

Cálculo II

Dominio de integración triple

Clase 9



Ingeniería en ciberseguridad

La excelencia no se improvisa



1. INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Cuando hablamos del dominio D de una integral triple, al componerse de tres variables x, y, z , lo entendemos como un espacio tridimensional cuya interpretación geométrica es la de un volumen V limitado por una superficie cerrada S .

Ahora bien, el resultado de la integral de una función de tres variables $f(x, y, z)$ no tiene una representación geométrica, sin embargo, en el caso en que $f(x, y, z) \geq 0$, podemos suponer que esta representa la densidad de distribución de cierta materia en el dominio V .

La integral $\iiint_V f(x, y, z) dV$, no tiene una representación geométrica

Por otro lado, el dominio D es un volumen V , limitado por una superficie cerrada S , y en su frontera está definida una función continua $f(x, y, z)$, donde x, y, z son las coordenadas rectangulares de un punto del dominio.

Reto # 3

Clase 9: Dominio de integración triple

9. Tema. Cálculo del dominio de integración de funciones en tres variables independientes en coordenadas cartesianas.

9.1. Dominio de una integral triple

El estudio del dominio de una integral triple es una etapa esencial en la evaluación de integrales que involucran funciones de tres variables independientes. Básicamente, este análisis nos permite identificar el conjunto de puntos en el espacio tridimensional donde la función está definida y donde la integral se evaluará. Este proceso no solo es clave desde un punto de vista matemático, sino que también tiene aplicaciones prácticas en áreas como la física, la ingeniería y la estadística, donde es común trabajar con volúmenes y distribuciones en el espacio.

Tal como lo plantean Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010), entender el dominio de una integral triple no es únicamente una cuestión de técnica matemática. Es una herramienta poderosa que nos ayuda a modelar y resolver problemas tridimensionales complejos. Ambos autores destacan la importancia de visualizar y delimitar el dominio, ya que esta etapa inicial puede determinar la precisión y el éxito del cálculo integral. Además, este enfoque es esencial para quienes buscan aplicar las matemáticas a situaciones del mundo real, donde la geometría y las propiedades del espacio desempeñan un papel crucial.

Por eso, comprender el dominio no es solo un paso previo al cálculo, es una forma de interpretar y conectar los problemas matemáticos con sus representaciones físicas.

9.1.1 Definición de una integral triple

Sea $f(x,y,z)$ una función definida en una región del espacio tridimensional. La integral triple de $f(x,y,z)$ sobre una región V se expresa como:

$$\iiint_V f(x,y,z) dV$$

donde dV representa el elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas, dado por $dx dy dz$. El dominio V define los límites de integración y describe la región del espacio sobre la cual se evalúa la integral.

$$dV=dx dy dz$$

9.1.2 Caracterización del dominio

El dominio D de una integral triple puede ser descrito por desigualdades que definen sus límites en las tres dimensiones. En coordenadas cartesianas, estos límites se expresan mediante:

1. Intervalo para x : Determinado por $a \leq x \leq b$.
2. Intervalo para y : Puede depender de x , es decir, $g1(x) \leq y \leq g2(x)$.
3. Intervalo para z : Puede depender de x y y , de manera que $h1(x,y) \leq z \leq h2(x,y)$.

Así, la región D se define por el conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen las desigualdades antes mencionadas. *El orden de integración influye en la forma de expresar el dominio*, por lo que puede ser necesario reorganizar los límites según el orden seleccionado para evaluar la integral.

De forma general la integral triple se expresa como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g1(x)}^{g2(x)} \int_{h1(x,y)}^{h2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

9.1.3 Clasificación de dominios

1. Dominios rectangulares: La región V tiene límites constantes en las tres direcciones, es decir, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ y $e \leq z \leq f$. Este caso es el más simple y resulta en límites de integración independientes, su representación es un paralelepípedo rectangular.

Figura 1

Representación gráfica del dominio de integración V ($a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ y $e \leq z \leq f$) utilizando *WolframMathematica*, en formato GIF.

[CLASE 9, dominio paralelepípedo rectangular.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

2. Dominios generales: La región está delimitada por superficies curvas o planos, y los límites de integración en una variable dependen de las otras dos. Por ejemplo, una región comprendida entre dos paraboloides o entre un plano y una esfera.

Figura 2

Representación gráfica del dominio de integración V (3 superficies o planos) utilizando *WolframMathematica*, en formato GIF.

[CLASE 9, dominio 3D con superficies.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

9.1.4 Representación gráfica del dominio

Para visualizar y comprender el dominio V , es fundamental utilizar representaciones gráficas en tres dimensiones. Estas representaciones permiten identificar claramente las fronteras de la región y la relación entre las variables. Los gráficos incluyen:

1. Proyecciones en planos coordenados: La región V puede proyectarse en los planos xy , xz o yz para simplificar el análisis de sus límites.

Figura 3

*Representación gráfica del dominio de integración V (3 superficies o planos) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.*

[CLASE 9, dominio con proyección sobre planos.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

2. Superficies tridimensionales: Utilizadas para describir las superficies que delimitan el dominio. Por ejemplo, un cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq R^2$ y delimitado en z por $0 \leq z \leq h$.

Figura 4

*Representación gráfica del dominio de integración V (cilindro) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.*

[CLASE 9,volumen cilíndrico.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

Ejemplo 1

Considérese el dominio de integración una región V limitada por un cilindro de radio R , centrado en el eje z , y comprendida entre los planos $z=0$ y $z=h$. Determinar los límites de integración de:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Figura 5

*Representación gráfica del dominio de integración V (cilindro) utilizando **WolframMathematica** , en formato GIF.*

[CLASE 9,dominio volumen ejlcilíndrico.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

1. Descripción del dominio:

- Para x y y , el cilindro impone la condición $x^2 + y^2 \leq R^2$
- Para z , los límites son $0 \leq z \leq h$.

2. Límites de integración:

- x varía de $-R$ a R .
- Para cada valor de x , y varía de $-\sqrt{R^2 - x^2}$ a $\sqrt{R^2 - x^2}$.
- Para cada par (x, y) , z varía de 0 a h .

La integral triple se plantea entonces como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^h f(x, y, z) dz dy dx$$

Ejemplo 2

Considérese el dominio de integración una región V limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Determinar los límites de integración de:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Figura 6

Representación gráfica del dominio de integración V ($x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$) utilizando WolframMathematica, en formato GIF.

[CLASE 9, dominio volumen ej2 planos.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

1. Descripción del dominio:

- Para x, y, z el plano impone la condición $x + y + z \leq 1$
- Si $x=0$, en el plano yz , se forma la recta $y+z=1$
- Si $y=0$, en el plano xz , se forma la recta $x+z=1$
- Si $z=0$, en el plano xy , se forma la recta $x+y=1$, $y=1-x$
- Para x, y, z , los límites son $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

2. Límites de integración:

- x varía de 0 a 1 .
- Para cada valor de x , y varía de 0 a $1-x$.
- Para cada par (x, y) , z varía de 0 a $1-x-y$.

La integral triple se plantea entonces como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

Ejemplo 3

Considérese el dominio de integración una región V limitada por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z=0$. Determinar los límites de integración de:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Figura 7

*Representación gráfica del dominio de integración V (superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z=0$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.*

[CLASE 9, dominio volumen ej3 curva.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

3. Descripción del dominio:

- Para x, y, z el plano impone la condición $x^2 + y^2 + z \leq 1$; $z = 1 - x^2 - y^2$
- Si $x=0$, en el plano yz , se forma la curva $y^2 + z = 1$
- Si $y=0$, en el plano xz , se forma la curva $x^2 + z = 1$
- Si $z=0$, en el plano xy , se forma la curva $x^2 + y^2 = 1$; $y = \pm\sqrt{1-x^2}$
- Para x, y, z , los límites son $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

4. Límites de integración:

- x varía de -1 a 1.
- Para cada valor de x , y varía de $-\sqrt{1-x^2}$ a $\sqrt{1-x^2}$
- Para cada par (x, y) , z varía de 0 a $z = 1 - x^2 - y^2$

La integral triple se plantea entonces como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dy dx$$

Ejemplo 4

Considérese el dominio de integración una región V limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 1$. Determinar los límites de integración de:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Figura 8

Representación gráfica del dominio de integración V (superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 1$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 9, dominio volumen ej4 esfera.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

5. Descripción del dominio:

- Para x, y, z el plano impone la condición $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$; $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$
- Si $x=0$, en el plano yz , se forma la curva $y^2 + z^2 = 1$
- Si $y=0$, en el plano xz , se forma la curva $x^2 + z^2 = 1$
- Si $z=0$, en el plano xy , se forma la curva $x^2 + y^2 = 1$; $y = \pm\sqrt{1-x^2}$
- Para x, y, z , los límites son $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

6. Límites de integración:

- x varía de -1 a 1 .
- Para cada valor de x , y varía de $-\sqrt{1-x^2}$ a $\sqrt{1-x^2}$
- Para cada par (x, y) , z varía de $-\sqrt{1-x^2-y^2}$ a $\sqrt{1-x^2-y^2}$

La integral triple se plantea entonces como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$$

9.1.5 Aplicaciones prácticas

El análisis del dominio de una integral triple tiene aplicaciones en diversas áreas:

1. **Ingeniería:** Cálculo de volúmenes de estructuras complejas, como tanques o piezas mecánicas.
2. **Física:** Determinación de la masa o el momento de inercia de cuerpos con densidad variable.
3. **Ciencias ambientales:** Modelado de volúmenes de agua o aire en estudios de contaminación.

Ejemplo de aplicación en la vida real: Cálculo del volumen de un tanque de almacenamiento cilíndrico truncado

Se desea calcular el volumen de un tanque de almacenamiento que tiene forma cilíndrica con una base circular y una altura truncada por un plano inclinado. Este tipo de problema surge comúnmente en ingeniería industrial para determinar la capacidad de almacenamiento de líquidos en tanques no completamente llenos.

Aplicación en la vida real

Este cálculo permite determinar el volumen exacto del tanque y ajustarlo a las necesidades de almacenamiento de líquidos como agua, petróleo o productos químicos en condiciones específicas. También ayuda en el diseño eficiente de tanques para maximizar la capacidad y minimizar los costos de materiales al tener en cuenta factores geométricos como planos inclinados o bases irregulares.

9.1.6 Conclusión

El cálculo del dominio en una integral triple es un paso crucial que asegura la correcta definición de la región de integración. Este proceso requiere interpretar y describir adecuadamente las fronteras del dominio en términos de desigualdades. Los libros de N. Piskunov y Thomas G.B. proporcionan las herramientas teóricas y prácticas para dominar esta técnica, fundamental en el análisis de problemas tridimensionales complejos.

Enlace 1: En el siguiente link se encuentra un video con ejemplo con la forma de configurar los límites de una integral triple, definido el dominio V de integración en coordenadas cartesianas.

<https://youtu.be/SB-pyBe6I5k?si=7S4QECkJ5iR1dMvm>

9.2. División del dominio en una integral triple

La división del dominio en una integral triple es una herramienta esencial para abordar el cálculo de volúmenes y resolver problemas que involucran funciones de tres variables independientes. Este procedimiento nos permite descomponer una región tridimensional en partes más simples y manejables, lo que facilita enormemente la evaluación de la integral. ¿Por qué es importante? Porque muchas veces nos enfrentamos a dominios con geometrías complejas, que no se ajustan a un único sistema de límites. En estos casos, dividir el dominio en regiones más pequeñas es no solo práctico, sino necesario para simplificar el cálculo.

Como lo destacan Piskunov (1977) y Thomas G.B. (2010), esta técnica no es solo una cuestión de simplificación; también es una forma de entender mejor la estructura del espacio en el que trabajamos. Ambos autores subrayan cómo la elección adecuada de la división y de los límites puede marcar la diferencia entre un cálculo exitoso y uno que se vuelve inabordable. Además, este enfoque tiene aplicaciones prácticas en diversas disciplinas, como la física y la ingeniería, donde modelar fenómenos tridimensionales requiere precisión tanto en la formulación como en la interpretación de los resultados.

9.2.1 Fundamentos teóricos

En coordenadas cartesianas, una integral triple se representa como:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

donde V es la región tridimensional de integración y dV es el elemento diferencial de volumen, típicamente expresado como $dx \, dy \, dz$. Para regiones complejas, V puede dividirse en subregiones más manejables $V_1, V_2, \dots, V_n$, permitiendo evaluar la integral como la suma de integrales en cada subregión:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV + \dots + \iiint_{V_n} f(x, y, z) dV$$

La división del dominio puede basarse en superficies de separación definidas por ecuaciones explícitas o implícitas, dependiendo de las características del problema. En general, el procedimiento incluye:

1. **Identificación de la región V :** Determinar los límites generales del dominio.
2. **División en subregiones:** Definir las subregiones V_1, V_2 con límites claros y manejables.
3. **Planteamiento de las integrales:** Establecer las expresiones de las integrales en cada subregión.
4. **Evaluación de las integrales:** Calcular cada integral y sumar los resultados.

Ejemplo 5

Considérese el dominio de integración una región V limitada por un cilindro de radio $R=1$ y altura 2, con z variando entre 0 y 2. Cuando z varía entre 0 y 1, $x^2 + y^2 \leq 1$, y cuando z varía entre 1 y 2, $x \geq 0$. Determinar los límites de integración de:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

Figura 9

Representación gráfica del dominio de integración V (cilindro de radio $R=1$ y altura 2, con z variando entre 0 y 2. Cuando z varía entre 0 y 1, $x^2 + y^2 \leq 1$, y cuando z varía entre 1 y 2, $x \geq 0$) utilizando **WolframMathematica**, en formato GIF.

[CLASE 9,volumen compuesto cilíndrico.pdf](#)

Nota. Fuente: Creación del autor generada en Wolfram Mathematica.

1. Identificación de la región V :

- La base es un cilindro: $x^2 + y^2 \leq 1$
- La altura está dada por: $0 \leq z \leq 2$.

2. División del dominio:

- Dividimos el dominio en dos subregiones correspondientes a $V1$, $V2$:

- $V1$: $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ $0 \leq z \leq 1$
- $V2$: $0 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ $1 \leq z \leq 2$

3. Planteamiento de la integral en $V1$ (cilindro completo con z entre 0 y 1):

$$\iiint_{V1} f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 f(x, y, z) dz dy dx$$

4. Planteamiento de la integral en $V2$ (medio cilindro con z entre 1 y 2):

$$\iiint_{V_2} f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^2 f(x, y, z) dz dy dx$$

Conclusión: La integral con el dominio total V , viene dada por la suma de las integrales con los dos subdominios V_1 y V_2 :

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV$$

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 f(x, y, z) dz dy dx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^2 f(x, y, z) dz dy dx$$

Enlace 2: En el siguiente link se encuentra un video para dibujar sólidos con geogebra.

<https://youtu.be/5yeBPDvOG7c?si=Xw5ILpljFnN7C2qi>

9.2.2 Aplicaciones en la vida real

Las integrales triples tienen amplias aplicaciones prácticas:

1. **Ingeniería:** Cálculo de centros de masa y momentos de inercia en estructuras como puentes y vehículos.
2. **Física:** Análisis de campos electromagnéticos y dinámica de fluidos.
3. **Geografía:** Estimación de volúmenes de cuencas y dispersión de contaminantes.
4. **Medicina:** Reconstrucción de imágenes tridimensionales y cálculo de volúmenes en tomografías.
5. **Diseño 3D:** Modelado de objetos con propiedades físicas realistas en simulaciones.

Estas aplicaciones muestran la conexión entre las herramientas matemáticas y la resolución de problemas reales en diversos campos.

9.2.3 Conclusión



El análisis y la división del dominio en integrales triples facilitan el cálculo de propiedades tridimensionales en problemas complejos. Como destacan Piskunov (1977) y Thomas (2010), estas herramientas son esenciales tanto en la teoría como en aplicaciones prácticas, vinculando el cálculo matemático con soluciones reales en ciencia, ingeniería y tecnología.

Referencias citadas en la Clase 9

Creative Stall. (2021). *Cartesian plane and navigation coordinate system in perspective*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/cartesian-plane-navigation-coordinate-system-perspective-1908342139>.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e integral: Tomo II*. Editorial Mir.

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo: Varias variables* (12ª ed.). Pearson Educación. Recuperado de <https://robertocastellanos.com/Libros/Calculo%20Varias%20Variables%20-%20Thomas%2012Edicion.pdf>

Vector Tradition SM. (2015). *Coordinate axis on graph paper with origin highlighted*. Shutterstock. Recuperado de <https://www.shutterstock.com/es/image-vector/coordinate-axis-on-graph-paper-origin-243034501>.

Wolfram Research, Inc. (2024). *Mathematica* (Versión 14.2). Champaign, IL: Wolfram Research, Inc. Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>

Definición de los términos citados en la Clase 9

Superficie cerrada S (Definición): Es una superficie compacta que encierra un volumen, su principal característica es que no tiene límite, como por ejemplo una esfera. Una superficie no cerrada por ejemplo es una lámina plana.

Tres variables independientes (Definición): Son aquellas variables que son libres de tomar cualquier valor de forma individual sin que esto afecte al valor que pueden tomar las otras dos variables.



La excelencia no se improvisa

síguenos

