

Cálculo II

Encontrar funciones de tres variables que representan figuras geométricas simétricas.

Clase 14

Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Cuando hablamos de calcular volúmenes usando integrales triples, básicamente estamos buscando el tamaño de algo en 3D, pero de una manera súper precisa. Imagina que quieres saber el volumen de una montaña, una gota de agua rara o una figura toda deforme. No se puede usar solo una fórmula sencilla como "base por altura", porque estas formas no son tan simples. Entonces, ahí entran las integrales triples.

Lo que hacemos es partir el objeto en pedacitos súper pequeños, como cubitos diminutos. Cada cubito tiene un volumen extremadamente pequeño, y sumándolos todos (a través de la integral) conseguimos el volumen total. Dependiendo de la forma del objeto, a veces conviene usar coordenadas cartesianas (x , y , z), pero otras veces es más fácil cambiar a coordenadas cilíndricas o esféricas, que se adaptan mejor a las figuras que representan las ecuaciones. Se definen los límites de integración (que son como las fronteras del objeto), se reemplaza la función $f(x,y,z)$ con 1, la integral triple representa el volumen, es como si sumáramos mini- volúmenes.

Reto # 4

14. Tema. Medir y calcular el volumen de funciones que representan figuras geométricas simétricas.

14.1. Escoger una escala apropiada para construir con plastilina la función seleccionada y medir de forma aproximada el volumen del objeto mediante la diferencia de volumen al sumergir el objeto en un recipiente con agua.

14.1.1 Figuras geométricas simétricas en el espacio con funciones de tres variables

Veamos algunos ejemplos clásicos:

1. **Esfera:** La ecuación general de una esfera centrada en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$
$$z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Figura 1

Representación gráfica de una esfera de radio a centrada en el origen de coordenadas ($x^2 + y^2 + z^2 = a^2$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 13, esfera.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Esta función describe la superficie de una esfera, donde cada plano paralelo al eje xy genera círculos concéntricos. Su simetría es evidente en las tres dimensiones.

2. **Elipsoide:** Un elipsoide es una generalización de la esfera. Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Figura 2

Representación gráfica de un elipsoide centrada en el origen de coordenadas ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$) y curva de nivel en $z=0$ utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 13,elipsoide.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Aquí, los valores de a , b y c determinan las longitudes de los ejes. Dependiendo de la elección de estos parámetros, la figura puede ser más achatada o alargada en una dirección, pero mantiene su simetría en torno a los tres planos principales.

3. **Paraboloide hiperbólico:** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$$
$$z = \frac{1}{c} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Figura 3

Representación gráfica de un paraboloides hiperbólico centrada en el origen de coordenadas $(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0)$ utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 13,paraboloides hiperbólico.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Este es un ejemplo de una superficie con simetría parcial. Aunque no es cerrada como la esfera o el elipsoide, su estructura en forma de silla muestra simetría en torno a ciertos planos.

4. **Hiperboloides de una hoja:** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$$

Figura 4

Representación gráfica de un hiperboloides de una hoja centrada en el origen de coordenadas $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1)$ utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 13,hiperboloides de una hoja.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un hiperboloides de una hoja es una superficie cuadrática que se asemeja a un "taco" de agua o una rueda de pizza. Se caracteriza por tener una única lámina continua y se genera al rotar una hipérbola alrededor de su eje no focal.

5. **Paraboloides elíptico:** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$$
$$z = c(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$$

Figura 5

Representación gráfica de un paraboloides elíptico centrada en el origen de coordenadas ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 13,paraboloides elíptico.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un paraboloides elíptico es una superficie tridimensional con forma de cuenco o plato, definida por la ecuación, donde a y b son parámetros que determinan la forma de la elipse en la sección horizontal. Sus secciones verticales son parábolas y las horizontales son elipses.

6. **Cono cuadrático:** Una función que genera esta figura es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

Figura 6

Representación gráfica de un cono cuadrático centrada en el origen de coordenadas ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.

[CLASE 13, cono cuadrático.pdf](#)

Nota. Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Un cono cuadrático, o simplemente un cono, es una superficie tridimensional definida por una ecuación cuadrática. Es una cuádrica que se caracteriza por tener una forma similar a un cono geométrico.

14.1.2 ¿Cómo calcular el volumen de un cuerpo no simétrico mediante el principio de Arquímedes?

Calcular el volumen de un cuerpo sumergido en un fluido usando la ley de Arquímedes es una técnica muy útil y sencilla cuando entiendes bien el concepto.

El principio de Arquímedes dice que un objeto total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza hacia arriba llamada “empuje”, que es igual al peso del volumen de fluido que ha desplazado. Es decir, el fluido “empuja” al objeto con una fuerza equivalente al peso del líquido que el objeto mueve al estar sumergido. Y aquí está el truco: como el empuje depende directamente del volumen de fluido desplazado, podemos usarlo para calcular el volumen del objeto.

Primero, necesitamos medir o calcular el empuje. Esto se puede hacer de dos maneras: midiendo la diferencia de peso del objeto en el aire y sumergido en el fluido, o directamente midiendo la fuerza que el fluido ejerce sobre el objeto.

La forma más práctica es pesar el objeto en el aire (peso real) y luego pesar el objeto sumergido en el fluido (peso aparente). La diferencia entre ambos pesos es el valor del empuje. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\text{Empuje} = \text{Peso real} - \text{Peso aparente}$$

Luego, recordando que el peso es igual a la masa por la gravedad ($P = m \cdot g$), y que la masa del fluido desplazado es el volumen desplazado por la densidad del fluido ($m = \rho \cdot V$), podemos escribir:

$$\text{Empuje} = \rho_{\text{fluido}} \cdot V_{\text{objeto}} \cdot g$$

Despejando para encontrar el volumen del objeto:

$$V_{\text{objeto}} = \frac{\text{Empuje}}{\rho_{\text{fluido}} \cdot g}$$

En esta fórmula:

- **Vobjeto:** Es el volumen que queremos encontrar.
- **Empuje:** Es la fuerza medida o calculada.
- **ρ_{fluido} :** Es la densidad del fluido (por ejemplo, en agua es aproximadamente 1000 kg/m^3 a temperatura ambiente).
- **g :** Es la aceleración de la gravedad, que en la Tierra es aproximadamente 9.8 m/s^2 .

Así que el procedimiento básico sería:

1. Pesar el objeto en el aire.
2. Pesar el objeto totalmente sumergido en el fluido.
3. Calcular la diferencia de pesos (ese es el empuje).
1. Conocer la densidad del fluido (o la mides si es necesario).

2. Usar la fórmula para calcular el volumen.

Este método es muy útil, sobre todo para cuerpos de forma irregular donde sería muy difícil medir el volumen de manera geométrica directa. Además, es un principio que se usa no solo en física básica, sino también en ingeniería naval, medicina (para medir volúmenes corporales) y en diseño de dispositivos de flotación.

14.1.3 ¿Cómo calcular el volumen de un cuerpo sumergido en un fluido?

Es un método menos preciso que el anterior; sin embargo, es más sencillo.

Para calcular el volumen de un cuerpo sumergiéndose en un fluido, usamos el principio básico de desplazamiento de fluidos. Cuando un objeto se sumerge, desplaza una cantidad de fluido igual a su propio volumen (si está totalmente sumergido). Así que, si podemos medir cuánto fluido se desplaza, podemos saber el volumen del objeto.

Una manera sencilla es usando un recipiente lleno de agua hasta el borde. Se sumerge el objeto completamente y se recoge el agua que se derrama. Luego, simplemente se mide el volumen de esa agua desplazada, por ejemplo, usando una probeta o un vaso medidor. El volumen del agua desplazada será igual al volumen del objeto.

También se podría realizar en un recipiente cilíndrico sin escalas de medición:

Primero: Se mide el diámetro interior del recipiente y se divide para dos y se encuentra el valor del radio r .

Segundo: Se calcula el área circular interior del recipiente por medio de la ecuación

$$\text{Área circular interna} = \pi r^2$$

Tercero: Se coloca agua en una cantidad tal que el cuerpo se pueda sumergir totalmente, se mide la altura del nivel de agua $h1$.

Cuarto: Se introduce el cuerpo de tal manera que se encuentre sumergido totalmente, se mide la nueva altura del nivel de agua $h2$.

Quinto: El volumen del cuerpo es el mismo volumen desplazado de agua, se determina como:

$$\text{Volumen del cuerpo} = \pi r^2(h2 - h1)$$

Ejemplo:

Imagina que tienes una piedra de forma irregular y quieres saber su volumen.

Método : desplazamiento de agua

- Llenas un vaso medidor hasta un cierto nivel, por ejemplo 200 ml.
- Sumerge la piedra completamente en el agua.
- El nivel sube hasta 260 ml.
- El volumen de la piedra es simplemente la diferencia:

$$260\text{ ml} - 200\text{ ml} = 60\text{ ml}$$

Entonces, la piedra tiene un volumen de **60 mililitros** o **0,00006 metros cúbicos**.

14.1.4 ¿Cómo construir un volumen simétrico?

Construir un volumen simétrico consiste en crear una figura tridimensional donde una parte sea el reflejo de la otra respecto a un plano, un eje o un punto. La simetría en los volúmenes es muy importante en ingeniería, arquitectura y diseño porque ayuda a lograr estructuras equilibradas y estéticamente agradables.

Para construir un volumen simétrico, primero debes elegir el tipo de simetría que vas a usar:

- **Simetría axial:** el objeto se refleja a lo largo de un eje (por ejemplo, el eje x, y o z).
- **Simetría respecto a un plano:** el volumen se refleja sobre un plano (como el plano xy, yz o xz).
- **Simetría central:** todo punto del objeto tiene un punto simétrico respecto a un centro.

El primer paso es diseñar o dibujar la mitad o una sección del volumen. Esta parte inicial puede ser cualquier forma: un perfil curvo, una figura plana o un contorno sencillo. Una vez que tienes la mitad, aplicas la reflexión correspondiente. Por ejemplo:

- Si haces simetría respecto al plano yz, cada punto (x,y,z) se transforma en $(-x,y,z)$.
- Si haces simetría respecto al eje z, cada punto (x,y,z) se refleja a $(-x,-y,z)$.

En términos prácticos, esto puede ser tan sencillo como dibujar un perfil en papel y luego calcarlo invertido al otro lado, o en programas de modelado 3D, copiar y reflejar la mitad del modelo.

Otra forma de construir volúmenes simétricos es usando **rotación**. Si tienes un perfil (por ejemplo, el contorno de una copa), puedes girarlo alrededor de un eje para formar un volumen de revolución, como una esfera, un cilindro o un jarrón. Este tipo de construcción también produce volúmenes perfectamente simétricos.

Finalmente, es importante asegurarse de que las uniones o bordes coincidan exactamente. Una buena práctica es construir primero el volumen básico, aplicar la simetría y luego hacer pequeños ajustes para mantener la continuidad y suavidad de la forma.

En resumen, construir un volumen simétrico es diseñar una parte del objeto y luego reflejarla o girarla siguiendo reglas claras de simetría, asegurándote de que todo encaje perfectamente para lograr una figura equilibrada y armoniosa.

Enlace 1: En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo de cómo construir una maqueta de un sólido de revolución.

https://youtu.be/Eb4HfAFWUs8?si=0_fmhzYvvyr2Cglh

En resumen, tanto el empuje como el volumen sumergido son conceptos interrelacionados que explican cómo un cuerpo se comporta dentro de un fluido, y su estudio es crucial para aplicaciones prácticas en ingeniería, física y otras áreas científicas.

14.1.4 Ejemplos prácticos

1. **Flotabilidad de un barco:** Un barco flota debido a que su diseño asegura que el volumen sumergido genera un empuje igual a su peso total, aunque esté construido con materiales de alta densidad como el acero. Por ejemplo, si el peso del barco es de , el volumen sumergido debe desplazar un fluido de igual peso:

Asumiendo agua con , el volumen sumergido sería .
2. **Sumergibilidad de un submarino:** Los submarinos ajustan su flotabilidad controlando el volumen de agua en sus tanques de lastre, modificando el volumen sumergido y equilibrando el empuje con su peso.
3. **Densidad relativa en hidrometría:** Los higrómetros flotantes utilizan el principio de Arquímedes para medir la densidad de líquidos. La altura a la que flota el dispositivo está directamente relacionada con la densidad del fluido.

14.1.5 Representaciones gráficas

1. **Empuje en función del volumen:** Un gráfico lineal puede representar el empuje como una función directa del volumen sumergido, con pendiente proporcional a ρ .
2. **Comparación de densidades:** Diagramas de barras pueden ilustrar la relación entre las densidades del cuerpo y del fluido, ayudando a visualizar la flotabilidad relativa.

14.1.6 Interpretación práctica

Los principios de empuje y volumen sumergido tienen aplicaciones diversas:

- **Ingeniería naval:** Diseño de embarcaciones, submarinos y plataformas flotantes.
- **Aeronáutica:** Análisis de flotabilidad en aeronaves de rescate anfibia.
- **Medicina:** Uso de principios de hidrostática en terapias acuáticas y pruebas de composición corporal.
- **Industria:** Evaluación de densidades y flotabilidad en líquidos industriales.

14.1.7 Conclusión

El empuje y el volumen sumergido son conceptos fundamentales en la hidrostática que explican el comportamiento de cuerpos inmersos en fluidos. Estas ideas, respaldadas por una teoría matemática rigurosa, tienen aplicaciones prácticas en campos diversos, desde la ingeniería naval hasta la medicina. Comprender estos principios no solo enriquece nuestra visión del mundo físico, sino que también nos permite aprovecharlos para resolver problemas reales y diseñar soluciones innovadoras.

14.2. Calcular el volumen mediante integrales triples y comparar resultados.

Teoría sobre cálculo de volúmenes de cuerpos mediante integrales triples

Calcular un volumen mediante integrales triples es una herramienta muy poderosa en matemáticas y física, sobre todo cuando el objeto o la región que queremos medir tiene una forma complicada. A diferencia de las figuras simples como cubos o esferas, donde tenemos fórmulas directas, las integrales triples nos permiten encontrar el volumen de cualquier sólido irregular.

La idea básica es dividir el volumen en una cantidad infinita de pequeños prismas o cubitos. Luego, sumamos el volumen de cada cubito, y esa suma infinita se representa usando una integral triple.

El procedimiento general para calcular un volumen mediante una integral triple es el siguiente:

1. **Definir la región de integración:**

Primero, debes entender cuál es la región del espacio que quieres medir. Esto incluye identificar los límites de integración para las variables x , y y z .

2. **Plantear la integral:**

Si solo quieres calcular el volumen, la función que integras es simplemente $f(x,y,z)=1$, ya que estamos sumando volúmenes puros, no valores variables como masas o densidades. Entonces, la integral triple se ve así:

$$\iiint_V 1 dV$$

donde V es la región que estás considerando y dV representa el volumen infinitesimal.

3. **Elegir el sistema de coordenadas:**

Dependiendo de la forma del objeto, puede ser más fácil usar diferentes coordenadas:

- **Cartesianas** (x,y,z) para figuras "cuadradas" o rectangulares.
- **Cilíndricas** (r,θ,z) para figuras con simetría circular o tubulares.
- **Esféricas** (ρ,θ,ϕ) para figuras esféricas o semiesféricas.

Cambiar de coordenadas también cambia el dV , por ejemplo, en cilíndricas es $r dr d\theta dz$ y en esféricas es $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

4. **Establecer los límites de integración:**

Aquí decides de qué valor a qué valor va cada variable. Por ejemplo, x podría ir de 0 a 2, y de una función de x hasta otra función de x , y z desde una base hasta un techo que depende de x y y .

5. **Resolver la integral:**

Integras primero con respecto a una variable (la que esté más "adentro"), luego a la siguiente, y finalmente a la última. Es importante respetar el orden correcto para que los límites tengan sentido.

6. **Interpretar el resultado:**

El número final que se obtiene es el volumen de la región que fue definida.

14.2.1 Aplicaciones prácticas

El cálculo de volúmenes mediante integrales triples tiene muchas aplicaciones en la vida real. Por ejemplo, en **ingeniería** se utilizan para determinar el volumen de materiales de formas irregulares, en

astronomía para calcular el volumen de cuerpos celestes como planetas o estrellas, y en **medicina** para determinar el volumen de órganos o áreas específicas del cuerpo humano utilizando imágenes médicas.

Enlace 2: En el siguiente enlace se encuentra ejemplo detallado sobre cálculo de volumen de un paraboloides mediante integrales triples en coordenadas cartesianas.

https://youtu.be/sr0ufiGBV1E?si=GpFvn42y1Bw_XL1B

Referencias citadas en la Clase 14

OpenStax. (s.f.). *Física universitaria volumen 1* (Sección 14.4: Principio de Arquímedes y flotabilidad).

OpenStax. <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/14-4-principio-de-arquimedes-y-flotabilidad>

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo I*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de

<https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc.

Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

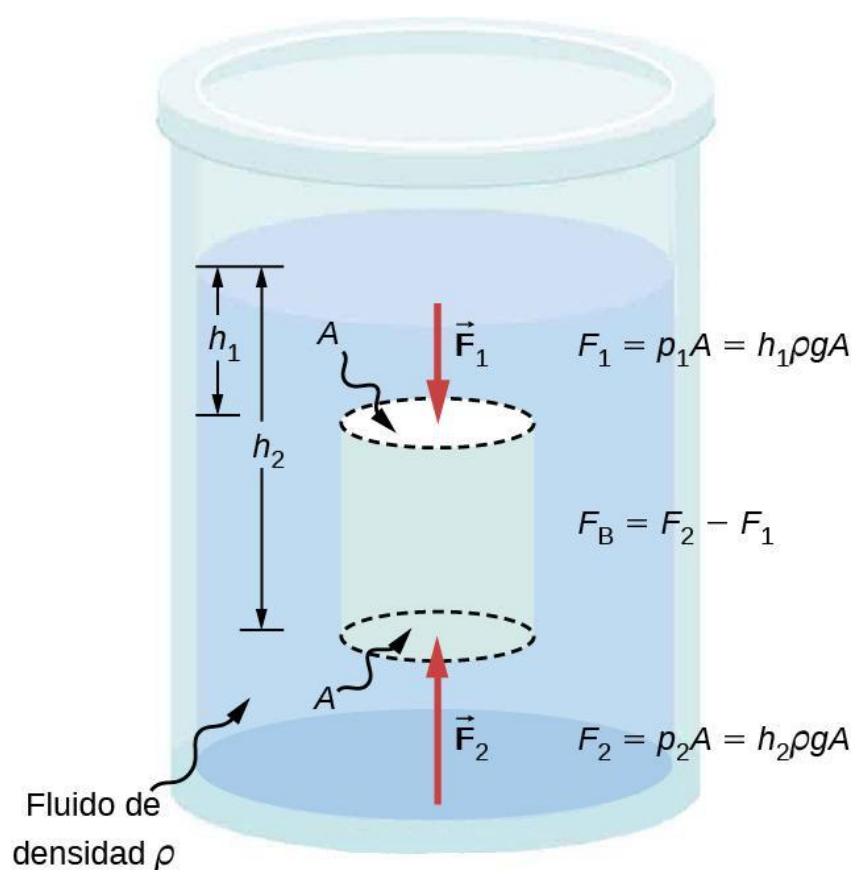
Definición de los términos citados en la Clase 14

Principio de Arquímedes: Este principio dice que un objeto sumergido en un fluido recibe una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido desplazado. Si el empuje supera el peso del objeto, flota; si no, se hunde. Es la razón por la que un barco puede flotar en el agua.

Empuje: Fuerza ascendente que sufre un cuerpo cuando se sumerge en un fluido, su valor depende de la densidad del fluido, del volumen del cuerpo y de la aceleración de la gravedad g .

Figura 7

Representación gráfica del origen de la fuerza ascendente $F_B = F_2 - F_1$ llamada empuje E .



Nota. Tomado de <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/14-4-principio-de-arquimedes-y-flotabilidad>



La excelencia no se improvisa

síguenos

