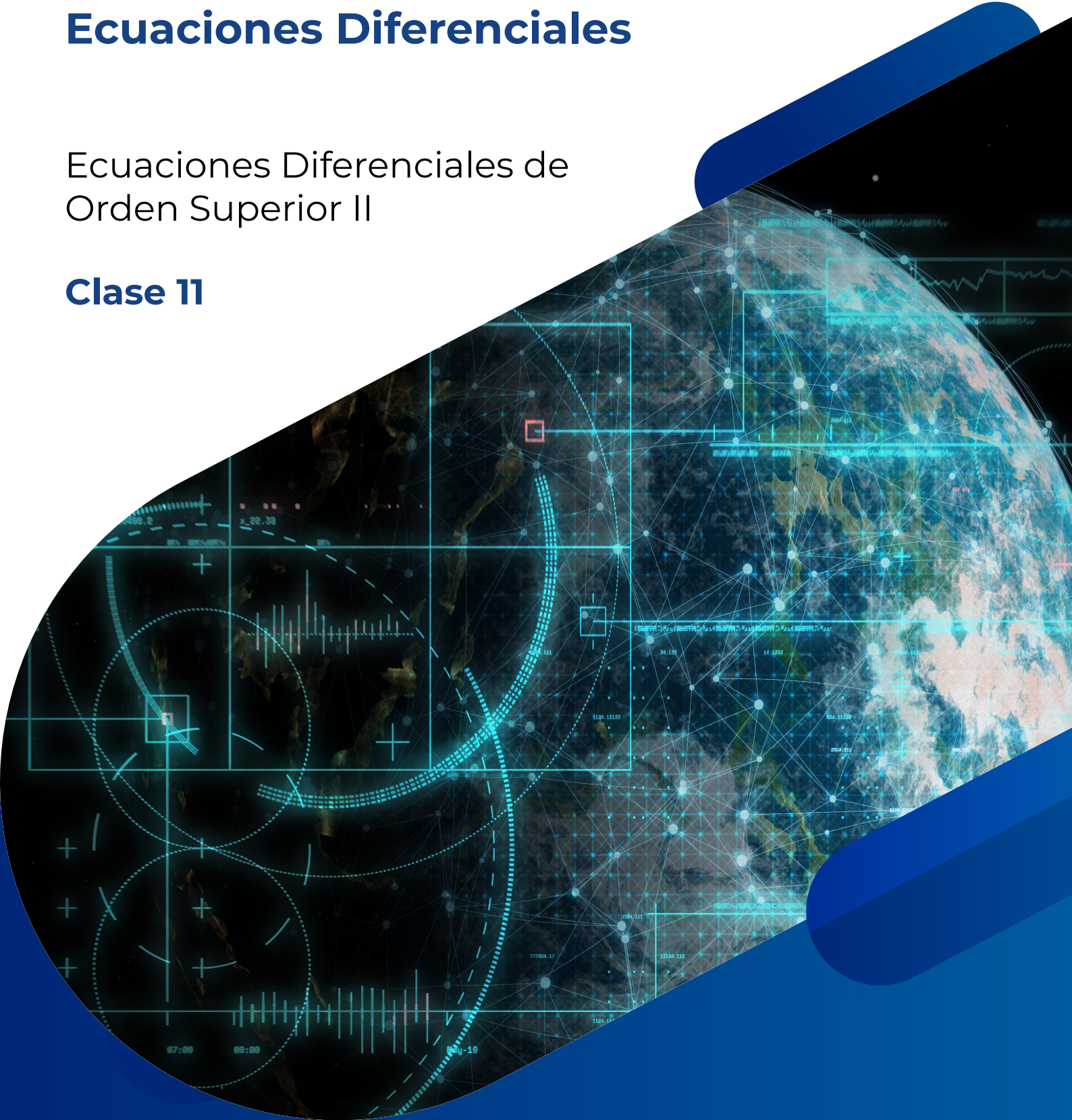


Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales de
Orden Superior II

Clase 11



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior se enriquece significativamente al incorporar métodos avanzados para la resolución de ecuaciones lineales no homogéneas y aquellas con coeficientes variables, ampliando el alcance y la profundidad del análisis matemático. Entre las técnicas fundamentales destaca el método de variación de parámetros, que permite determinar soluciones particulares mediante la utilización de las soluciones homogéneas previamente conocidas. Este método, caracterizado por su versatilidad y aplicabilidad en una amplia gama de problemas, ofrece un procedimiento sistemático que supera las limitaciones de otros enfoques cuando se enfrentan términos no homogéneos complejos o funciones no elementales. De manera complementaria, el método de coeficientes indeterminados constituye una estrategia eficaz y directa para resolver ecuaciones con términos no homogéneos específicos y estructurados, facilitando la construcción de soluciones completas a partir de la combinación de la solución homogénea y la particular, y permitiendo un análisis más ágil en casos concretos y frecuentemente encontrados en la práctica.

Además, el análisis de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables amplía el espectro de problemas abordables en este campo, introduciendo casos donde la dependencia de los coeficientes en la variable independiente complica la resolución, exigiendo técnicas especializadas. La ecuación de Cauchy–Euler, un ejemplo paradigmático de este tipo, requiere un tratamiento diferenciado que aprovecha la estructura particular de sus coeficientes para transformar el problema en una forma más manejable. La comprensión y dominio de estos métodos avanzados no solo fortalecen la base teórica del análisis diferencial, sino que también son esenciales para la modelación precisa de fenómenos físicos, ingenieriles y científicos que involucran sistemas dinámicos con características no lineales o variables. Así, el estudio integral de estas técnicas amplía la capacidad analítica y práctica para enfrentar y resolver problemas complejos, consolidando un perfil profesional competente y versátil en el ámbito de las ciencias matemáticas aplicadas.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería y ciencias computacionales.
- 2) Desarrollar habilidades para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con distintas técnicas.
- 3) Aplicar los conocimientos de ecuaciones diferenciales para la modelización de fenómenos físicos y su simulación mediante técnicas numéricas en herramientas computacionales.

Clase 11: Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior II

El estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior continúa profundizando en técnicas avanzadas para la resolución de problemas más complejos, particularmente aquellos que involucran términos no homogéneos y coeficientes variables. Entre los métodos fundamentales para abordar estas ecuaciones se encuentra el método de variación de parámetros, una técnica poderosa que permite encontrar soluciones particulares en ecuaciones no homogéneas, incluso cuando las funciones del término no homogéneo no son simples o cuando los coeficientes varían con la variable independiente. Esta metodología se basa en la construcción dinámica de soluciones ajustando parámetros que varían en función del tiempo o el espacio, lo cual tiene gran relevancia en aplicaciones computacionales que simulan sistemas dinámicos con entradas o fuerzas externas variables.

Complementariamente, el método de coeficientes indeterminados se utiliza principalmente cuando el término no homogéneo tiene una forma particular (polinómica, exponencial, trigonométrica, entre otras) que facilita proponer una solución tentativa con parámetros a determinar. Este método resulta eficiente y ampliamente utilizado en algoritmos computacionales para resolver ecuaciones diferenciales en sistemas de control, procesamiento de señales y modelos físicos que exhiben respuestas específicas ante estímulos determinados.

Por otro lado, las ecuaciones con coeficientes variables y la ecuación de Cauchy–Euler representan casos especiales donde los coeficientes dependen explícitamente de la variable independiente, lo que exige métodos adaptados para su solución. La ecuación de Cauchy–Euler, con su característica particular de coeficientes potencias de la variable, aparece frecuentemente en problemas de mecánica, física aplicada y análisis numérico, y su estudio es fundamental para desarrollar técnicas computacionales capaces de manejar sistemas no lineales y con dependencia dinámica. En conjunto, estos métodos forman un cuerpo teórico robusto que, cuando se implementa en software y algoritmos, facilita la simulación, análisis y diseño de sistemas complejos en ingeniería, inteligencia artificial, y ciencias aplicadas.

11.1. Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros es una técnica poderosa para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden superior, de la forma $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, donde $g(x) \neq 0$. Este método es especialmente útil cuando el término no homogéneo $g(x)$ no se ajusta fácilmente al método de coeficientes indeterminados, como en casos con funciones exponenciales complejas, sinusoidales o no polinómicas. En aplicaciones computacionales, su flexibilidad lo hace ideal para modelar sistemas dinámicos con entradas externas, como en control automático, procesamiento de señales y simulaciones físicas.

El método asume que la solución particular $y_p(x)$ de la ecuación no homogénea se expresa como una combinación lineal de las soluciones de la ecuación homogénea asociada, $y_1, y_2, \dots, y_n$, pero con coeficientes variables: $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$. Para una ecuación de segundo orden, $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ se determinan resolviendo el sistema:

$$[u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0][u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x)]$$

Este sistema se resuelve usando el *Wronskiano*, $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1'$, garantizando que las soluciones y_1 y y_2 sean linealmente independientes. Las soluciones son:

$$\left[u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)} \right]$$

Integrando estas expresiones, se obtienen $u_1(x)$ y $u_2(x)$, y así $y_p(x)$. En computación, este método se implementa en lenguajes como Python con bibliotecas como SymPy para resolver analíticamente o SciPy para soluciones numéricas cuando $g(x)$ es complejo. Por ejemplo, en el modelado de vibraciones forzadas en sistemas mecánicos, como un resorte con una fuerza externa variable, el método de variación de parámetros captura la respuesta del sistema a entradas no periódicas.

En aplicaciones computacionales, este método es clave en el diseño de filtros digitales, donde $g(x)$ representa señales de entrada arbitrarias. En simulaciones de dinámica de fluidos, se usa para modelar perturbaciones externas, resueltas numéricamente mediante métodos como Runge-Kutta. En machine learning, las ecuaciones diferenciales no homogéneas modelan dinámicas temporales en redes neuronales continuas, con solvers ODE en frameworks como TensorFlow.

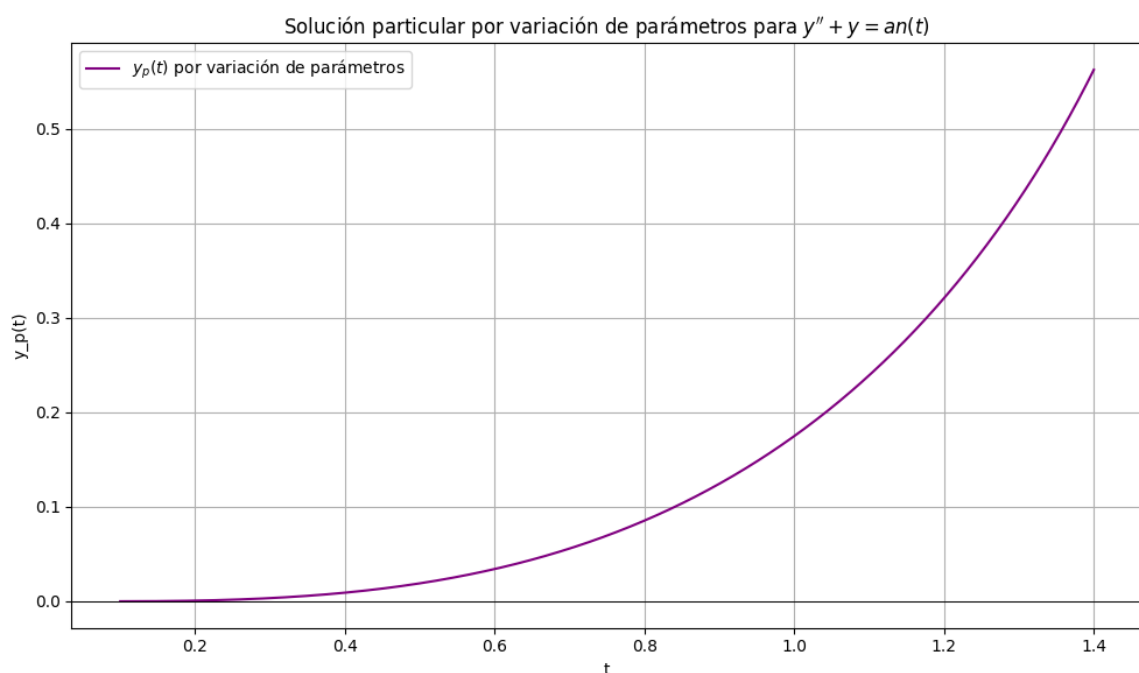


Gráfico 1: Representación de la solución particular obtenida por variación de parámetros para una ecuación no homogénea. Creación propia.

El método es computacionalmente intensivo para órdenes altos debido a la integración de $u_i(x)$, pero su generalidad lo hace invaluable para sistemas complejos, como en el control de robots o en simulaciones climáticas donde las entradas externas varían con el tiempo.

En resumen, el método de variación de parámetros es una herramienta versátil para resolver ecuaciones no homogéneas, con aplicaciones en simulaciones computacionales y modelado de sistemas dinámicos.

Enlace 1:

<https://www.youtube.com/watch?v=McSN9g7DbYA&pp=ygUXdHJhbnNmb3JtYWwRhIGRIIGxhcGxhY2U%3D>

Este video explica de manera clara cómo aplicar la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, con ejemplos prácticos. Ver en YouTube: Transformada de Laplace en EDO

Descripción del enlace: Este recurso visual ofrece una guía paso a paso para entender la Transformada de Laplace en el contexto de EDO, ideal para reforzar los conceptos teóricos.

11.1.1. Método de coeficientes indeterminados

El *método de coeficientes indeterminados* es una técnica eficiente para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes, de la forma $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$, donde $g(x)$ tiene una forma específica, como polinomios, exponenciales o funciones trigonométricas. Este método es más simple que la variación de parámetros cuando $g(x)$ pertenece a una familia conocida de funciones.

El procedimiento consiste en proponer una solución particular $y_p(x)$ cuya forma se deriva de $g(x)$ y sus derivadas. Las reglas básicas son:

- Si $g(x)$ es un polinomio de grado k , se propone $y_p(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0$.
- Si $g(x) = e^{(ax)}$, se propone $y_p(x) = A e^{(ax)}$.
- Si $g(x) = \sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$, se propone $y_p(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$.
- Si $g(x)$ es una combinación, se suma la forma correspondiente para cada término.

Si un término de $y_p(x)$ coincide con una solución de la ecuación homogénea, se multiplica por x^m , donde m es la multiplicidad de la raíz correspondiente en la ecuación característica. Los coeficientes se determinan sustituyendo $y_p(x)$ en la ecuación original y resolviendo el sistema resultante.

En aplicaciones computacionales, este método es eficiente para simulaciones rápidas. Por ejemplo, en un sistema masa-resorte con una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, la ecuación $my'' + by' + ky = F_0 \cos(\omega t)$ se resuelve proponiendo $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, ajustando A y B para modelar la respuesta forzada. En Python, SymPy automatiza este proceso, mientras que solvers numéricos como odeint en SciPy manejan casos con $g(x)$ no analítico.

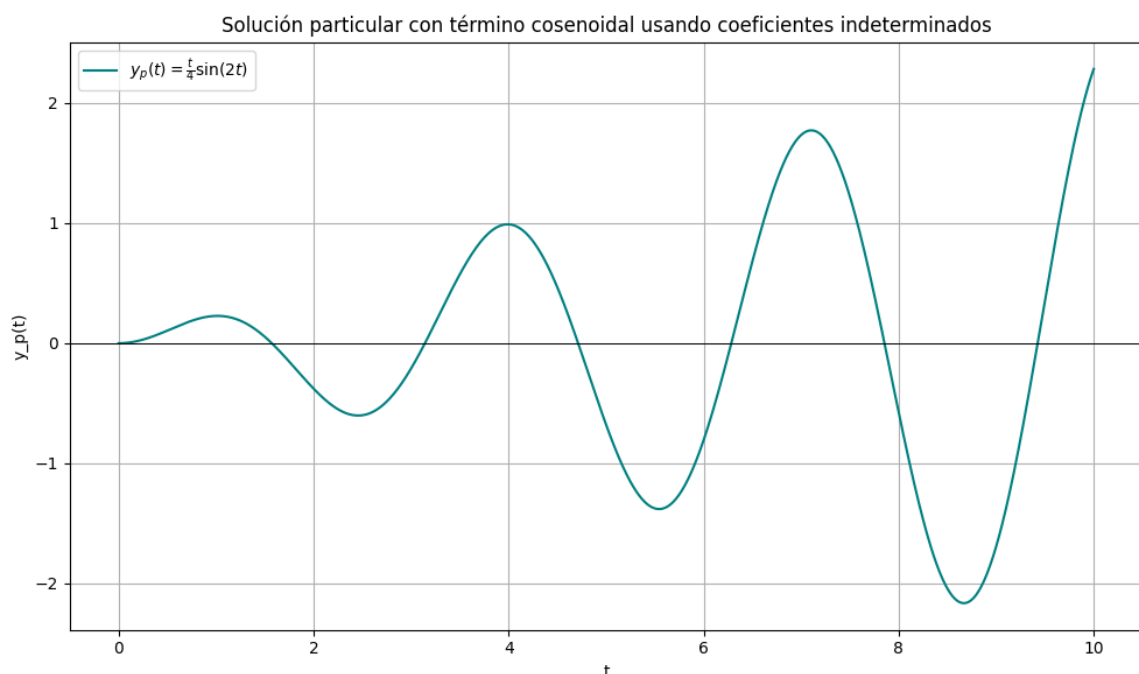


Gráfico 2: Solución particular de una ecuación no homogénea con término cosenoidal usando coeficientes indeterminados. Creación propia.

El método de coeficientes indeterminados, utilizado para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes, tiene aplicaciones ampliamente reconocidas en áreas clave de la computación aplicada y la ingeniería. Este método permite encontrar soluciones particulares cuando la función no homogénea posee una forma específica —como polinomios, exponenciales o senoidales—, lo que



lo convierte en una herramienta esencial para analizar sistemas forzados en diversos contextos tecnológicos.

En procesamiento de señales, este enfoque se emplea para modelar la respuesta de sistemas lineales a entradas periódicas, como señales sinusoidales, permitiendo el diseño y análisis de filtros analógicos y digitales. Es fundamental, por ejemplo, para determinar cómo un sistema reacciona ante señales contaminadas por ruido o frecuencias no deseadas, siendo la base de algoritmos de eliminación de interferencias y mejora de la calidad de señal.

En el campo del control automático, el método se utiliza para diseñar sistemas que deben responder a referencias externas o entradas forzadas, como ocurre en el seguimiento de trayectorias en robótica. Al modelar el comportamiento de actuadores o servomecanismos frente a señales deseadas, este método facilita la implementación de controladores que aseguren precisión, estabilidad y respuesta rápida ante variaciones externas.

Además, en simulación de redes eléctricas, herramientas como SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) aplican este método para analizar circuitos eléctricos sometidos a señales específicas, como fuentes de voltaje alterno, pulsos rectangulares o rampas. Estas simulaciones permiten predecir con precisión el comportamiento de componentes electrónicos, evaluar el diseño de sistemas embebidos y optimizar el rendimiento energético en entornos computacionales.

Así, el método de coeficientes indeterminados se posiciona como una técnica clave en la intersección entre la matemática aplicada, la computación científica y la ingeniería, proporcionando una base sólida para la resolución eficiente de problemas dinámicos reales.

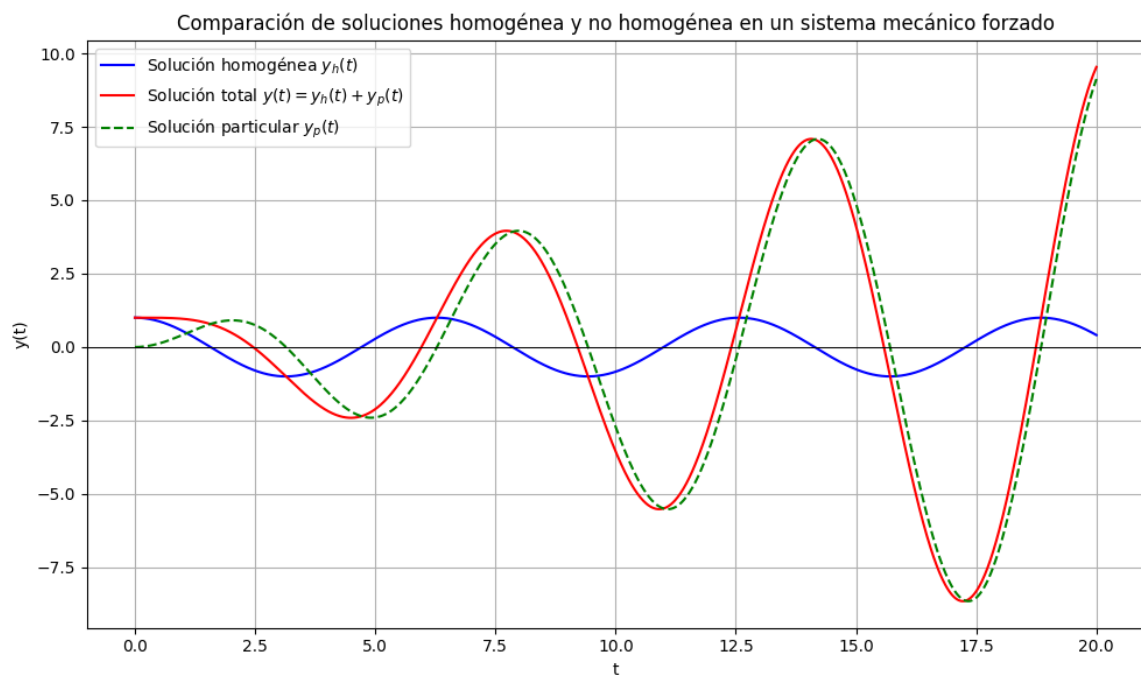


Gráfico 3: Comparación de soluciones homogéneas y no homogéneas en un sistema mecánico forzado. Creación propia.

El método es limitado a $g(x)$ de formas específicas, pero su simplicidad lo hace ideal para aplicaciones computacionales donde la eficiencia es clave, como en simulaciones en tiempo real.

En conclusión, el método de coeficientes indeterminados es una herramienta práctica para resolver ecuaciones no homogéneas, con aplicaciones en simulación, control y procesamiento de señales.

11.1.2. Ecuaciones con coeficientes variables

Las *ecuaciones con coeficientes variables*, de la forma $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, son más complejas que aquellas con coeficientes constantes, ya que los coeficientes dependen de x . Estas ecuaciones modelan sistemas donde las propiedades cambian con la variable independiente, como en estructuras mecánicas con rigidez variable o en sistemas ópticos con índices de refracción no uniformes.

Resolver estas ecuaciones analíticamente es desafiante, y a menudo se recurre a métodos específicos o soluciones en series. Un enfoque común es asumir una solución en forma de serie de potencias, $y(x) = \sum a_k x^k$, sustituyéndola en la ecuación y

resolviendo para los coeficientes a_k . Este método es computacionalmente intensivo, pero herramientas como MATLAB o SymPy automatizan el cálculo, generando soluciones aproximadas para sistemas complejos.

En aplicaciones computacionales, las ecuaciones con coeficientes variables se resuelven numéricamente usando métodos como Runge-Kutta o métodos de elementos finitos. Por ejemplo, en el modelado de vigas con rigidez variable, la ecuación $EI(x)y'''' + q(x) = 0$ describe la deflexión $y(x)$, donde E y $I(x)$ varían con x . Software como ANSYS resuelve estas ecuaciones para optimizar diseños estructurales.

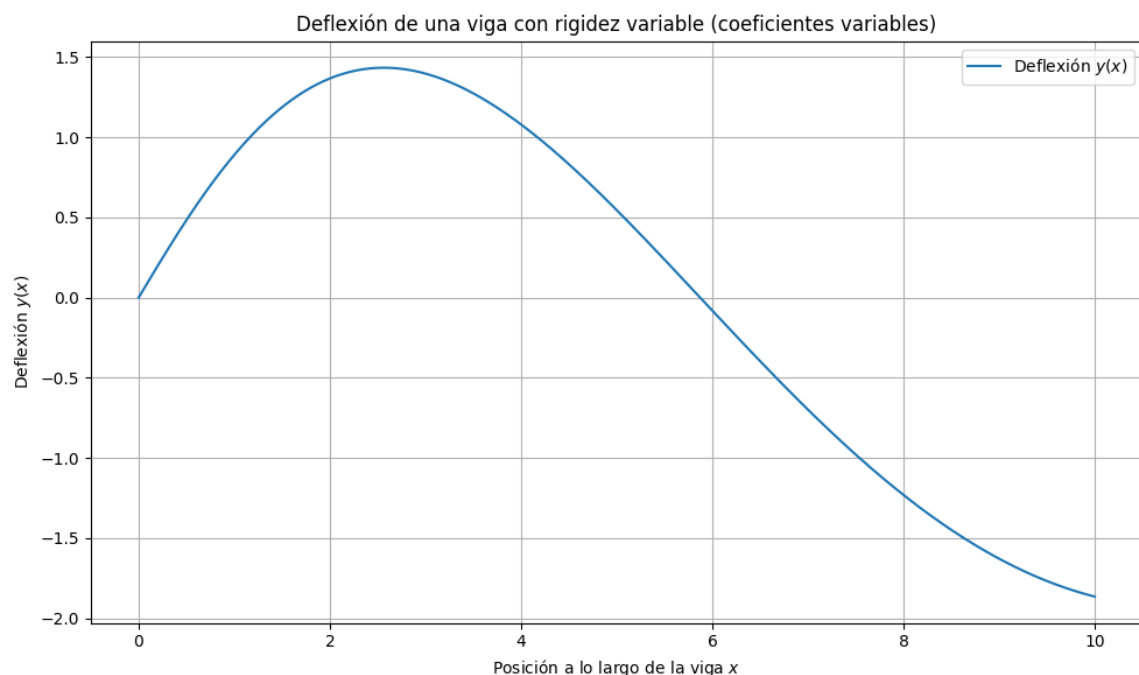


Gráfico 4: Deflexión de una viga con rigidez variable modelada por una ecuación con coeficientes variables. Creación propia.

En física computacional, estas ecuaciones modelan ondas en medios no homogéneos, como en sismología, donde la velocidad de propagación varía con la profundidad. En machine learning, las ecuaciones con coeficientes variables describen dinámicas no estacionarias, resueltas mediante solvers ODE en frameworks como PyTorch.

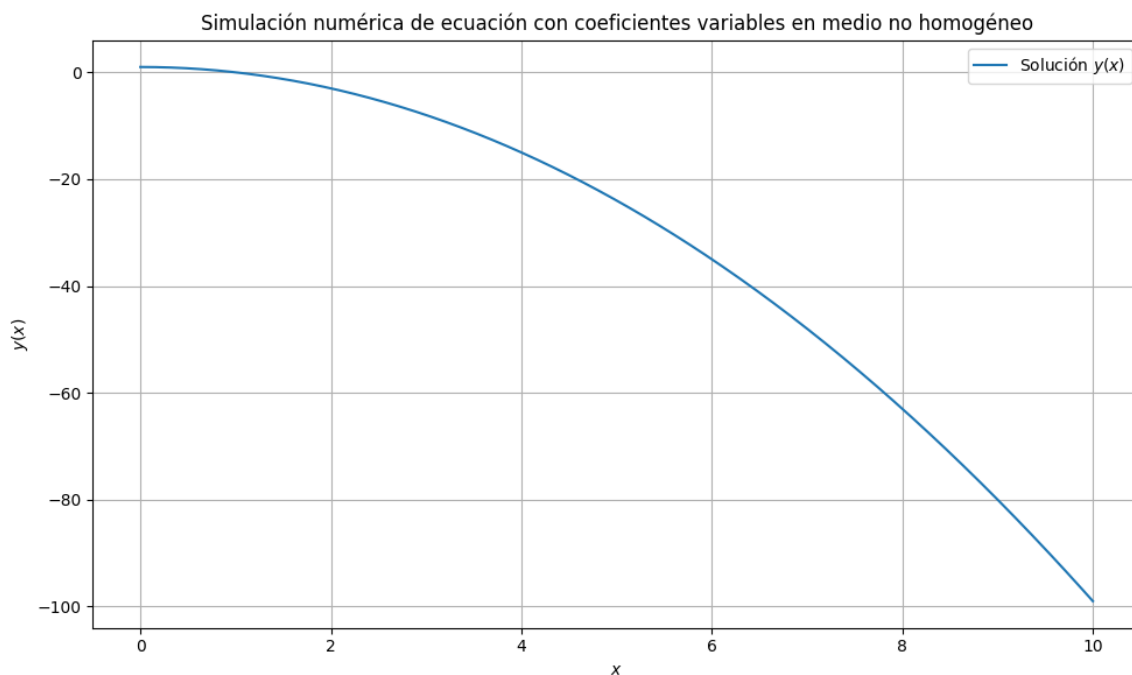


Gráfico 5: Simulación numérica de una ecuación con coeficientes variables en un medio no homogéneo. Creación propia.

Otro enfoque es transformar la ecuación en una forma más manejable, como en el caso de la ecuación de Cauchy-Euler, o usar métodos asintóticos para aproximaciones. En computación, estas técnicas se integran en simulaciones de alta precisión, como en dinámica de fluidos computacional (CFD).

En resumen, las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables representan una categoría esencial dentro del estudio de sistemas dinámicos complejos, ya que permiten modelar comportamientos donde las propiedades internas del sistema —como masa, resistencia, rigidez o velocidad de cambio— no permanecen constantes, sino que dependen directamente de la variable independiente. Este tipo de ecuaciones es común en fenómenos reales donde el entorno o los parámetros del sistema varían con el tiempo, la posición o alguna otra dimensión física.

Debido a su complejidad, las soluciones analíticas son limitadas, por lo que su tratamiento se apoya fuertemente en métodos numéricos computacionales, como los esquemas de Runge-Kutta, diferencias o elementos finitos, los cuales permiten simular con alta precisión una amplia gama de escenarios prácticos. Estas soluciones computacionales han sido integradas con éxito en herramientas de simulación

científica, frameworks de inteligencia artificial, y plataformas de análisis de datos dinámicos.

Gracias a estas capacidades, las ecuaciones con coeficientes variables tienen un impacto directo en múltiples disciplinas de ingeniería, computación, bioinformática, robótica y climatología, siendo una base clave para desarrollar soluciones robustas y adaptativas en entornos donde los sistemas no son estáticos, sino altamente sensibles a su contexto.

Enlace 2:

<https://www.youtube.com/watch?v=XiQJgFiJGJ8&pp=ygUVU3ltUHkgeSBUcmFuc2ZvcmlhZGFz>

Este tutorial muestra cómo usar SymPy para realizar cálculos simbólicos relacionados con la Transformada de Laplace. Ver en YouTube: SymPy y Transformadas

Descripción del enlace: Este video es un complemento práctico para aprender a implementar la Transformada de Laplace en Python con SymPy.

11.1.3. Ecuación de Cauchy–Euler

La ecuación de Cauchy–Euler, también conocida como ecuación equidimensional, tiene la forma $a_n x^n y^{(n)} + a(n-1)x^{(n-1)}y^{(n-1)} + \dots + a_1 xy' + a_0 y = 0$ para la versión homogénea, o con un término $g(x)$ para la no homogénea. Esta ecuación es común en problemas con simetría radial, como en el análisis de vibraciones en discos o en ecuaciones de onda en coordenadas cilíndricas.

Para resolver la ecuación homogénea, se asume una solución de la forma $y(x) = x^r$. Sustituyendo en una ecuación de segundo orden, $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, se obtiene la ecuación característica $a r(r-1) + br + c = 0$. Las raíces r_1 y r_2 determinan las soluciones:

- **Raíces reales distintas:** $y(x) = c_1 x^{(r_1)} + c_2 x^{(r_2)}$.
- **Raíces reales repetidas** ($r_1 = r_2 = r$): $y(x) = c_1 x^r + c_2 x^r \ln(x)$.
- **Raíces complejas** ($r = \alpha \pm i\beta$): $y(x) = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln(x)) + c_2 \sin(\beta \ln(x))]$.

Para la ecuación no homogénea, se combina la solución homogénea con una solución particular obtenida mediante variación de parámetros o coeficientes indeterminados, dependiendo de $g(x)$.

En aplicaciones computacionales, la ecuación de Cauchy-Euler modela sistemas físicos con dependencia radial, como en acústica o dinámica de fluidos en tuberías. En Python, SymPy resuelve estas ecuaciones analíticamente, mientras que solvers numéricos en SciPy manejan casos no homogéneos complejos.

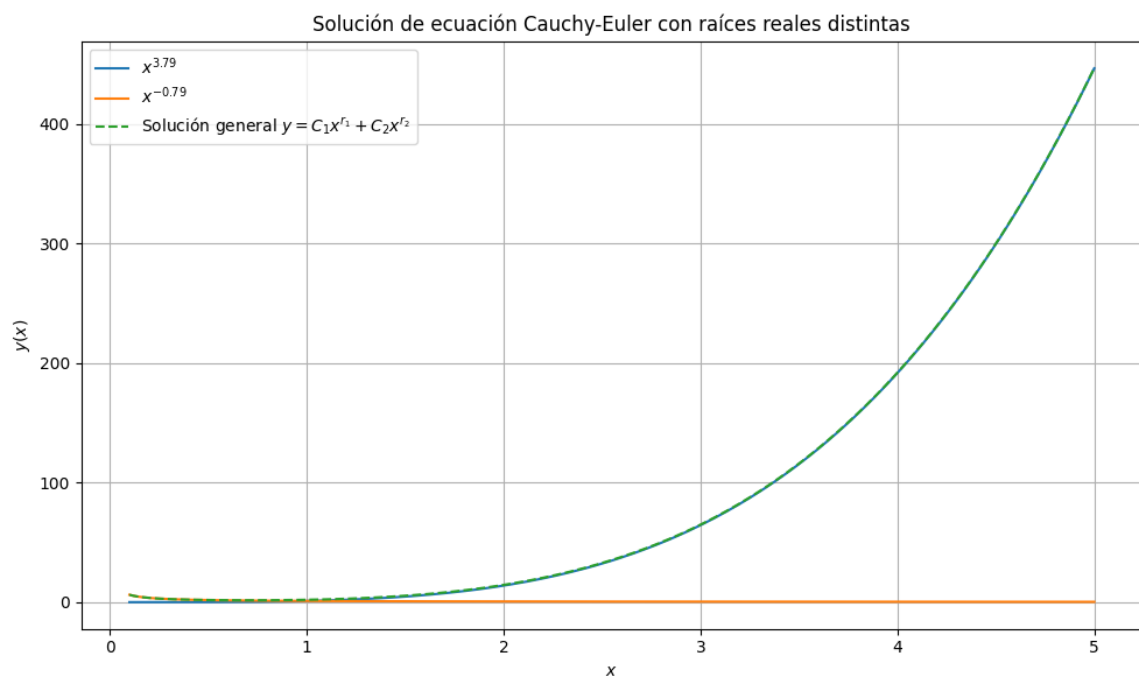


Gráfico 6: Solución de una ecuación de Cauchy-Euler homogénea con raíces reales distintas. Creación propia.

La ecuación de Cauchy-Euler, como caso particular de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, posee una estructura matemática que aparece con frecuencia en problemas que presentan simetría radial o logarítmica, lo cual la hace especialmente útil en aplicaciones de ingeniería y computación. En ingeniería estructural, estas ecuaciones se utilizan para modelar tensiones y deformaciones en estructuras cilíndricas o con geometrías circulares, como tubos de presión, columnas huecas o componentes de turbinas. Al tratarse de sistemas donde las propiedades del material y las fuerzas aplicadas varían con la distancia al centro, el uso de ecuaciones de tipo Cauchy-Euler resulta matemáticamente natural. Estos modelos se resuelven comúnmente utilizando métodos numéricos como el método de elementos finitos, y se

implementan en plataformas como COMSOL Multiphysics, que permiten simular el comportamiento estructural bajo distintas condiciones físicas y geométricas.

En el ámbito de la computación gráfica, la ecuación de Cauchy–Euler también encuentra aplicaciones relevantes, especialmente en el modelado de efectos de iluminación radial y sombreados realistas en entornos 3D. Al renderizar escenas con fuentes de luz puntuales o distribuidas radialmente, la variación de la intensidad luminosa con la distancia puede representarse mediante soluciones de este tipo de ecuaciones. De este modo, el modelo matemático aporta una base continua y suave para calcular degradados de luz y sombras, generando una estética visual más coherente con los principios físicos de propagación luminosa. Estas implementaciones pueden integrarse en motores de renderizado como Unity, Unreal Engine o bibliotecas de visualización como OpenGL, mediante shaders que simulan dinámicas de iluminación basadas en ecuaciones diferenciales.

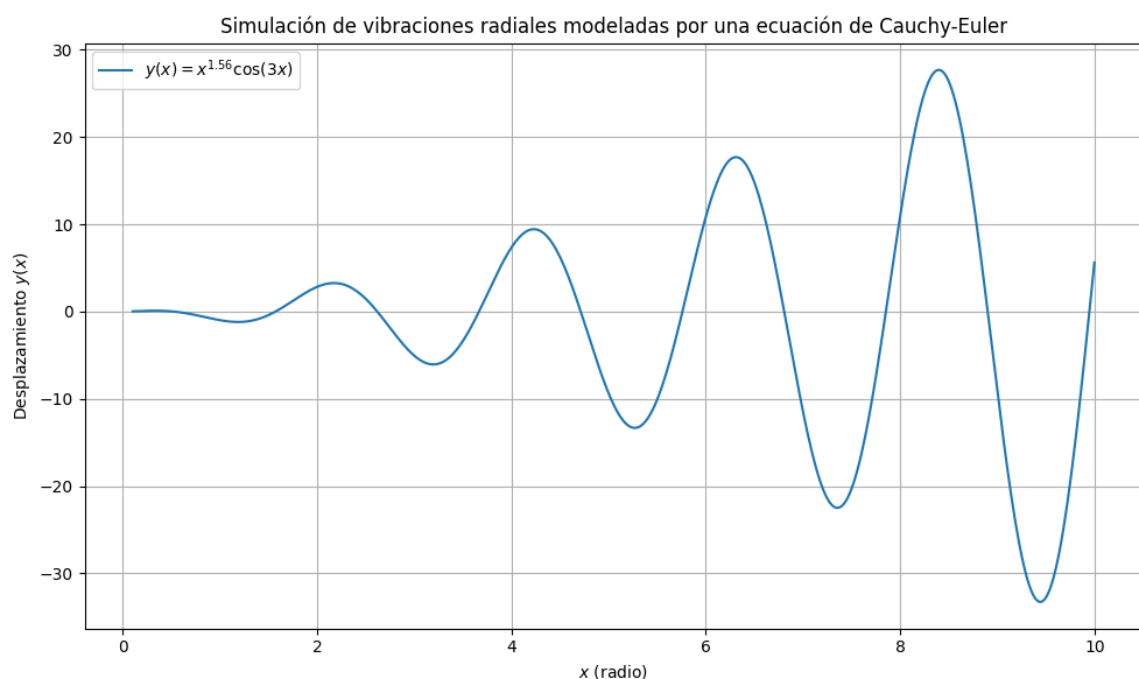


Gráfico 7: Simulación de vibraciones radiales modeladas por una ecuación de Cauchy-Euler. Creación propia.

En machine learning, las ecuaciones de Cauchy-Euler aparecen en modelos con simetría logarítmica, como en el análisis de datos espaciales. Solvers ODE en TensorFlow integran estas soluciones en redes neuronales continuas.

En conclusión, la ecuación de Cauchy–Euler representa una herramienta fundamental en el análisis de sistemas donde los coeficientes varían proporcionalmente con la variable independiente, como ocurre en modelos con simetría radial o escalamiento logarítmico. Su estructura matemática permite describir fenómenos naturales y artificiales de forma precisa, lo que la convierte en una ecuación clave en ingeniería mecánica, procesos térmicos, y análisis estructural de cuerpos cilíndricos o esféricos.

Además, en el contexto de la simulación computacional, su solución se implementa mediante métodos numéricos avanzados —como los elementos finitos— en entornos como COMSOL, ANSYS o MATLAB, permitiendo la representación realista de fuerzas, flujos y respuestas dinámicas. En áreas emergentes como el aprendizaje automático continuo y la computación gráfica, sus principios también son reutilizados para simular dinámicas que dependen del contexto espacial, como la propagación radial de señales, datos o iluminación.

Por tanto, el dominio teórico y computacional de esta ecuación no solo enriquece el enfoque clásico de las ecuaciones diferenciales, sino que también habilita a los profesionales en computación e ingeniería a resolver problemas complejos, optimizar procesos y construir modelos más precisos y adaptativos para aplicaciones en ciencia y tecnología avanzada

Definición de los términos citados en la clase 11

- **Método de variación de parámetros:** Una técnica para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas, donde la solución particular se expresa como una combinación lineal de soluciones homogéneas con coeficientes variables, determinados mediante el *Wronskiano*.
- **Ecuación de Cauchy–Euler:** Una ecuación diferencial lineal homogénea o no homogénea con coeficientes de la forma $a_i x^i$, común en problemas con simetría radial, resuelta asumiendo soluciones de la forma $y(x) = x^r$.

Referencias

- Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer.
- Debnath, L., & Bhatta, D. (2014). *Integral Transforms and Their Applications* (3rd ed.). CRC Press.

- Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2014). *Fourier Series and Boundary Value Problems* (7th ed.). McGraw-Hill.
- Bronson, R. (1990). *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. McGraw-Hill.
- Spiegel, M. R. (1965). *Laplace Transforms*. McGraw-Hill.

Recursos de Profundización

1. Laplace Transform and Its Applications in Engineering

Autor: Calor Mayorga

Descripción: Este artículo explora las aplicaciones prácticas de la Transformada de Laplace en ingeniería, con un enfoque en sistemas de control y procesamiento de señales.

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1XwMrQepgUBAoxdG3_8arKROQfj7rNj_H/view?usp=sharing

2. Symbolic Computation with SymPy: A Practical Guide

Autor: Carlos Mayorga

Descripción: Este artículo detalla cómo utilizar SymPy para realizar cálculos simbólicos, incluyendo ejemplos de transformadas de Laplace y resolución de transformadas de Laplace y resolución de EDO.

Enlace:

https://drive.google.com/file/d/1TyFnFHUNzcsC3_MVgHPGHtscvMhz8Ads/view?usp=sharing

3. Linear Systems and Laplace Transforms

Autor: Carlos Mayorga

Descripción: Este recurso profundiza en el uso de la Transformada de Laplace para analizar sistemas lineales, con ejemplos relevantes para la computación.

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1xEmS1XhbGnGrUG4HrwaOHnM3UbsA0Idh/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

