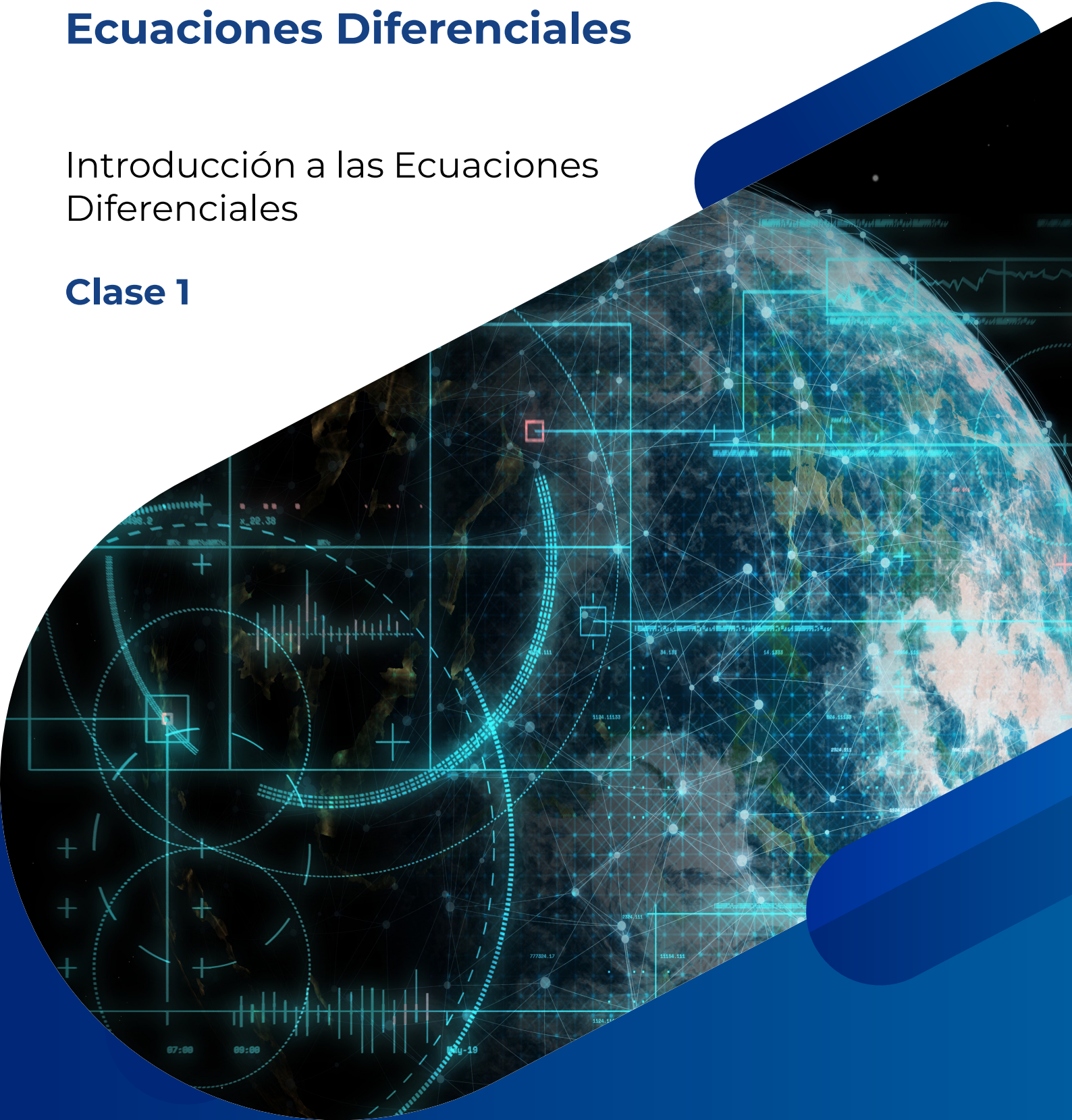


Ecuaciones Diferenciales

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Clase 1



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

En esta clase nos enfocaremos en el modelado de fenómenos reales utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden, aplicando el conocimiento teórico adquirido previamente para resolver problemas prácticos. Iniciaremos con los problemas de valor inicial (PVI), que son fundamentales en la formulación matemática de sistemas dinámicos, ya que permiten establecer condiciones específicas desde las cuales evoluciona una solución. La resolución de estos problemas se abordará tanto desde un enfoque analítico como computacional, introduciendo al estudiante en el uso de métodos numéricos simples, como el método de Euler, que proporciona una aproximación inicial a la solución cuando los métodos exactos no son aplicables o prácticos. Además, se analizarán los conceptos de error local y global, esenciales para evaluar la precisión y estabilidad de las soluciones obtenidas mediante aproximaciones numéricas.

A lo largo de la clase, se explorarán diversos modelos matemáticos basados en EDO de primer orden que representan situaciones del mundo real. Entre ellos se encuentran los modelos de crecimiento y decaimiento exponencial, aplicables en contextos como la población, la radiactividad o procesos financieros; y los modelos de mezcla y enfriamiento, que permiten simular el comportamiento de sistemas térmicos o químicos en ambientes dinámicos. Como parte de la integración del enfoque computacional, se introducirán elementos de programación en Python o C para implementar simulaciones básicas de estos modelos, desarrollando habilidades prácticas en la resolución numérica de ecuaciones. Al concluir esta clase, el estudiante estará capacitado para plantear un problema físico o real en términos de una EDO, resolverlo utilizando métodos analíticos y numéricos, y validar los resultados obtenidos mediante herramientas de programación, fortaleciendo así su formación en modelado computacional.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería y ciencias computacionales.

Clase 1: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

En esta clase nos centraremos en el **modelado matemático de sistemas dinámicos utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden**, una de las herramientas fundamentales en la representación de fenómenos que evolucionan con el tiempo. A través del análisis de problemas de valor inicial (PVI), los estudiantes comprenderán cómo establecer un modelo que describa adecuadamente un proceso físico, químico, biológico o computacional, identificando las variables clave, las condiciones iniciales y los supuestos que permiten formular la ecuación correspondiente. Se enfatizará la interpretación cualitativa de las soluciones, así como la importancia de establecer relaciones funcionales que representen con fidelidad el comportamiento del sistema en estudio. Esta etapa del curso busca desarrollar la capacidad de traducir problemas del mundo real a expresiones matemáticas que puedan ser analizadas y resueltas numéricamente.

Además, exploraremos los **métodos computacionales elementales para resolver EDO de primer orden**, como el método de Euler, prestando atención a su lógica de construcción, eficiencia y limitaciones. Se analizarán conceptos como el **error local y global**, cruciales para entender la precisión de las soluciones aproximadas y su dependencia del paso de integración. A través de ejemplos prácticos, se abordarán modelos típicos como el **crecimiento y decaimiento exponencial**, la **mezcla de soluciones** y los **procesos de enfriamiento**, todos ellos representativos de una amplia gama de aplicaciones reales. Finalmente, los estudiantes implementarán estos modelos en lenguajes como Python o C, generando simulaciones numéricas y visualizaciones que facilitan la validación e interpretación del comportamiento dinámico. Este enfoque les proporcionará una base sólida para continuar con métodos más avanzados de resolución y análisis de sistemas diferenciales.

Las **ecuaciones diferenciales** son expresiones matemáticas que relacionan una o más funciones desconocidas con sus derivadas. En otras palabras, describen cómo una cantidad cambia en función de otra, capturando el comportamiento dinámico de sistemas que evolucionan en el tiempo, en el espacio o en ambas dimensiones. Estas ecuaciones son fundamentales para el estudio y modelado de fenómenos naturales, procesos físicos, biológicos, químicos, económicos y tecnológicos.

Desde una perspectiva aplicada, las ecuaciones diferenciales ofrecen una herramienta poderosa para comprender y predecir el comportamiento de sistemas reales. Por ejemplo, permiten modelar el movimiento de un cuerpo bajo la acción de fuerzas, la propagación del calor en un medio, el crecimiento de una población, la circulación de corrientes eléctricas, o la difusión de una sustancia en un fluido. En todos estos casos, el uso de ecuaciones diferenciales permite establecer relaciones precisas entre las variables involucradas y sus tasas de cambio.

Existen distintas clasificaciones de ecuaciones diferenciales, siendo las principales las **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**, que involucran derivadas con respecto a una sola variable independiente, y las **ecuaciones en derivadas parciales (EDP)**, que incluyen derivadas respecto a dos o más variables independientes. Ambas clases son esenciales en el análisis y la solución de problemas que surgen en la ciencia y la ingeniería.

Más allá de su importancia teórica, las ecuaciones diferenciales también son clave en la simulación computacional de sistemas complejos. El desarrollo de métodos numéricos ha permitido resolver ecuaciones que no pueden abordarse de forma analítica, lo cual ha ampliado considerablemente su campo de aplicación.

1.1 Definición de Ecuaciones Diferenciales

Una **ecuación diferencial** es una expresión matemática que establece una relación entre una función desconocida y una o más de sus derivadas. Estas ecuaciones surgen de manera natural en la formulación de problemas donde intervienen magnitudes que varían continuamente, y donde resulta esencial conocer no solo el valor de una cantidad, sino también la forma en que esta cambia.

Desde un punto de vista general, una ecuación diferencial tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde $y = y(x)$ es la función desconocida y $y', y'', \dots, y^{(n)}$ representan sus derivadas de primer, segundo y hasta n -ésimo orden, respectivamente.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican principalmente en dos grandes categorías, según el número de variables independientes involucradas:

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO):** Son aquellas en las que la función incógnita depende de una sola variable independiente. Las derivadas involucradas también se toman respecto a esa única variable. Un ejemplo clásico es la ecuación que describe el crecimiento poblacional:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde $y(t)$ representa la población en el tiempo t , y k es una constante de crecimiento.

- **Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP):** En estas ecuaciones, la función incógnita depende de dos o más variables independientes, y las derivadas que aparecen son parciales. Un ejemplo típico es la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(x, t)$ representa la temperatura en una posición x y en un instante t , y α es una constante relacionada con la conductividad térmica.

En ambos casos, las ecuaciones diferenciales permiten describir cómo evolucionan ciertos sistemas a lo largo del tiempo o en el espacio, proporcionando un marco matemático fundamental para el análisis de fenómenos dinámicos en diversas disciplinas científicas y tecnológicas.

1.1.1 Clasificación: EDO y EDP

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos grandes grupos según el número de variables independientes involucradas en la función incógnita y sus derivadas:

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**

Una **ecuación diferencial ordinaria** es aquella que relaciona una función desconocida $y = y(x)$ de una sola variable independiente x , con sus derivadas respecto a dicha variable. Matemáticamente, una EDO de orden n puede expresarse como:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

donde F es una función dada, y $\frac{d^ky}{dx^k}$ representa la derivada de orden k de y con respecto a x .

Ejemplo:

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} + y = e^t,$$

donde $y = y(t)$ es la función desconocida y t es la variable independiente.

Las EDO describen procesos dinámicos que dependen de una sola variable, como el tiempo, por lo que son ampliamente usadas en modelos de crecimiento poblacional, circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, entre otros.

- **Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)**

Una **ecuación en derivadas parciales** es una relación matemática que involucra una función desconocida $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ de varias variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_m$, junto con sus derivadas parciales respecto a estas variables. Formalmente, una EDP de orden n puede escribirse como:

$$G\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}\right) = 0,$$

donde $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, y G es una función dada.

Ejemplo:

La ecuación clásica del calor en una dimensión espacial es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u = u(x, t)$ representa la temperatura en la posición x y el tiempo t , y α es la constante de difusión térmica.

Las EDP son esenciales para modelar fenómenos en los que las variables cambian simultáneamente en el tiempo y el espacio, como la transferencia de calor, la dinámica de fluidos, la propagación de ondas y la mecánica de sólidos.

Característica	EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria)	EDP (Ecuación en Derivadas Parciales)
Variables dependientes	Función de una sola variable independiente	Función de dos o más variables independientes
Tipo de derivadas	Derivadas ordinarias	Derivadas parciales
Ejemplo típico	$\frac{dy}{dx} + y = e^x$	$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Ámbito de aplicación	Modelos de crecimiento, circuitos eléctricos	Transferencia de calor, dinámica de fluidos
Métodos de solución	Integración directa, series de potencias	Separación de variables, transformadas de Fourier

Gráfico 1: Clasificación de ecuaciones diferenciales: EDO vs EDP.

Creación propia.

Las EDO son más fáciles de analizar y resolver, pero las EDP reflejan con mayor fidelidad los sistemas físicos del mundo real, como la transferencia de calor, el flujo de fluidos y la deformación de estructuras.

1.1.2 Orden, Linealidad y Autonomía

El análisis de una ecuación diferencial requiere considerar tres propiedades clave: su **orden**, su **linealidad** y si es **autónoma** o no.

- **Orden:** El orden de una ecuación diferencial está determinado por la derivada de mayor grado presente en ella.

- Ejemplo de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

- Ejemplo de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

Característica	Primer Orden	Segundo Orden
Orden de la derivada más alta	Primera derivada (diferencial de primer orden)	Segunda derivada (diferencial de segundo orden)
Forma general	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$
Ejemplo típico	$\frac{dy}{dx} = -ky$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$
Condiciones iniciales requeridas	Valor inicial de y	Valor inicial de y y de su derivada
Aplicaciones comunes	Crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo	Oscilaciones, sistemas masa-resorte, circuitos RLC

Gráfico 2: Comparación entre ecuaciones de primer y segundo orden.

Creación propia.

- **Linealidad:** Una ecuación diferencial es lineal si la función desconocida y sus derivadas aparecen de forma lineal (no multiplicadas entre sí ni elevadas a potencias).

- Lineal: $\frac{dy}{dt} + y = t$

- No lineal: $\frac{dy}{dt} + y^2 = t$

- **Autonomía:** Una ecuación es autónoma si no depende explícitamente de la variable independiente.

- Autónoma: $\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$

- No autónoma: $\frac{dy}{dt} = y + t$

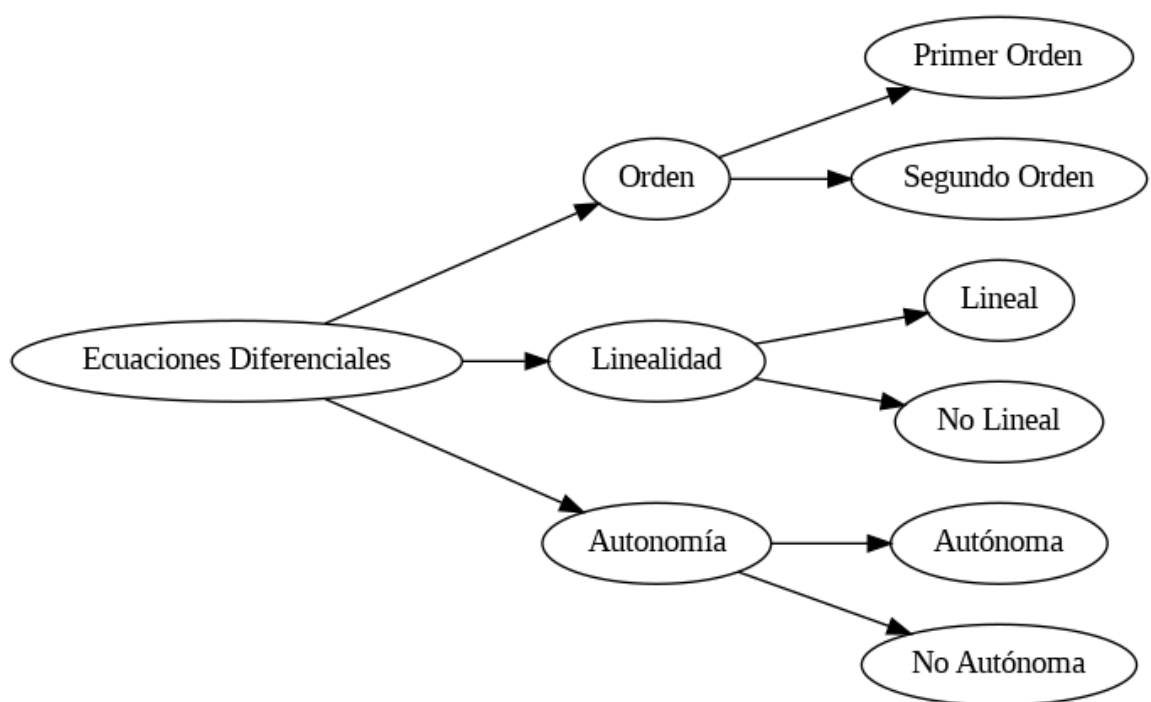


Gráfico 3: Diagrama conceptual: orden, linealidad y autonomía.

Creación propia.

Enlace 1:

<https://www.youtube.com/watch?v=MdKOjS8-oNw&t=275s&pp=ygURcmVzb2x1Y2lvbiBkZSBIZG8%3D>

Este video explica cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de factor integrante y casos lineales de primer orden. Ver en YouTube: Resolución de EDO primer orden

Descripción del enlace: Un recurso visual que ilustra paso a paso la técnica del factor integrante en ecuaciones diferenciales.

1.1.3 Solución General y Particular

Cuando se resuelve una ecuación diferencial, el objetivo es encontrar una o varias funciones que satisfagan la relación impuesta entre la función desconocida y sus derivadas. Existen dos tipos fundamentales de soluciones: la **solución general**, que abarca todas las posibles respuestas, y la **solución particular**, que representa un caso específico determinado por condiciones adicionales.

- **Solución General**

La **solución general** de una ecuación diferencial es una función que contiene una o más **constantes arbitrarias**, cuyo número suele coincidir con el orden de la ecuación. Esta solución representa una familia infinita de funciones que satisfacen la ecuación diferencial, y describe el comportamiento general del sistema modelado.

- **Definición matemática:**

Para una ecuación diferencial de orden n , la solución general tiene la forma:

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n$ son constantes arbitrarias de integración.

Ejemplo:

Considérese la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

donde k es una constante real. Al separar variables e integrar:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt \Rightarrow \ln|y| = kt + C.$$

Despejando:

$$y(t) = Ce^{kt},$$

donde $C = \pm e^C$ es una constante arbitraria. Esta expresión representa la solución general de la ecuación y describe todas las posibles curvas exponenciales que cumplen con la relación diferencial dada.

- **Solución Particular**

Una **solución particular** se obtiene cuando se proporcionan **condiciones iniciales** (en el caso de problemas de valor inicial) o **condiciones de frontera** (en el caso de ecuaciones en derivadas parciales), las cuales permiten determinar valores específicos para las constantes de la solución general. Al aplicar estas condiciones, se reduce la familia de soluciones a una única función que modela un escenario específico.

Enlace 2:

<https://www.youtube.com/watch?v=Swk5OPyu-cI&pp=ygUjcmVzb2x1Y2lvbiBkZSBIZG8gZWN1YWNpb24gZGUgY2Fsb3I%3D>

Este video aborda la solución por separación de variables para la ecuación del calor, incluyendo ejemplos y gráficos de evolución en el tiempo. Ver en YouTube: Ecuación del calor y separación de variables

Descripción del enlace: Ideal para comprender la metodología de resolución de EDP con condiciones de frontera.

Ejemplo (continuación):

Supongamos que además se nos da la condición inicial:

$$y(0) = y_0,$$

donde y_0 es un valor conocido. Sustituyendo en la solución general:

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C = y_0.$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Esta solución representa el comportamiento de un sistema específico (por ejemplo, crecimiento o decaimiento exponencial) con un valor inicial conocido.

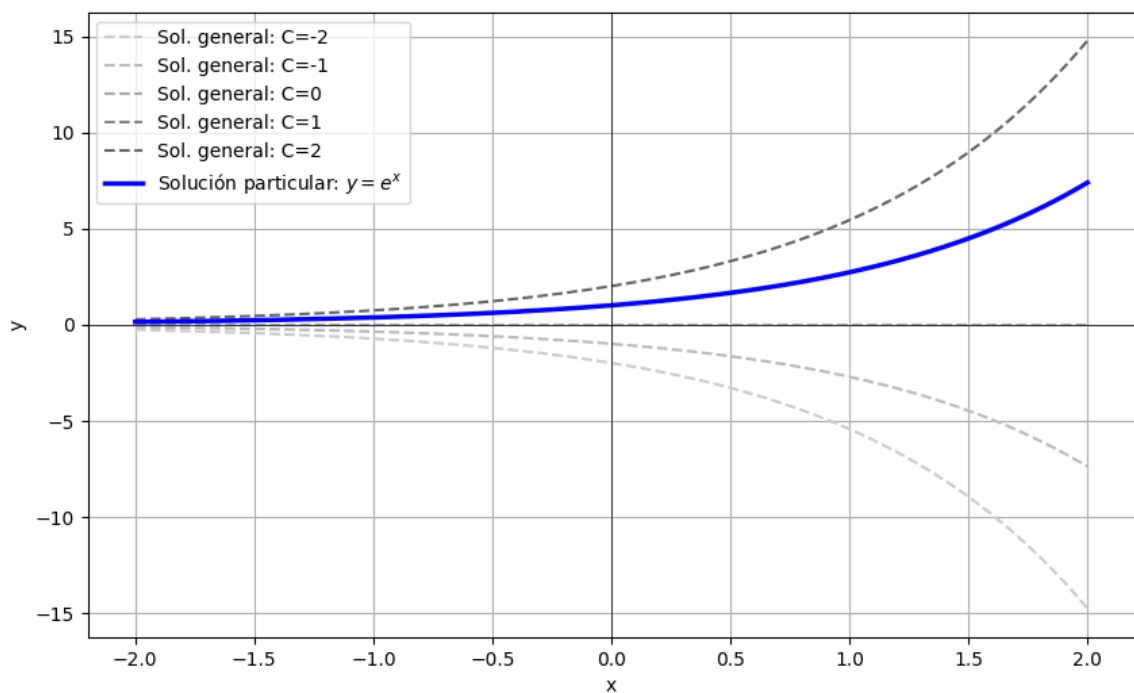


Gráfico 4: Familia de curvas para la solución general vs una solución particular.

Creación propia.

En las ciencias aplicadas, la solución particular es de especial interés porque representa el caso real o físico del sistema bajo análisis.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales, no basta con encontrar una solución general. Para que un problema esté completamente definido y se obtenga una **solución única**, es necesario complementar

la ecuación diferencial con **condiciones adicionales** que representen el estado o el comportamiento del sistema en momentos o lugares específicos. Estas condiciones son fundamentales tanto en el ámbito teórico como en la práctica, ya que permiten seleccionar la única solución que se ajusta a un fenómeno físico real.

Estas condiciones se clasifican en dos grandes tipos: **condiciones iniciales** (usualmente asociadas a EDO) y **condiciones de frontera** (usualmente asociadas a EDP).

- **Condiciones Iniciales**

Las **condiciones iniciales** se utilizan en problemas formulados con **ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**. Su propósito es especificar el estado del sistema en un instante inicial, generalmente en el tiempo $t=0$. Esto permite determinar de manera única los valores de las constantes de integración que aparecen en la solución general.

Ejemplo (EDO de segundo orden):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

con condiciones iniciales:

$$y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

Este conjunto de datos especifica no solo la posición inicial del sistema, sino también su velocidad inicial. Al resolver la ecuación, estas condiciones determinan una única curva $y(t)$ dentro de la familia de soluciones generales.

- **Condiciones de Frontera**

Las **condiciones de frontera** (también llamadas *condiciones de contorno*) se aplican principalmente a **ecuaciones en derivadas parciales (EDP)**. En este caso, se trata de describir el comportamiento de la solución en los **extremos del dominio espacial**. Dependiendo del tipo de fenómeno y de las propiedades físicas del sistema, se pueden usar diferentes tipos de condiciones de frontera.

Tipos de condiciones de frontera más comunes:

1. Condiciones de Dirichlet (condiciones de valor):

Se prescribe el valor de la función desconocida en los bordes del dominio. Este tipo de condición es útil, por ejemplo, para fijar la temperatura en los extremos de una barra.

Ejemplo:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

donde $u(x, t)$ representa la temperatura en una barra de longitud L en el tiempo t . Estas condiciones establecen que los extremos se mantienen a temperatura cero.

2. Condiciones de Neumann (condiciones de flujo):

Se especifica el valor de la **derivada normal** (la derivada respecto a la dirección del borde), es decir, la tasa de cambio de la función en la frontera. Se utiliza frecuentemente en problemas de transferencia de calor o flujo donde se conoce el flujo de entrada o salida.

Ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$$

indica que no hay flujo de calor en el extremo $x=0$, es decir, la frontera es perfectamente aislada.

3. Condiciones de Robin (mixtas):

Combinan valores de la función y su derivada. Se utilizan en situaciones donde existe una relación proporcional entre la cantidad y su flujo, como en intercambio de calor con el ambiente.

Ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + \beta u(L, t) = 0,$$

donde β es una constante de transferencia.

Importancia de estas condiciones

- En **EDO**, las condiciones iniciales permiten predecir cómo evoluciona un sistema a partir de un estado dado. Por ejemplo, en mecánica clásica, definen la posición y velocidad iniciales de una partícula.
- En **EDP**, las condiciones de frontera son indispensables para reflejar correctamente los límites físicos del problema, como paredes fijas, superficies aisladas, entradas o salidas de calor o materia, etc.

Sin estas condiciones, las soluciones a las ecuaciones diferenciales no estarían completamente determinadas, y no sería posible hacer predicciones confiables. En muchos casos, la solución general incluye infinitas funciones posibles; son estas condiciones las que **garantizan la unicidad** y permiten encontrar la solución específica que se ajusta al sistema real.

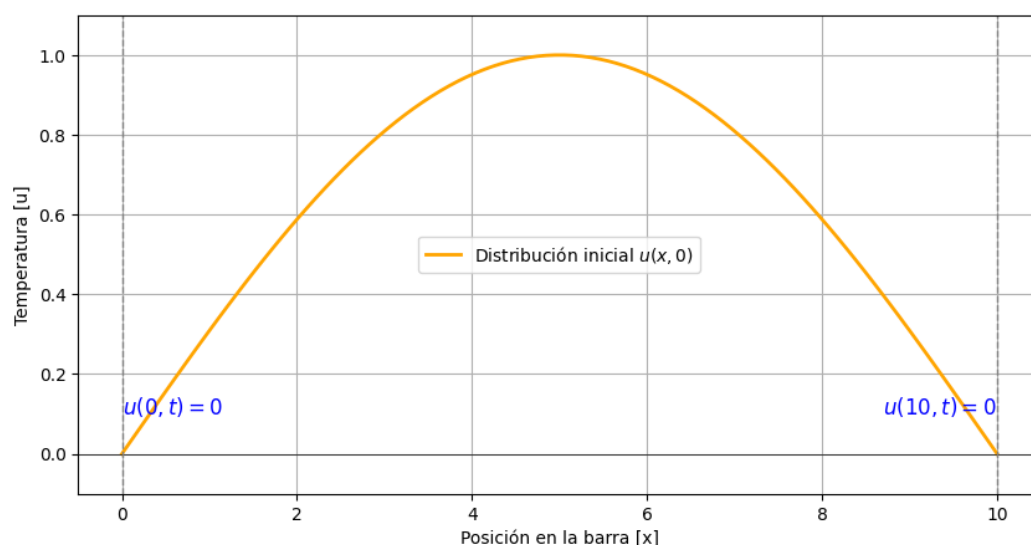


Gráfico 5: Representación de condiciones de frontera en una barra metálica.

Creación propia.

Estas condiciones hacen que las soluciones sean físicamente válidas y deterministas, eliminando ambigüedades matemáticas.

En las ciencias computacionales, las ecuaciones diferenciales permiten representar procesos dinámicos y resolverlos mediante métodos numéricos implementados por algoritmos y software.

- **Simulación de fenómenos físicos**

La simulación de procesos como la conducción de calor, la dinámica de fluidos o la propagación de señales electromagnéticas requiere resolver EDP que modelan el comportamiento del sistema.

- **Modelado de sistemas dinámicos**

Sistemas mecánicos, eléctricos o biológicos pueden representarse mediante EDO:

- Circuitos RLC: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$
- Movimiento de un péndulo: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$

- **Métodos computacionales**

Los métodos numéricos permiten aproximar soluciones cuando una forma analítica no es viable:

- **Euler, Runge-Kutta, Verlet** (para EDO)
- **Diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos** (para EDP)

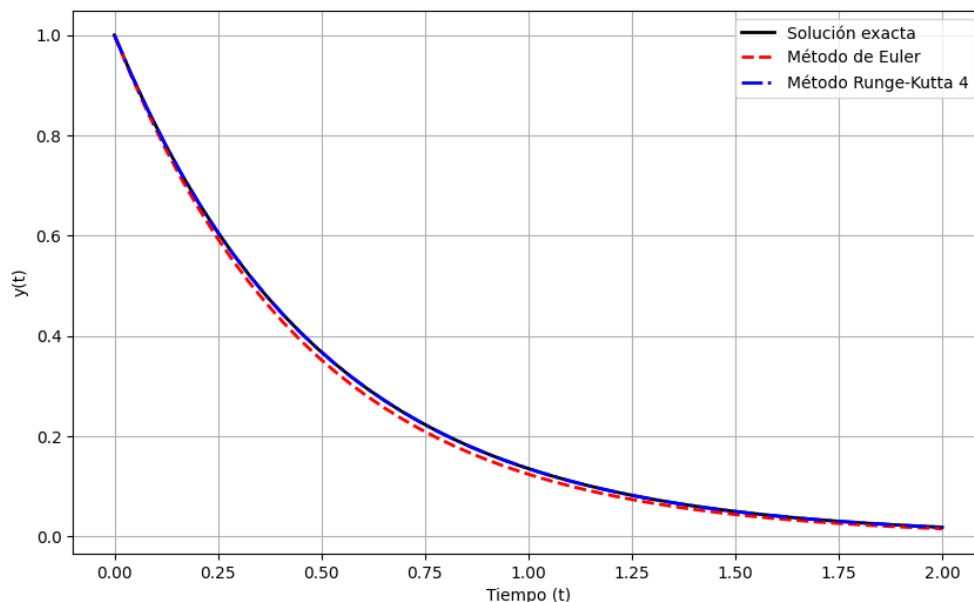


Gráfico 6: Comparación de soluciones exactas vs numéricas (método de Euler y Runge-Kutta).

Creación propia.

Lenguajes y herramientas

Los siguientes entornos y lenguajes se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales:

- **MATLAB:** funciones como ode45, pdepe
- **Python:** scipy.integrate.solve_ivp
- **FEniCS:** para métodos de elementos finitos
- **COMSOL:** software de simulación basado en EDP

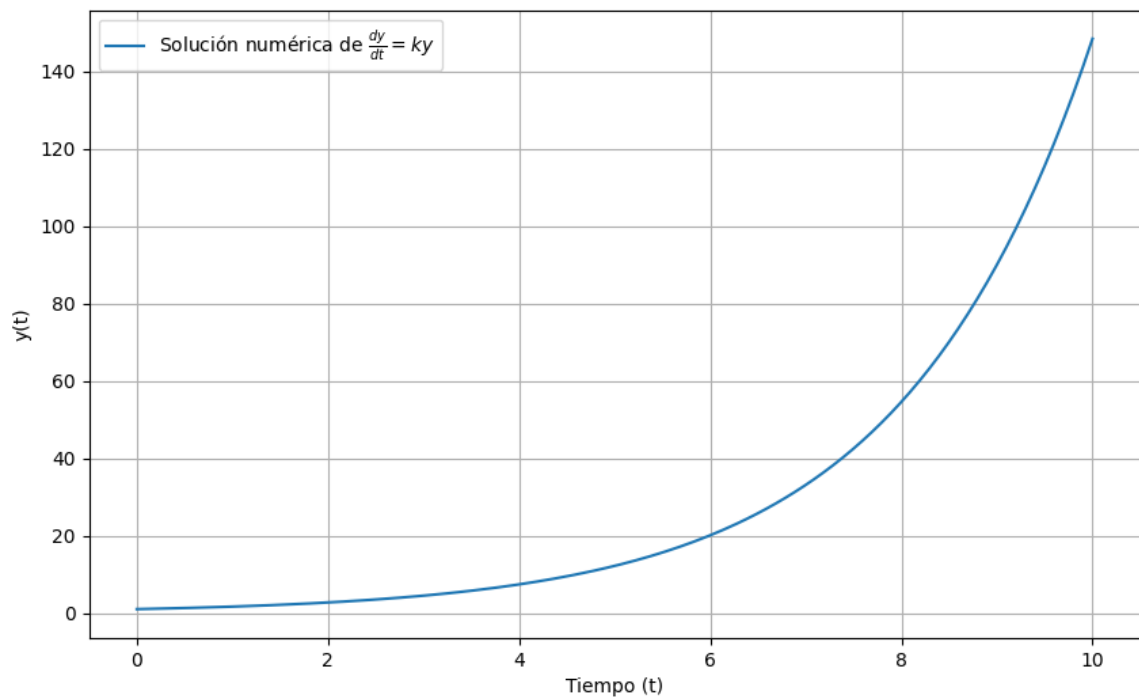


Gráfico 7: Aplicación de EDO en Python.

Creación propia.

Ejemplos Prácticos

Ejemplo 1: EDO lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 1$$

Usamos el **método del factor integrante**:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

Solución:

$$y(x) = e^{-2x} \left(\int e^x \cdot e^{2x} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + C \right)$$

Ejemplo 2: Oscilador armónico simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Solución general:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Este tipo de ecuación es clave en la física para estudiar sistemas que oscilan como resortes, péndulos o circuitos eléctricos.

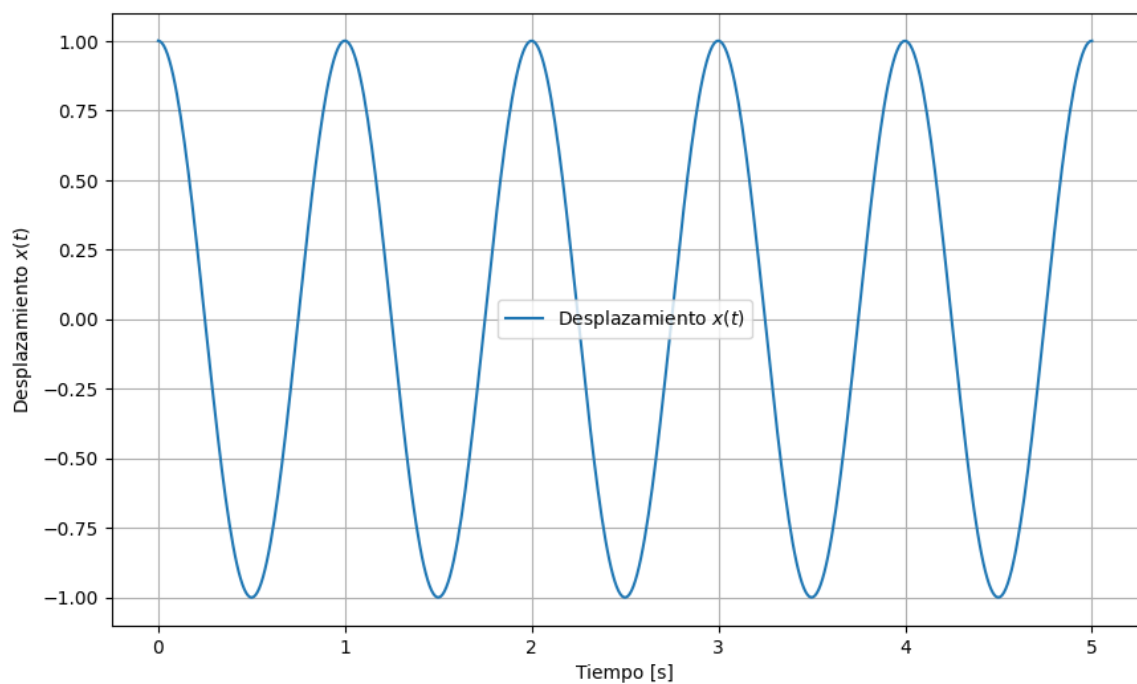


Gráfico 8: Comportamiento del oscilador armónico en función del tiempo.

Creación propia.

Ejemplo 3: EDP - Ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

Solución mediante separación de variables:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Se utiliza para modelar la temperatura en una barra metálica.

Definición de los términos citados en la clase 1

- **Ecuación diferencial ordinaria (EDO):** ecuación que relaciona una función desconocida con sus derivadas respecto a una sola variable independiente.
- **Condiciones de frontera:** restricciones impuestas en los extremos del dominio para garantizar una solución única de ecuaciones en derivadas parciales.

Referencias

- Zill, D. G. (2017). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones (9ª ed.). Cengage Learning.
- Espinoza Ramos, M. (2015). Ecuaciones diferenciales: teoría, métodos y aplicaciones. Editorial Universidad.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (11ª ed.). Wiley.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). Differential Equations. Cengage Learning.
- Coddington, E. A. (1989). An Introduction to Ordinary Differential Equations. Dover Publications.

Recursos de Profundización

1. Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Descripción del enlace: En este artículo, se abordan detalladamente las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, enfocándose especialmente en ecuaciones separables y ecuaciones lineales. A través de

ejemplos prácticos y resueltos paso a paso, se explican los métodos más comunes para encontrar las soluciones a estos tipos de ecuaciones, proporcionando una base sólida para su comprensión y aplicación.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1atMTRcntmXes2ZvRadWD3lsJv-QLoukv/view?usp=sharing>

2. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Descripción del enlace: Este recurso de **GeoGebra** ofrece una visualización interactiva para resolver **ecuaciones diferenciales de segundo orden**, como las ecuaciones lineales homogéneas. Puedes modificar los coeficientes y ver cómo se comportan las soluciones en el plano cartesiano.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/kgn6jc9v>

3. Simulación Ecuación Diferencial de Segunda Orden

- ✓ **Descripción del enlace:** Este simulador de **Wolfram Alpha** permite resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, tanto de primer como de segundo orden. Además, muestra las soluciones explícitas y gráficas, permitiendo experimentar con distintos tipos de ecuaciones y condiciones iniciales.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

https://colab.research.google.com/drive/1ivAT1a9iCPFPCmYwnq_ZzjQFXTwszXY-?usp=sharing



La excelencia no se improvisa

síguenos

