

Cálculo II

Encontrar funciones de dos variables que representan figuras geométricas simétricas.

Clase 13

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El cálculo del área mediante sumas de Riemann e integrales dobles parte de la misma idea fundamental: aproximar una cantidad continua mediante la suma de elementos pequeños. Las sumas de Riemann se usan principalmente para calcular áreas bajo curvas en funciones de una variable. El proceso consiste en dividir un intervalo $[a,b]$ en subintervalos, construir rectángulos bajo la curva, calcular el área de cada uno ($f(x_i) \cdot \Delta x$) y **sumarlos**. Cuanto más pequeños sean los intervalos, más precisa será la aproximación. En el límite, esta suma se convierte en una integral definida en el intervalo $[a,b]$.

Por otro lado, las integrales dobles extienden esta idea al plano. Se aplican integrales de funciones de dos variables $z=f(x,y)$ sobre un dominio D en el plano y permiten calcular el área del dominio D haciendo $f(x,y)=1$ en el plano. Ambos métodos comparten el mismo fundamento, pero las integrales dobles permiten trabajar en espacios bidimensionales con mayor exactitud y generalidad.

Reto # 4

13. Tema. Encontrar funciones de dos variables que representan figuras geométricas simétricas.

13.1. Escoger una escala apropiada para graficar sobre una hoja la función seleccionada y medir de forma aproximada el área bajo la curva.

En el estudio del cálculo, las funciones de dos variables juegan un papel esencial al describir fenómenos y estructuras del mundo tridimensional. Un aspecto particularmente interesante es su capacidad para generar figuras geométricas simétricas. Este tema ha sido desarrollado en profundidad por autores destacados como N. Piskunov y G. B. Thomas, cuyas obras representan pilares fundamentales en la comprensión del cálculo de varias variables.

Por otro lado, G. B. Thomas, en su *Cálculo: Varias Variables*, ofrece un enfoque más visual e intuitivo, complementado con ejemplos prácticos que facilitan la comprensión de los conceptos abstractos. Su obra enfatiza la aplicación de las funciones de dos variables en

contextos reales, haciendo hincapié en la representación gráfica y la interpretación geométrica de las soluciones. Juntos, estos textos proporcionan una perspectiva integral que combina rigor teórico con aplicabilidad práctica.

A continuación, presentaremos una definición general antes de adentrarnos en las figuras simétricas que estas funciones pueden generar.

13.1.1 Definición de funciones de una variable

Una función de una variable es una regla que asigna a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente. Esto se expresa matemáticamente como:

$$y=f(x)$$

Estas funciones se representan en un espacio bidimensional, donde los pares ordenados (x,y) corresponden a las coordenadas en el plano xy . Las figuras geométricas simétricas emergen cuando estas funciones tienen propiedades de equilibrio específicas, permitiendo simetrías alrededor de ciertos ejes o planos. Estas características son fundamentales para entender, analizar y calcular las áreas que encierran dentro de unos límites específicos.

Figuras geométricas simétricas en el plano con funciones de una variable

Veamos algunos ejemplos clásicos:

Círculo: La ecuación general de un círculo de radio a , centrado en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Elipse: La ecuación general de una elipse con ejes a y b , centrado en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola: La ecuación general de una hipérbola con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$, focos $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$,

centrado en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Donde: } a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 1

*Representación gráfica **cuadriculada** (área círculo) de un círculo de radio a , elipse de ejes a y b , hipérbola con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ centrados en el origen de coordenadas utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13, área círculo.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Figura 2

*Representación gráfica **cuadriculada** (área elipse) de un círculo de radio a , elipse de ejes a y b , hipérbola con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ centrados en el origen de coordenadas utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13, área elipse.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Figura 3

*Representación gráfica **cuadriculada** (área hipérbola) de un círculo de radio a , elipse de ejes a y b , hipérbola con vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ centrados en el origen de coordenadas utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13, área hipérbola.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Enlace 1: En el siguiente enlace se encuentra ejemplo detallados sobre como graficar una elipse con centro en el origen en coordenadas cartesianas.

<https://youtu.be/rFMYFsJ3W1o?si=pSMVREVsKgcCd4xL>

13.1.2 Definición de funciones de dos variables

Una función de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de valores un único valor. Esto se expresa matemáticamente como:

$$z=f(x,y)$$

Estas funciones se representan en un espacio tridimensional, donde (x,y) corresponden a las coordenadas en un plano, z define la altura o profundidad en cada punto. Las figuras geométricas simétricas emergen cuando estas funciones tienen propiedades de equilibrio específicas, permitiendo simetrías alrededor de ciertos ejes o planos. Estas características son fundamentales para entender y analizar las estructuras que se modelan.

Figuras geométricas con plano de simetría en el espacio con funciones de dos variables.

Veamos algunos ejemplos clásicos:

1. **Esfera.** La ecuación general de una esfera centrada en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

Figura 4

*Representación gráfica de una esfera de radio a centrada en el origen de coordenadas ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2$) y curva de nivel en $z=0$ (Plano de simetría) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13,CNesfera.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Esta función describe la superficie de una esfera, donde cada plano paralelo al eje xy genera círculos concéntricos. Su simetría es evidente en las tres dimensiones.

2. **Elipsoide.** Un elipsoide es una generalización de la esfera. Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Figura 5

Representación gráfica de un elipsoide centrada en el origen de coordenadas

*($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$) y curva de nivel en $z=0$ (**Plano de simetría**) utilizando*

***WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13,CNelipsoide.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Aquí, los valores de a , b y c determinan las longitudes de los ejes. Dependiendo de la elección de estos parámetros, la figura puede ser más achatada o alargada en una dirección, pero mantiene su simetría en torno a los tres planos principales.

3. **Paraboloide hiperbólico.** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$$

Figura 6

Representación gráfica de un paraboloide hiperbólico centrada en el origen de coordenadas

*($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$) y curva de nivel en $x=0$ (**Plano de simetría**) utilizando*

***WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13,CNparaboloide hiperbólico.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Este es un ejemplo de una superficie con simetría parcial. Aunque no es cerrada como la esfera o el elipsoide, su estructura en forma de silla muestra simetría en torno a ciertos planos.

4. **Hiperboloide de una hoja.** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Figura 7

Representación gráfica de un hiperboloide de una hoja centrada en el origen de coordenadas

*($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$) y curva de nivel en $z=0$ (**Plano de simetría**) utilizando*

***WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 13.CNhiperboloide de una hoja.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un hiperboloide de una hoja es una superficie cuádrica que se asemeja a un "taco" de agua o una rueda de pizza. Se caracteriza por tener una única lámina continua y se genera al rotar una hipérbola alrededor de su eje no focal.

5. **Paraboloide elíptico.** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$$

Figura 8

Representación gráfica de un paraboloides elíptico centrada en el origen de coordenadas ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$) y curva de nivel en $x=0$ (**Plano de simetría**) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 13, CNparaboloides eliptico.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un paraboloides elíptico es una superficie tridimensional con forma de cuenco o plato, definida por la ecuación, donde a y b son parámetros que determinan la forma de la elipse en la sección horizontal. Sus secciones verticales son parábolas y las horizontales son elipses.

6. **Cono cuadrático.** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Figura 9

Representación gráfica de un cono cuadrático centrada en el origen de coordenadas ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$) y curva de nivel en $z=0$ (**Plano de simetría**) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 13, CNcono cuadrático.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un cono cuadrático, o simplemente un cono, es una superficie tridimensional definida por una ecuación cuadrática. Es una cuádrica que se caracteriza por tener una forma similar a un cono geométrico.

13.1.3 Visualizando las figuras

Para ilustrar estas ideas, imaginemos un conjunto de curvas de nivel. Las curvas de nivel de una esfera son círculos concéntricos, mientras que las de un paraboloides elíptico son elipses. Estos patrones ayudan a identificar la simetría incluso antes de generar una gráfica tridimensional.

Por ejemplo:

- Para la esfera, si tomamos cortes en planos horizontales, obtenemos:
Lo que produce círculos cuyo radio disminuye conforme z se aleja del centro.
- En el paraboloides, las curvas de nivel son:
Que son elipses con radios que cambian según el valor de c .

Interpretación práctica.

Las figuras geométricas simétricas no solo destacan por su estética, sino también por su funcionalidad en múltiples campos. Por ejemplo:

- **Diseño arquitectónico.** Estas formas inspiran estructuras como cúpulas y puentes, donde la simetría asegura estabilidad y belleza. Un caso clásico es la cúpula geodésica, cuya forma es una representación de funciones de dos variables que generan simetrías radiales. Matemáticamente, esto podría modelarse con la ecuación:
Esta función describe una semiesfera con radio, cuya simetría en torno al eje es evidente y fundamental para su resistencia estructural.
- **Ingeniería.** Las simetrías en las funciones que modelan puentes en arco permiten dividir el análisis en secciones equivalentes, optimizando tanto el diseño como la ejecución. Además, en el diseño de turbinas y rotores, estas simetrías garantizan un funcionamiento eficiente y equilibrado.
- **Ciencias físicas.** En óptica y acústica, las funciones de dos variables modelan patrones de interferencia y resonancia, como las ondas simétricas en placas vibrantes o los patrones de difracción de la luz.
- **Geografía y climatología.** En estas disciplinas, se utilizan para modelar superficies como montañas, cráteres o isobaras en mapas

meteorológicos, aprovechando las simetrías para simplificar las interpretaciones.

- **Gráficos por computadora.** Las funciones de dos variables son esenciales para generar modelos tridimensionales realistas en animaciones y videojuegos. Las figuras simétricas permiten crear objetos como esferas, cilindros y conos con precisión matemática.

Desde la matemática hasta su implementación práctica, estas funciones son herramientas esenciales para resolver problemas del mundo real y optimizar procesos en una variedad de campos.

13.1.4 Conclusión

En conclusión, hemos explorado cómo las funciones de dos variables pueden generar figuras geométricas de gran simetría y utilidad, como esferas, elipsoides y paraboloides. Estas funciones no solo constituyen un fundamento matemático robusto, sino que también encuentran aplicaciones prácticas en campos tan diversos como la arquitectura, la ingeniería, la física y la informática. Su estudio, respaldado por los aportes de autores como N. Piskunov y G. B. Thomas, demuestra cómo las matemáticas trascienden el ámbito teórico para modelar y optimizar el mundo que nos rodea.

13.1.5 Definición de escalas de medición

Las escalas de medición se utilizan para categorizar y cuantificar datos. Se dividen en cuatro tipos principales:

- Escala nominal:** Clasifica los datos en categorías distintas sin un orden intrínseco. Ejemplo: colores (rojo, azul, verde).
- Escala ordinal:** Ordena las categorías en una jerarquía, aunque las diferencias entre ellas no son cuantitativas. Ejemplo: niveles de satisfacción (bajo, medio, alto).
- Escala de intervalo:** Ofrece valores numéricos donde las diferencias son significativas, pero no existe un cero absoluto. Ejemplo: temperaturas en grados Celsius.

- d. **Escala de razón:** Similar a la escala de intervalo, pero con un cero absoluto que indica la ausencia del atributo medido. Ejemplo: peso o altura.

Estas escalas se representan matemáticamente mediante funciones, cuyas propiedades y comportamientos varían según el tipo de escala. La elección de una escala adecuada es crucial para garantizar la precisión en el análisis de datos.

13.1.6 Interpretación práctica

Las escalas de medición tienen aplicaciones prácticas en una variedad de campos:

- **Investigación científica:** Permiten categorizar y cuantificar observaciones, facilitando el análisis estadístico de resultados experimentales.
- **Ingeniería:** Ayudan a establecer tolerancias y especificaciones, garantizando la precisión en diseños y mediciones.
- **Psicología:** Utilizan escalas ordinales para medir atributos como el nivel de ansiedad o felicidad.
- **Economía:** Aplican escalas de razón para analizar indicadores financieros como ingresos y costos.
- **Educación:** Evalúan el desempeño académico mediante escalas ordinales o de intervalo.

Desde la organización de datos cualitativos hasta el análisis de magnitudes cuantitativas, las escalas de medición son esenciales para interpretar y aplicar información de manera efectiva.

13.1.7 Conclusión

En síntesis, las escalas de medición son herramientas imprescindibles para el análisis y la comprensión de datos en diversas disciplinas. Los fundamentos teóricos proporcionados por N. Piskunov y G. B. Thomas subrayan su relevancia tanto en el contexto académico como en aplicaciones prácticas. Al adoptar estas escalas, se habilita un enfoque sistemático para categorizar, cuantificar y visualizar

información, contribuyendo significativamente al avance del conocimiento y la solución de problemas reales.

13.2. Calcular el área mediante integrales dobles y comparar resultados

Teoría sobre cálculo de áreas de figuras simétricas

El cálculo de áreas es una aplicación esencial de la geometría y el cálculo diferencial e integral. Cuando se trata de figuras simétricas, este análisis no solo se simplifica gracias a sus propiedades de equilibrio, sino que también nos permite abordar problemas complejos con mayor precisión. En este contexto, los aportes de autores como N. Piskunov y G. B. Thomas han sido fundamentales para establecer un enfoque teórico y práctico en el cálculo de estas áreas.

13.2.1 Definición y conceptos clave

El cálculo de áreas de figuras simétricas implica determinar la región delimitada por una función o conjunto de funciones que exhiben propiedades de simetría. Estas figuras pueden estar definidas en un plano cartesiano o en el espacio tridimensional.

- **Simetría axial:** Cuando una figura es reflejada respecto a un eje y permanece inalterada. Ejemplo: un círculo respecto a cualquier diámetro.
- **Simetría central:** Cuando una figura es rotada 180° respecto a un punto y permanece igual. Ejemplo: un elipse.

El área de estas figuras se calcula mediante integrales definidas que suman infinitesimales de área bajo curvas. Matemáticamente, esto se expresa como:

donde $f(x)$ representa la función que delimita la figura y son los límites de integración.

13.2.2 Teoría y cálculo de áreas

Para ilustrar cómo calcular áreas de figuras simétricas, consideremos algunos ejemplos comunes:

1. **Círculo** Un círculo de radio tiene simetría axial y central. Su área se calcula con la fórmula clásica:
Este resultado también puede derivarse integrando en coordenadas polares.
2. **Elipse** Una elipse con semiejes a y b tiene área:
Aquí, a es el semieje mayor y b el semieje menor.
3. **Parábola simétrica** Considere una región delimitada por la parábola $y = x^2$ y la línea $y = 1$. El área entre estas curvas es:
Resolviendo esta integral, se obtiene:
4. **Superficie de un paraboloides** Un paraboloides de revolución definido por $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas tiene un área que puede determinarse integrando sobre una región circular en el plano.

13.2.3 Representaciones gráficas

Las representaciones gráficas ayudan a visualizar las figuras y comprender las propiedades de simetría que simplifican el cálculo. Por ejemplo:

- Un círculo se representa como un conjunto de puntos equidistantes de un centro, ilustrando su simetría respecto a cualquier eje que pase por el centro.
- Una elipse muestra simetría respecto a ambos ejes principales.
- Las curvas parabólicas destacan la simetría axial, facilitando el cálculo del área bajo estas.

13.2.4 Interpretación práctica

El cálculo de áreas de figuras simétricas tiene aplicaciones en diversos campos:

- **Arquitectura y diseño:** Determinar áreas de cúpulas, arcos y vitrales.
- **Ingeniería estructural:** Análisis de secciones transversales en vigas y puentes.
- **Física:** Cálculo de momentos de inercia y distribuciones de carga.
- **Informática gráfica:** Creación de modelos tridimensionales para simulaciones y videojuegos.

13.2.5 Conclusión

El estudio del cálculo de áreas en figuras simétricas combina elegancia matemática con utilidad práctica. Las contribuciones de N. Piskunov y G. B. Thomas proporcionan una base teórica sólida y ejemplos claros que permiten aplicar estas técnicas en problemas reales. Al comprender estas ideas, ampliamos nuestra capacidad para analizar y diseñar estructuras que armonizan forma y función.

Enlace 2: En el siguiente enlace se encuentran ejemplos detallados sobre cálculo de área entre una parábola y rectas mediante integrales doble en coordenadas cartesianas.

<https://youtu.be/2NypauXVm5g?si=tP4GILjY3MDRxJbw>

Referencias citadas en la Clase 13

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 13

Figuras geométricas simétricas: Una figura geométrica simétrica es aquella que, si se divide por una línea imaginaria, sus dos mitades quedan iguales, como un espejo. Puede tener una o varias líneas de simetría. Ejemplos comunes son el cuadrado, el círculo, una elipse o una hipérbola. ¡La simetría es orden y equilibrio!

Escala: Una escala es una relación que indica cuánto se ha reducido o ampliado un objeto o mapa respecto a su tamaño real. Por ejemplo, en un mapa, una escala de 1:100 significa que 1 centímetro en el papel representa 100 centímetros en la realidad. ¡Es como ver el mundo en miniatura!

En un gráfico en el plano cartesiano, las escalas determinan cómo se representan las unidades de medida en los ejes x e y . Una escala fija asigna una distancia constante a cada unidad, garantizando que los intervalos sean proporcionales. Por ejemplo, cada centímetro puede representar una unidad, de modo que desplazarse 3 cm a la derecha equivale a aumentar 3 unidades en x . Las escalas deben ser coherentes para reflejar correctamente las relaciones entre los valores. Una escala adecuada facilita la interpretación visual de la función o datos, preservando proporciones, pendientes y formas de las gráficas.



La excelencia no se improvisa

síguenos

