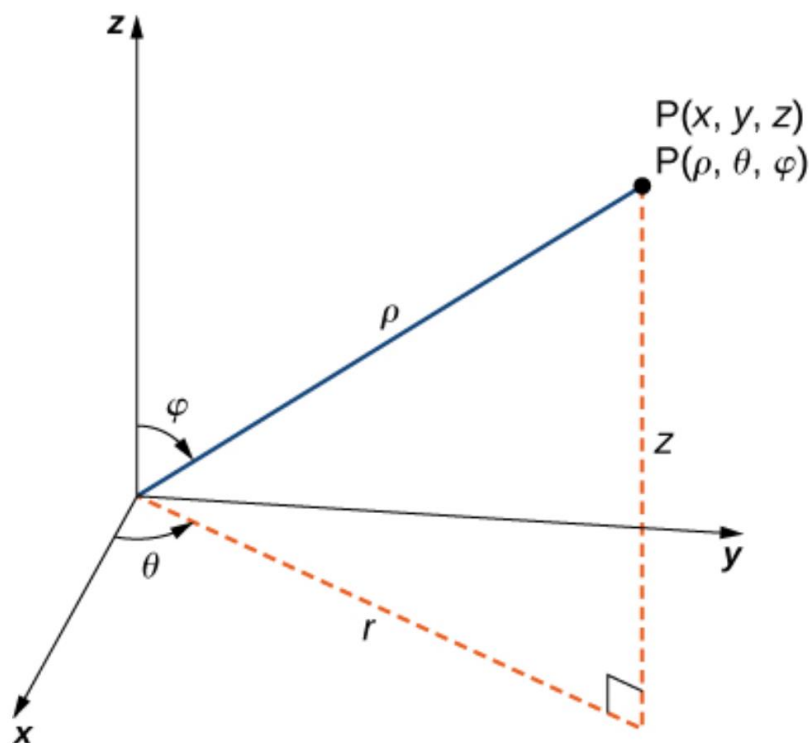
Definición y Transformación

En coordenadas esféricas, un punto en el espacio se describe mediante $P(\rho, \theta, \varphi)$, donde:

- ρ es la distancia radial desde el origen.
- θ es el ángulo polar, medido desde el eje x .
- φ es el ángulo azimutal, medido en el plano.

Figura 9

Representación gráfica de un punto P en coordenadas cilíndricas, (captura de pantalla) en formato GIF.



Nota. Fuente: <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/2-7-coordenadas-cilindricas-y-esfericas>

Las relaciones de transformación son:

$$r = \rho \sin \varphi \quad x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi \quad \rho^2 = r^2 + z^2$$

El elemento de volumen se escribe como:

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

Evaluación de la Integral

Una integral triple en coordenadas esféricas tiene la forma general:

$$\iiint_V f(\rho, \theta, \varphi) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{h_1(\rho, \theta)}^{h_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

Este enfoque es ideal para calcular volúmenes de regiones esféricas o simétricas respecto al origen.

Aplicaciones

Prácticas

El uso de coordenadas cilíndricas y esféricas se extiende a una amplia variedad de disciplinas, especialmente en la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas. Estos sistemas permiten abordar problemas complejos con simetrías específicas de manera más eficiente que con coordenadas cartesianas.

Coordenadas

Cilíndricas:

Las coordenadas cilíndricas son ideales para analizar geometrías y fenómenos relacionados con estructuras que poseen simetría alrededor de un eje. Algunos ejemplos prácticos incluyen:

- **Diseño de tuberías y conductos:** Permiten modelar y optimizar estructuras circulares, facilitando el análisis del flujo de fluidos.
- **Cálculo de momentos de inercia:** Se utilizan para determinar la distribución de masa y resistencia al giro en cilindros y discos.
- **Distribución de calor:** Son útiles para estudiar cómo el calor se propaga en objetos cilíndricos, como cables o tubos.

Coordenadas

Esféricas:

Las coordenadas esféricas son particularmente útiles para problemas que involucran simetrías radiales. Ejemplos destacados incluyen:

- **Modelado de campos gravitacionales y eléctricos:** Permiten analizar fuerzas radiales en planetas o estrellas.
- **Cálculo de masas y volúmenes planetarios:** Facilitan la estimación de la distribución de masa en cuerpos esféricos.
- **Distribución de presión en esferas líquidas:** Son esenciales para modelar el comportamiento de fluidos en depósitos o gotas esféricas.

Estos sistemas no solo simplifican los cálculos matemáticos, sino que también proporcionan una perspectiva intuitiva para visualizar y resolver problemas tridimensionales en contextos reales.

Conclusión

El cálculo de integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas es una herramienta esencial para analizar y resolver problemas que involucran dominios tridimensionales con simetrías específicas, como las cilíndricas o radiales. Estas técnicas no solo simplifican los cálculos matemáticos al adaptar el sistema de coordenadas al problema en cuestión, sino que también proporcionan un enfoque más intuitivo para entender la geometría y la física del dominio.

Los textos de N. Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010) ofrecen una guía exhaustiva sobre los fundamentos teóricos y las aplicaciones prácticas de estas herramientas, destacando cómo pueden emplearse para abordar problemas reales en disciplinas como la ingeniería, la física y las ciencias aplicadas. Desde el cálculo de volúmenes y centros de masa hasta la modelización de campos gravitacionales y eléctricos, estas técnicas resultan fundamentales en la resolución de problemas complejos.

Enlace 2: En el siguiente enlace se encuentra teoría y ejemplos detallados sobre cálculo de integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.

[15.5: Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas - LibreTexts Español](#)

Referencias citadas en la Clase 11

Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.

OpenStax. (s.f.). *Cálculo volumen 3*. OpenStax. Recuperado el 18 de abril de 2025, de <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/2-7-coordenadas-cilindricas-y-esfericas>

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

-

Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 11

Configurar los límites de integración: La configuración de límites se realiza de acuerdo al orden de integración que se haya escogido. En el ejemplo 1, se presenta de forma detallada la configuración cuando el orden es $dzdydx$, sin embargo, las otras dos configuraciones resueltas mediante software se tiene que conocer antes de su utilización:

Orden $dx dy dz$:

Partiendo de la superficie $x+y+z=1$, como la primera integral es respecto a x , despejamos x , lo que nos lleva al primer límite $x=1-y-z$.

$$0 \leq x \leq 1-y-z$$

La segunda integral es respecto a y , entonces la restricción se encuentra en el plano yz , esto se determina realizando $x=0$, la superficie queda $y+z=1$, entonces despejamos la variable y , $y=1-z$, lo que nos lleva al segundo límite.

$$0 \leq y \leq 1-z$$

La tercera y última integral iterada es respecto a z , su valor se determina realizando $y=0$ en la ecuación $y+z=1$ porque el mínimo valor de y es 0, entonces $z=1$.

$$0 \leq z \leq 1$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (xyz) dx dy dz$$

Evaluar las integrales: Se refiere a que una vez realizado la integración, en ese resultado se debe reemplazar los límites de integración previamente calculados, siempre se inicia reemplazando en el resultado el límite superior y se resta reemplazando en el resultado el límite inferior, así por ejemplo:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-y-z} (xyz) dx dy dz &= yz \int_0^{1-y-z} x dx = yz \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y-z} \\ \int_0^{1-y-z} (xyz) dz dy dx &= yz \left\{ \frac{(1-x-z)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right\} \end{aligned}$$



La excelencia no se improvisa

síguenos

