

Cálculo II

Cálculo de volúmenes mediante integral triple

Clase 12

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE (2 párrafos)

La integral triple de una función $f(x,y,z)$ sobre un dominio V que representa el volumen limitado por una o más superficies no tiene una representación geométrica, sin embargo, la integral triple cuando $f(x,y,z)=1$ sobre un dominio V si lo tiene, representa el volumen del dominio.

El volumen V del dominio se puede determinar mediante coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas cuando $f(x,y,z)=1$, $f(r, \theta, z) = 1$ o $f(\rho, \theta, \varphi) = 1$.

$$V \text{ (En coordenadas cartesianas)} = \iiint_V dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} dz dy dx$$

$$V \text{ (En coordenadas cilíndricas)} = \iiint_V dV = \int_\alpha^\beta \int_{g1(\theta)}^{g2(\theta)} \int_{h1(r,\theta)}^{h2(r,\theta)} r dz dr d\theta$$

$$V \text{ (En coordenadas esféricas)} = \iiint_V dV = \int_\alpha^\beta \int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)} \int_{h1(\rho,\theta)}^{h2(\rho,\theta)} \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\rho d\theta$$

Reto # 3

Clase 12: Cálculo de volúmenes mediante integral triple

12. Tema. Cálculo de volúmenes

12.1. Cálculo de volúmenes mediante integrales triples de funciones en coordenadas cartesianas

El cálculo de volúmenes mediante integrales triples en coordenadas cartesianas es una herramienta fundamental en el análisis matemático, utilizada para determinar el volumen de una región tridimensional. Este método, ampliamente aplicado en matemáticas puras y aplicadas, se basa en la generalización de la integral doble, extendida a tres dimensiones, lo que permite evaluar integrales sobre dominios sólidos en el espacio.

La técnica se formula mediante la integral triple, utilizada para integrar funciones de tres variables, y se define en coordenadas cartesianas, donde las variables son x, y, z . Esta metodología no solo se limita a calcular volúmenes, sino que también es empleada para determinar propiedades físicas como la masa, el centro de masa y los momentos de inercia de cuerpos tridimensionales. A continuación, los fundamentos de este procedimiento se encuentran detallados en los textos de Piskunov (1977) y Thomas (2010), quienes proporcionan una base teórica sólida y ejemplos prácticos que ilustran su utilidad en diferentes contextos, como la ingeniería y la física.

12.1.1 Cálculo de Volúmenes en Coordenadas Cartesianas

Cuando se busca calcular el volumen de un sólido en el espacio tridimensional mediante integrales triples, el procedimiento general implica la evaluación de la integral sobre el dominio específico de la región en cuestión

Ejemplo de Volumen simétrico

Ejemplo 1

Determinar el volumen de un elipsoide generado por la ecuación:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

- Definir el dominio de integración:

Figura 1

Representación gráfica del dominio de integración $V \left(\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1 \right)$ utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 12,volumen ejemplo1.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $dz \, dy \, dx$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} dz dy dx$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

Primero: Partimos de la ecuación del elipsoide $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$, despejamos z en función de x, y

$$z = \pm 3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{5^2}}$$

$$z = +3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{5^2}} ; \text{ límite superior de } z$$

$$z = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{5^2}}; \text{ límite superior de } z$$

$$-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{5^2}} \leq z \leq +3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{5^2}}$$

Segundo: Encontramos la ecuación de la curva en el plano xy realizando $z=0$ en la ecuación del elipsoide.

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{0^2}{3^2} = 1$$

$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, despejamos y en función de x , obtenemos:

$$y = \pm 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}$$

$$y = +5\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}; \text{ límite superior de } y$$

$$y = -5\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}; \text{ límite inferior de } y$$

$$-5\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}} \leq y \leq +5\sqrt{1 - \frac{x^2}{1^2}}$$

Tercero: Encontramos los valores de x , realizando $y=0$ en la ecuación de la curva en el plano xy

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{0^2}{5^2} = 1$$

$\frac{x^2}{1^2} = 1$, despejamos x , y obtenemos:

$$y = \pm 1$$

$x=+1$; límite superior de x

$x=-1$; límite inferior de x

$$-1 \leq x \leq +1$$

- Evaluar las integrales:

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_{-1}^1 \int_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}}^{+5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}} \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}} dz dy dx$$

Paso 1. Integración respecto a **z**, se consideran constantes x, y :

$$\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}} dz = [z]_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}} = 6\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}$$

Paso 2. Integración respecto a **y**, se considera constante x :

La integración se realiza mediante sustitución trigonométrica, utilizamos el software Symbolab para su solución, el paso a paso encontramos en el siguiente enlace:

$$\int_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}}^{+5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}} \left[6\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}} \right] dy = 15\pi(1-x^2)$$

Figura 2

Cálculo de la integral $15\pi(1-x^2)$ respecto a y paso a paso en el siguiente enlace utilizando el software **Symbolab**, en formato GIF.

[^ integral de -5sqrt\(1-\(x^2\)/\(1^2\)\) a 5sqrt\(1-\(x^2\)/\(1^2\)\) de 6sqrt\(1-\(x^2\)/\(1^1\)-\(y^2\)/\(5^2\)\)](#)

Soluciones > Calculadora de integrales triples > ^ integral de 5sqrt(1-(x^2)/(1^2)) a 5sqrt(1-(x^2)/(1^2)) de 6sqrt(1-(x^2)/(1^1)-

$\int_{-5}^5 \sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}} \cdot 6\sqrt{1-\frac{x^2}{1^1}-\frac{y^2}{5^2}} dy$

Pasos Ejemplos

Solución

$15\pi(1-x^2)$

Ocultar pasos ^

Pasos de solución

$\int_{-5}^5 \sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}} \cdot 6\sqrt{1-\frac{x^2}{1^1}-\frac{y^2}{5^2}} dy$

Sacar la constante: $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Paso 3. Integración respecto a x:

La integración se realiza mediante software Symbolab, el paso a paso encontramos en el siguiente enlace:

[^ integral de -1 a 1 de 15pi\(1-x^2\)](#)

$$\int_{-1}^1 15\pi(1-x^2) dx = 20\pi$$

Resumiendo, el volumen del elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ es:

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} dz dy dx$$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_{-1}^1 \int_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}}^{+5\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}}} \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}}^{+3\sqrt{1-\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{5^2}}} dz dy dx$$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = 20\pi$$

Nota: El elipsoide es un volumen simétrico, tenemos fórmula para calcular su volumen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Su volumen se calcula mediante la ecuación:

$$\text{Volumen } (V) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Contrastación de resultado de cálculo de volumen del elipsoide mediante integral triple

Para la ecuación de cálculo de volumen del elipsoide mediante ecuación

$$a=1 \quad b=5 \quad c=3$$

$$\text{Volumen } (V) = \frac{4}{3}\pi(1)(5)(3) = 20\pi$$

El resultado calculado por la ecuación ratifica el valor obtenido mediante integral triple

Ejemplo 2

Determinar el volumen de una esfera de radio 3 generado por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

- Definir el dominio de integración:

Figura 3

Representación gráfica del dominio de integración $V(x^2 + y^2 + z^2 = 3^2)$ utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 12.volumen ejemplo2.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $dz \, dy \, dx$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} dz dy dx$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

Primero: Partimos de la ecuación del elipsoide $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$, despejamos z en función de x, y

$$z = \pm \sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

$$z = +\sqrt{3^2 - x^2 - y^2}; \text{ límite superior de } z$$

$$z = -\sqrt{3^2 - x^2 - y^2}; \text{ límite inferior de } z$$

$$z = \pm \sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

$$-\sqrt{3^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq +\sqrt{3^2 - x^2 - y^2}$$

Segundo: Encontramos la ecuación de la curva en el plano xy realizando $z=0$ en la ecuación del elipsoide.

$$x^2 + y^2 + 0^2 = 3^2$$

$x^2 + y^2 = 3^2$, despejamos y en función de x , obtenemos:

$$y = \pm\sqrt{3^2 - x^2}$$

$y = +\sqrt{3^2 - x^2}$; límite superior de y

$y = -\sqrt{3^2 - x^2}$; límite inferior de y

$$-\sqrt{3^2 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{3^2 - x^2}$$

Tercero: Encontramos los valores de x , realizando $y=0$ en la ecuación de la curva en el plano xy

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$x^2 = 3^2$, despejamos x , y obtenemos:

$$x = \pm 3$$

$x=+3$; límite superior de x

$x=-3$; límite inferior de x

$$-3 \leq x \leq +3$$

- Evaluar las integrales:

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2}} \int_{-\sqrt{3^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2-y^2}} dz dy dx$$

Paso 1. Integración respecto a z , se consideran constantes x, y :

$$\int_{-\sqrt{3^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2-y^2}} dz = [z]_{-\sqrt{3^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2-y^2}} = 2\sqrt{3^2-x^2-y^2}$$

Paso 2. Integración respecto a y , se considera constante x :

Figura 4

La integración se realiza mediante sustitución trigonométrica, utilizamos el software Symbolab para su solución, el paso a paso encontramos en el siguiente enlace:

[^ integral de-sqrt\(3^2-x^2\) a sqrt\(3^2-x^2 de\)2sqrt\(3^2-x^2-y^2\)](#)

$$\int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^{\sqrt{3^2-x^2}} [2\sqrt{3^2-x^2-y^2}] dy = \pi(9-x^2)$$

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

Paso 3. Integración respecto a x :

La integración se realiza mediante software Symbolab, el paso a paso encontramos en el siguiente enlace:

[^ integral de-1 a 1 de 15pi\(1-x^2\)](#)

$$\int_{-3}^3 \pi(9-x^2) dx = 9\pi[x]_{-3}^3 - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = 54\pi - 18\pi = 36\pi$$

Resumiendo, el volumen de la esfera de radio 3 descrito por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ es:

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} dz dy dx$$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = \iiint_V dV = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2}} \int_{-\sqrt{3^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{3^2-x^2-y^2}} dz dy dx$$

$$V(\text{En coordenadas cartesianas}) = 36\pi$$

Nota: La esfera es un volumen simétrico, tenemos fórmula para calcular su volumen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Su volumen se calcula mediante la ecuación:

$$\text{Volumen } (V) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Contrastación de resultado de cálculo del volumen del elipsoide mediante integral triple

Para la ecuación de cálculo de volumen del elipsoide mediante ecuación

$R=3$

$$\text{Volumen } (V) = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi$$

El resultado calculado por la ecuación ratifica el valor obtenido mediante integral triple

12.1.2 Conclusión

El cálculo de volúmenes mediante integrales triples en coordenadas cartesianas es una herramienta poderosa para determinar el volumen de sólidos en el espacio tridimensional. Al extender el concepto de la integral doble a tres dimensiones, se obtiene un método eficaz para calcular volúmenes de objetos complejos

Enlace 1: En el siguiente enlace se encuentran ejemplos detallados sobre cálculo de volumen entre cilindro parabólico y plano mediante integrales triples en coordenadas cartesianas.

https://youtu.be/SMgWUc0VRQU?si=761_sKF01vAfmS6x

12.2. Cálculo de volúmenes mediante integrales de funciones en coordenadas cilíndricas y esféricas

El cálculo de volúmenes mediante integrales de funciones en coordenadas cilíndricas y esféricas es una extensión del cálculo en coordenadas cartesianas que resulta particularmente útil cuando se trabaja con dominios que poseen simetría cilíndrica o esférica. Este enfoque facilita la simplificación de los límites de integración y el manejo de funciones que se describen mejor en estos sistemas de coordenadas, ahorrando tiempo y esfuerzo en la resolución de problemas complejos.

En el caso de las coordenadas cilíndricas, las variables r , θ , y z permiten representar puntos en el espacio con base en un sistema que combina un plano polar con una altura, lo que resulta ideal para analizar cilindros, tuberías o regiones con simetría rotacional. Por otro lado, las coordenadas esféricas, definidas por r , θ , y ϕ , son especialmente adecuadas para estudiar objetos con simetría radial, como esferas, casquetes esféricos o distribuciones de masa en cuerpos celestes.

La metodología para integrar en estos sistemas implica el uso de factores diferenciales específicos, como $r dr d\theta dz$ en coordenadas cilíndricas y $r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ en esféricas, lo que asegura una representación precisa del volumen bajo estudio. Tanto Piskunov (1977) como Thomas (2010) profundizan en estas técnicas, ilustrando cómo estas coordenadas amplían el alcance del cálculo integral y ofrecen soluciones más prácticas y eficientes en numerosos problemas de física, ingeniería y matemáticas aplicadas.

12.2.1 Coordenadas Cilíndricas

La transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas se expresa como:

$$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad z=z \quad r^2 = x^2 + y^2$$

El elemento de volumen en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

Evaluación de la Integral

Una integral triple en coordenadas cilíndricas tiene la forma general:

$$V(\text{En coordenadas cilíndricas}) = \iiint_V dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g1(\theta)}^{g2(\theta)} \int_{h1(r,\theta)}^{h2(r,\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Ejemplo de Volumen en Coordenadas Cilíndricas

Ejemplo 3

Utilizando integral triple en coordenadas cilíndricas, calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies:

$$z=0, \quad x^2 + y^2 = 1; \quad x + y + z = 3$$

- Definir el dominio de integración:

Figura 5

Representación gráfica del dominio de integración $V (z=0; x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 3)$ utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 12,volumen ejemplo3.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $rdzdrd\theta$

$$V(\text{En coordenadas cilíndricas}) = \iiint_V dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g1(\theta)}^{g2(\theta)} \int_{h1(r,\theta)}^{h2(r,\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

Primero: Partimos de la ecuación del plano ; $x + y + z = 3$ despejamos z en función de x, y

$z = 3 - x - y$; reemplazamos $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$z = 3 - r \cos \theta - r \sin \theta$$

$$z = 3 - r \cos \theta - r \sin \theta ; \text{ límite superior de } z$$

$z = 0$; límite superior de z

$$0 \leq z \leq 3 - r \cos \theta - r \sin \theta$$

Segundo: En el plano x, y se encuentra el círculo $x^2 + y^2 = 1$, el radio $r=1$

$$0 \leq r \leq 1$$

Tercero: Encontramos la variación de θ :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- Evaluar las integrales:

$$V(\text{En coordenadas cilíndricas}) = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{3-r\cos\theta-r\sin\theta} r dz dr d\theta$$

Paso 1. Integración respecto a z , se consideran constantes r, θ :

$$\int_0^{3-r\cos\theta-r\sin\theta} dz = [z]_0^{3-r\cos\theta-r\sin\theta} = 3 - r \cos \theta - r \sin \theta$$

Paso 2. Integración respecto a r , se considera constante θ :

$$\int_0^1 (3 - r \cos \theta - r \sin \theta) r dr = \left[\frac{3r^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cos \theta - \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \sin \theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta$$

Paso 3. Integración respecto a θ :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = \frac{3}{2} 2\pi - \frac{1}{3} [\sin \theta]_0^{2\pi} - \frac{1}{3} [-\cos \theta]_0^{2\pi} = 3\pi$$

$$Volumen = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{3-r\cos\theta-r\sin\theta} r dz dr d\theta = 3\pi$$

Figura 6

La integración se realiza mediante sustitución trigonométrica, utilizamos el software Symbolab para su solución, el paso a paso encontramos en el siguiente enlace:

[^ integral de 0 a 2pi de integral de 0 a 1 de integral de 0 a 3-rcos\(theta\)-rsin\(theta\) de r](#)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{3-r\cos\theta-r\sin\theta} r dz dr d\theta$$

The screenshot shows the Symbolab interface for solving the triple integral $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{3-r\cos(\theta)-r\sin(\theta)} r dz dr d\theta$. The interface includes a sidebar with mathematical symbols, a top navigation bar, and a main content area. The main content area displays the integral, the solution 3π , and a decimal approximation $9.42477...$. Below the solution, there is a section titled "Pasos de solución" (Steps of solution) which shows the first step of the integration process. The interface also includes a toggle for "Un paso a la vez" (One step at a time) and a button to "Ocultar pasos" (Hide steps).

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Symbolab.

12.2.2 Coordenadas Esféricas

Las relaciones de transformación son:

$$r = \rho \sin \varphi \quad x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \varphi \quad \rho^2 = r^2 + z^2$$

El elemento de volumen se escribe como:

$$dV = \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

Evaluación de la Integral

Una integral triple en coordenadas esféricas tiene la forma general:

$$\iiint_V f(\rho, \theta, \varphi) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{h_1(\rho, \theta)}^{h_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

Ejemplo de Volumen en Coordenadas Esféricas

Ejemplo 4

Nota: El ejercicio del ejemplo 2 resuelto en coordenadas cartesianas tiene simetría esférica, por tanto resulta más eficiente resolver el ejercicio en coordenadas esféricas.

Determinar el volumen de una esfera de radio 3 generado por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

El radio de curvatura ρ , varía desde 0 hasta 3

El ángulo φ que se encuentra en un plano vertical, varía desde 0 hasta π , lo que representa medio círculo vertical.

El ángulo θ que se encuentra en el plano horizontal xy, varía desde 0 hasta 2π , haciendo girar 360 grados al semicírculo vertical, formando una superficie esférica.

El volumen V de la esfera, resulta ser el dominio V de integración si $f(\rho, \theta, \varphi) = 1$ en la siguiente integral:

$$\iiint_V f(\rho, \theta, \varphi) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{h_1(\rho, \theta)}^{h_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \iiint_V dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h1(\theta)}^{h2(\theta)} \int_{h1(\rho,\theta)}^{h2(\rho,\theta)} \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\rho d\theta$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^3 \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Primero: Resolvemos la integral interna, respecto a ρ :

$$\int_0^3 \rho^2 \sin\varphi d\rho = \sin\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = 9\sin\varphi$$

Segundo: Resolvemos la integral intermedia, respecto a φ :

$$\int_0^{\pi} 9\sin\varphi d\varphi = 9[-\cos\varphi]_0^{\pi} = 9[-\cos\pi + \cos 0] = 9[1 + 1] = 18$$

Tercero: Resolvemos la integral externa, respecto a θ

$$\text{Volumen de la esfera} = \int_0^{2\pi} 18 d\theta = 18[2\pi - 0] = \mathbf{36\pi}$$

Nota:

El resultado del volumen de la esfera se ratifica utilizando coordenadas esféricas, la integración resultó más fácil debido a la simetría esférica y sus coordenadas.

Ejemplo 5

Utilizando integral triple en coordenadas esféricas, calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad y = x; \quad y = \sqrt{3}x \quad z = 0$$

- Definir el dominio de integración:

Figura 7

Representación gráfica del dominio de integración V ($x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $y = x$; $y = \sqrt{3}x$ $z = 0$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 12,volumen ejemplo4.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

- Definir el orden de integración: vamos a escoger $rdzdrd\theta$

$$V(\text{En coordenadas esféricas}) = \iiint_V dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{h_1(\rho, \theta)}^{h_2(\rho, \theta)} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho d\theta$$

- Configurar los límites de integración: partimos del dominio V

Primero: Partimos de la ecuación de los dos planos verticales, el volumen entre las superficies se encuentra en el primer octante, entonces el ángulo φ varía entre 0 y $\pi/2$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Segundo: En el plano x,y se encuentra la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, las rectas $y_2 = \sqrt{3}x$; $y_1 = x$. Derivando las ecuaciones de las dos rectas encontramos la pendiente ($m = \tan \theta$) de las dos rectas y encontramos los ángulos θ_1 y θ_2 de las dos rectas:

$$y_1' = m_1 = \tan \theta_1 \quad 1 = m_1 = \tan \theta_1 \quad \theta_1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$y_2' = m_2 = \tan \theta_2 \quad \sqrt{3} = m_2 = \tan \theta_2 \quad \theta_2 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Tercero: Encontramos la variación del radio de la esfera de radio 2 ρ :

$$0 \leq \rho \leq 2$$

- Evaluar las integrales:

$$V(\text{En coordenadas esféricas}) = \iiint_V dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Paso 1. Integración respecto a ρ , se consideran constantes φ, θ :

$$\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho = \operatorname{sen} \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 = \operatorname{sen} \varphi \left[\frac{8}{3} \right]$$

Paso 2. Integración respecto a θ , se considera constante φ :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{8}{3} \operatorname{sen} \varphi \right) d\theta = \frac{8}{3} \operatorname{sen} \varphi \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9} \operatorname{sen} \varphi$$

Paso 3. Integración respecto a φ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{12} \operatorname{sen} \varphi \right) d\varphi = \frac{2\pi}{9} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{9}$$

$$V(\text{En coordenadas esféricas}) = \iiint_V dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{9}$$

Enlace 2: En el siguiente enlace se encuentran ejemplos detallados sobre cálculo de de volumen entre dos esferas mediante integrales triples en coordenadas esféricas.

<https://youtu.be/rglKSNPflKk?si=0fgyA9z-Me2N3TbI>

12.3 Conclusión

El cálculo de volúmenes mediante integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas es una herramienta esencial para resolver problemas en dominios tridimensionales con simetrías específicas. Estas técnicas simplifican el análisis al adaptar los límites de integración y factores diferenciales a la geometría del problema, facilitando la resolución de escenarios complejos en matemáticas aplicadas, ingeniería y ciencias físicas.

Las referencias de Piskunov (1977) y Thomas (2010) ofrecen una base sólida para comprender y aplicar estas metodologías, destacando su utilidad práctica en la modelación y análisis de sistemas con simetría rotacional o radial. En conjunto, estas herramientas demuestran la flexibilidad y potencia del cálculo multivariable en la resolución de problemas del mundo real.

Referencias citadas en la Clase 12

Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

-

Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 12

Volumen simétrico: Es cuando un volumen puede ser generado por una curva directriz en un plano y girada 360 alrededor de un eje generando un volumen.

Transformación de coordenadas: El sistema de coordenadas cartesianas es el mayor uso en la descripción de un punto o ecuaciones por ser ortogonal y ortonormal, sin embargo no es el único sistema de coordenadas, y describir puntos o ecuaciones en un nuevo sistema puede facilitar la solución de problemas especialmente en ingeniería.



La excelencia no se improvisa

síguenos

