

Ecuaciones Diferenciales

Transformada de Laplace II

Clase 13



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

El estudio de la Transformada de Laplace se profundiza en esta etapa con el análisis de sus aplicaciones en la transformación de derivadas e integrales, lo que permite una mayor flexibilidad para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos complejos. La propiedad que vincula la transformada de una derivada con la función original resulta especialmente útil para transformar problemas en los que intervienen tasas de cambio, ya que simplifica la representación matemática de los sistemas y facilita su manipulación algebraica. De manera análoga, la transformada de integrales extiende el alcance de esta herramienta al permitir convertir operaciones integrales en expresiones algebraicas manejables, consolidando la capacidad para resolver problemas con condiciones acumulativas o efectos retardados. Estas propiedades fundamentales amplían significativamente el espectro de problemas abordables y optimizan los procesos de análisis y síntesis de soluciones en el ámbito de las ecuaciones diferenciales.

Además, la Transformada de Laplace ofrece un marco eficaz para el tratamiento de funciones periódicas, permitiendo analizar sistemas con entradas repetitivas o señales que se repiten en intervalos regulares. Este aspecto es crucial en la ingeniería eléctrica, la teoría de señales y el control automático, donde el comportamiento periódico es común y su comprensión es esencial para el diseño y análisis de sistemas. Asimismo, la inclusión de la función delta de Dirac en el estudio representa un avance significativo, dado que esta función generalizada modela eventos instantáneos o impulsos que son frecuentes en la realidad física y tecnológica. La capacidad de incorporar y manipular esta función dentro del formalismo de la Transformada de Laplace brinda una herramienta poderosa para analizar respuestas impulsivas y fenómenos transitorios, enriqueciendo así el repertorio matemático disponible para la modelación y resolución de problemas complejos. De esta manera, esta etapa del estudio consolida una comprensión avanzada y aplicada de la Transformada de Laplace, esencial para enfrentar desafíos matemáticos y prácticos en diversas áreas científicas y tecnológicas.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería y ciencias computacionales.
- 2) Desarrollar habilidades para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con distintas técnicas.
- 3) Aplicar los conocimientos de ecuaciones diferenciales para la modelización de fenómenos físicos y su simulación mediante técnicas numéricas en herramientas computacionales.

Clase 13: Transformada de Laplace II

La transformada de Laplace continúa siendo una herramienta fundamental en el análisis y resolución de ecuaciones diferenciales, especialmente cuando se trabaja con sistemas dinámicos complejos en ingeniería y computación. En esta segunda parte del estudio, se profundiza en aspectos avanzados de la transformada, tales como su aplicación a derivadas, integrales, funciones periódicas y la función delta de Dirac, que amplían significativamente su utilidad práctica.

El análisis de la transformada de derivadas y transformada de integrales permite resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y evaluar sistemas con memoria o retardos, facilitando la modelación de procesos continuos y discretos en simulación computacional y control automático. La capacidad de transformar funciones periódicas mediante la transformada de Laplace posibilita el estudio de señales repetitivas, esenciales en el procesamiento digital y en sistemas de comunicación.

Finalmente, la inclusión de la función delta de Dirac en este análisis habilita la modelación de impulsos ideales o eventos súbitos, representando, por ejemplo, entradas de choque en sistemas físicos o señales de disparo en circuitos electrónicos. En conjunto, estos conceptos conforman un conjunto robusto de herramientas matemáticas que fortalecen el desarrollo de algoritmos y soluciones computacionales para problemas reales en ingeniería, física y ciencias de la computación.

13.1. Transformada de derivadas

La transformada de derivadas es una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, ya que permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, simplificando su resolución en el dominio de la frecuencia. Para una función $(f(t))$ con transformada de Laplace $(F(s) = \mathcal{L}f(t))$, la transformada de su derivada se define como:

$$[\mathcal{L}f'(t) = sF(s) - f(0^-),][\mathcal{L}f''(t) = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-),]$$

$$[\mathcal{L}f^{(n)}(t) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-).]$$

Esta propiedad es fundamental en aplicaciones computacionales, ya que transforma ecuaciones diferenciales de orden superior en polinomios en (s) , que son más fáciles de manipular. En el análisis de sistemas dinámicos, como circuitos eléctricos o sistemas mecánicos, esta propiedad permite resolver ecuaciones con condiciones iniciales no nulas. Por ejemplo, en un circuito RLC, la ecuación diferencial $\left(L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = v(t)\right)$ se transforma en:

$$\left[L(s^2I(s) - si(0^-) - i'(0^-)) + R(sI(s) - i(0^-)) + \frac{1}{C}I(s) = V(s),\right]$$

donde $(I(s))$ y $(V(s))$ son las transformadas de la corriente $(i(t))$ y el voltaje $(v(t))$. En computación, herramientas como MATLAB o Python (con SciPy) resuelven estas ecuaciones algebraicas, permitiendo analizar la respuesta del sistema sin integrar directamente en el dominio del tiempo.

En aplicaciones prácticas, la transformada de derivadas se usa en control automático para diseñar controladores PID, donde las condiciones iniciales modelan estados iniciales de un sistema, como la posición inicial de un motor. En procesamiento de señales, esta propiedad facilita el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), implementados en bibliotecas como SciPy.signal para filtrado digital.

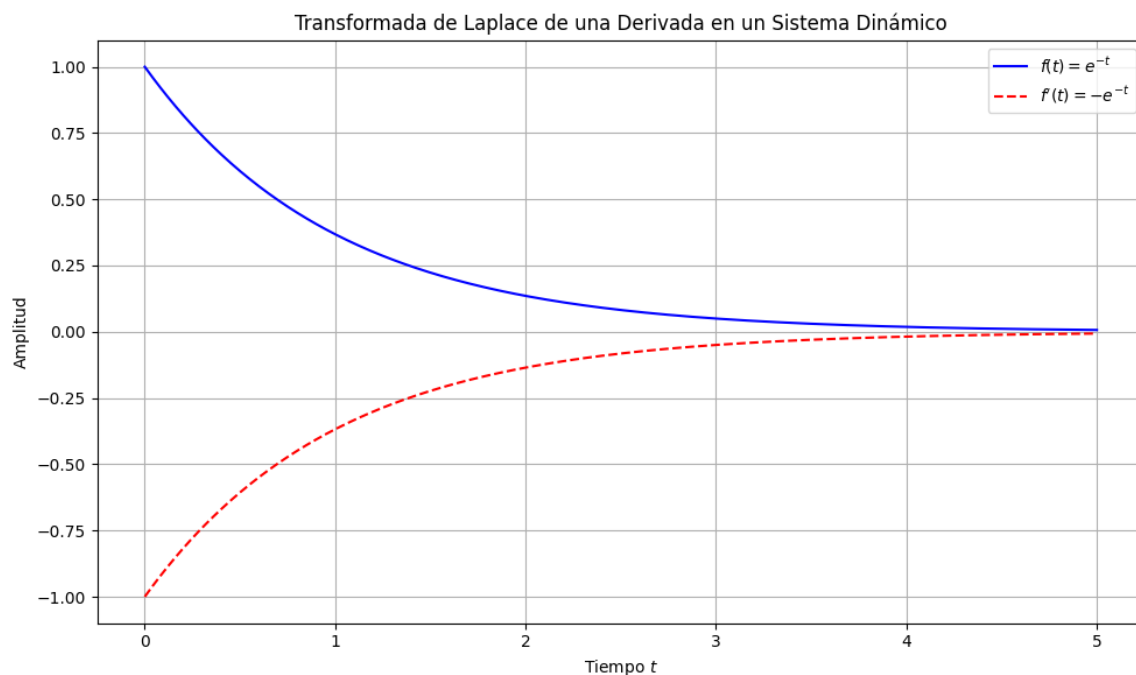


Gráfico 1: Representación de la transformada de Laplace de una derivada en un sistema dinámico. Creación propia.

En simulaciones computacionales, la transformada de derivadas es clave para modelar transitorios en sistemas físicos, como la respuesta de un resorte a una fuerza inicial. En machine learning, se usa en redes neuronales diferenciales para modelar dinámicas temporales, resueltas mediante solvers ODE en frameworks como TensorFlow.

En resumen, la transformada de derivadas simplifica el análisis de ecuaciones diferenciales, con aplicaciones en simulación computacional, control y procesamiento de señales.

13.1.1. Transformada de integrales

La *transformada de integrales* es otra propiedad fundamental de la transformada de Laplace, que convierte integrales en el dominio del tiempo en operaciones simples en el dominio de la frecuencia. Para una función $(f(t))$ con transformada $(F(s))$, la transformada de su integral es:

$$\left[\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s} \right]$$

Esta propiedad es especialmente útil para modelar sistemas con acumulación, como acumuladores en circuitos eléctricos, sistemas de control o procesos físicos con

memoria. Por ejemplo, en un circuito con un capacitor, la carga acumulada $(q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau)$ tiene transformada $(\mathcal{L}q(t) = \frac{I(s)}{s})$, donde $(I(s) = \mathcal{L}i(t))$. Esto permite analizar la acumulación de carga sin resolver la integral directamente.

En aplicaciones computacionales, la transformada de integrales se usa en simulaciones de sistemas con memoria, como en la modelación de baterías en sistemas de energía renovable. En Python, bibliotecas como SciPy.integrate aprovechan esta propiedad para resolver ecuaciones integrales derivadas de ecuaciones diferenciales, optimizando el análisis de sistemas dinámicos.

En control automático, esta propiedad modela sistemas integrales, como en controladores PI (Proporcional-Integral), donde la integral acumula el error para eliminar el error en estado estable. En MATLAB, Simulink implementa estas dinámicas para diseñar sistemas de control robustos.

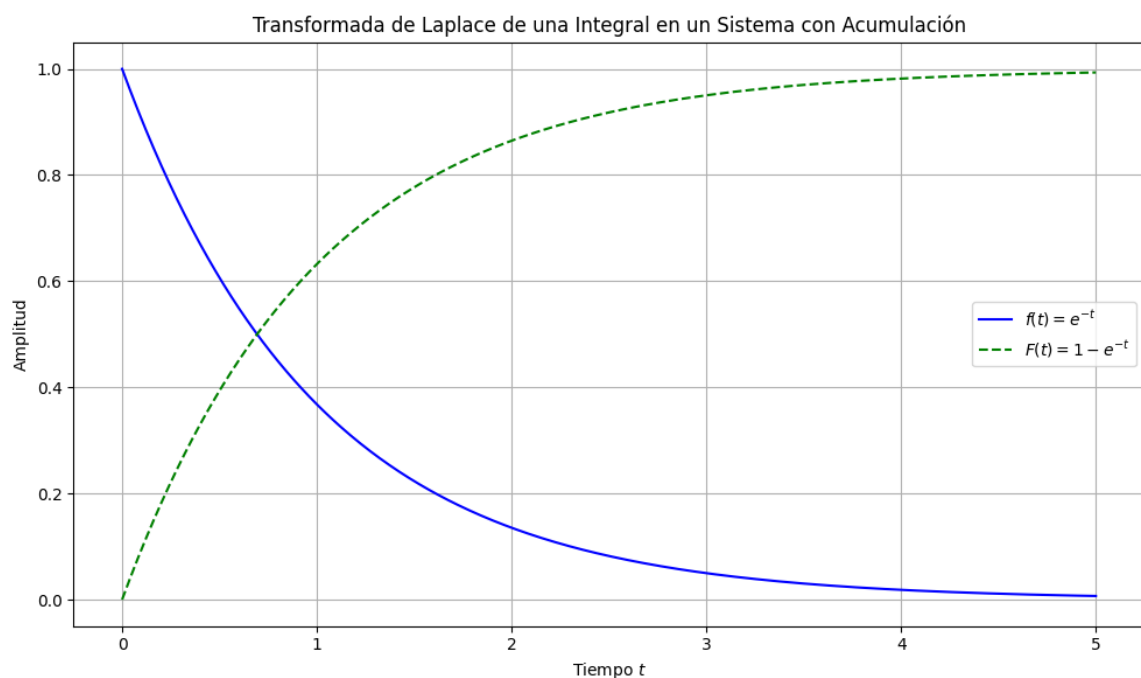


Gráfico 2: Ilustración de la transformada de Laplace de una integral en un sistema con acumulación. Creación propia.

En dinámica de fluidos computacional (CFD), la transformada de integrales modela la acumulación de flujo en tuberías, resuelta numéricamente en software como COMSOL. En bioinformática, se usa para modelar procesos acumulativos, como la acumulación de metabolitos en simulaciones metabólicas.

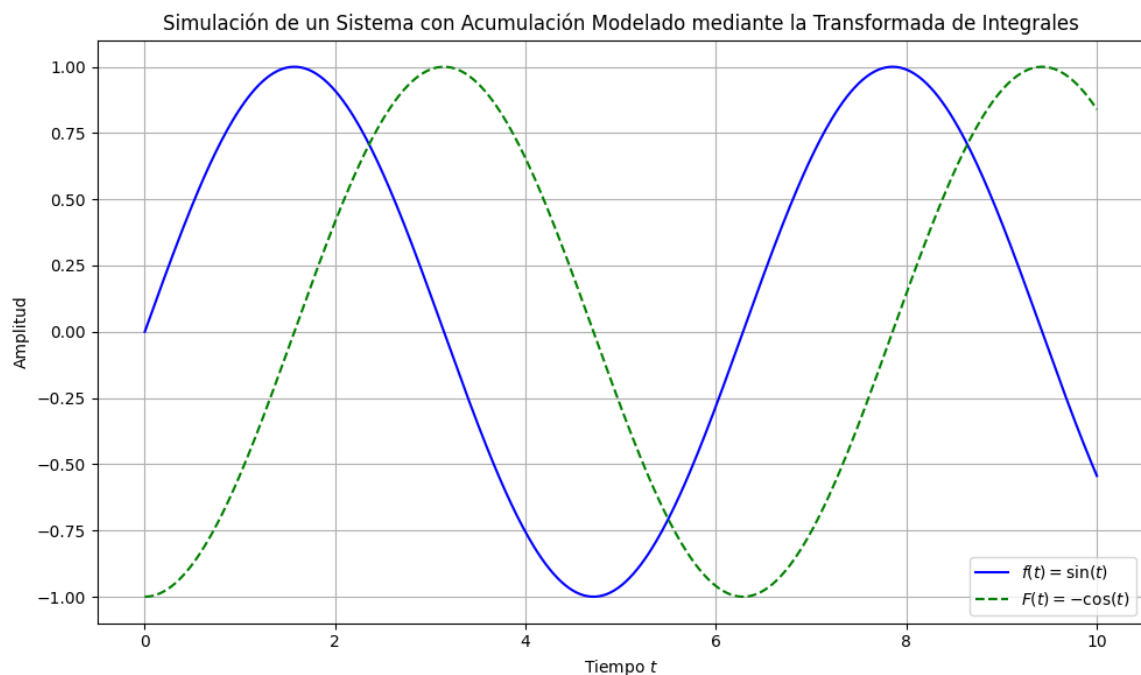


Gráfico 3: Simulación de un sistema con acumulación modelado mediante la transformada de integrales. Creación propia.

La transformada de integrales también es útil en machine learning para modelar procesos con dependencia temporal, como en redes neuronales recurrentes (RNN) continuas, donde la integral representa estados acumulados.

En conclusión, la transformada de integrales simplifica el análisis de sistemas con acumulación, con aplicaciones en simulación computacional, control y modelado de procesos físicos.

Enlace 1:

<https://www.youtube.com/watch?v=lhZYos3IL1E&list=PLhSp9OSVmeyKVpGhYpSMkSkbohXDMrrHO>

Este video explica los fundamentos del análisis numérico, incluyendo el análisis de errores y la estabilidad de métodos como Euler y Runge-Kutta. Ver en YouTube: Introducción al Análisis Numérico

Descripción del enlace: Este recurso visual ofrece una explicación clara y práctica de cómo los errores locales y globales afectan la precisión de los métodos numéricos en computación.

13.1.2. Transformada de funciones periódicas

La transformada de Laplace de *funciones periódicas* es una herramienta poderosa para analizar señales que se repiten en el tiempo, como ondas sinusoidales o cuadradas, comunes en procesamiento de señales, telecomunicaciones y sistemas de control. Para una función $(f(t))$ periódica con período (T) , es decir, $(f(t + T) = f(t))$, la transformada de Laplace se expresa como:

$$\left[\mathcal{L}f(t) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}, \right]$$

donde la integral se evalúa sobre un solo período. Esta fórmula surge porque la función periódica puede representarse como una suma infinita de copias desplazadas, y la transformada de Laplace suma estas contribuciones como una serie geométrica.

Por ejemplo, para una onda cuadrada con período (T) , definida como $(f(t) = 1)$ para $(0 \leq t < T/2)$ y $(f(t) = 0)$ para $(T/2 \leq t < T)$, la transformada es:

$$\left[\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{s(1 - e^{-sT})} \int_0^{T/2} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-sT/2}}{s(1 - e^{-sT})}. \right]$$

En aplicaciones computacionales, esta propiedad es crucial en el análisis de señales periódicas, como en sistemas de comunicación donde se modulan ondas cuadradas o sinusoidales. En Python, bibliotecas como SciPy.signal implementan esta transformada para diseñar filtros que procesan señales periódicas, como en audio o telecomunicaciones.

En control automático, la transformada de funciones periódicas modela entradas cíclicas, como referencias sinusoidales en sistemas de seguimiento. En MATLAB, la transformada se usa para analizar la respuesta en frecuencia de sistemas LTI a entradas periódicas.

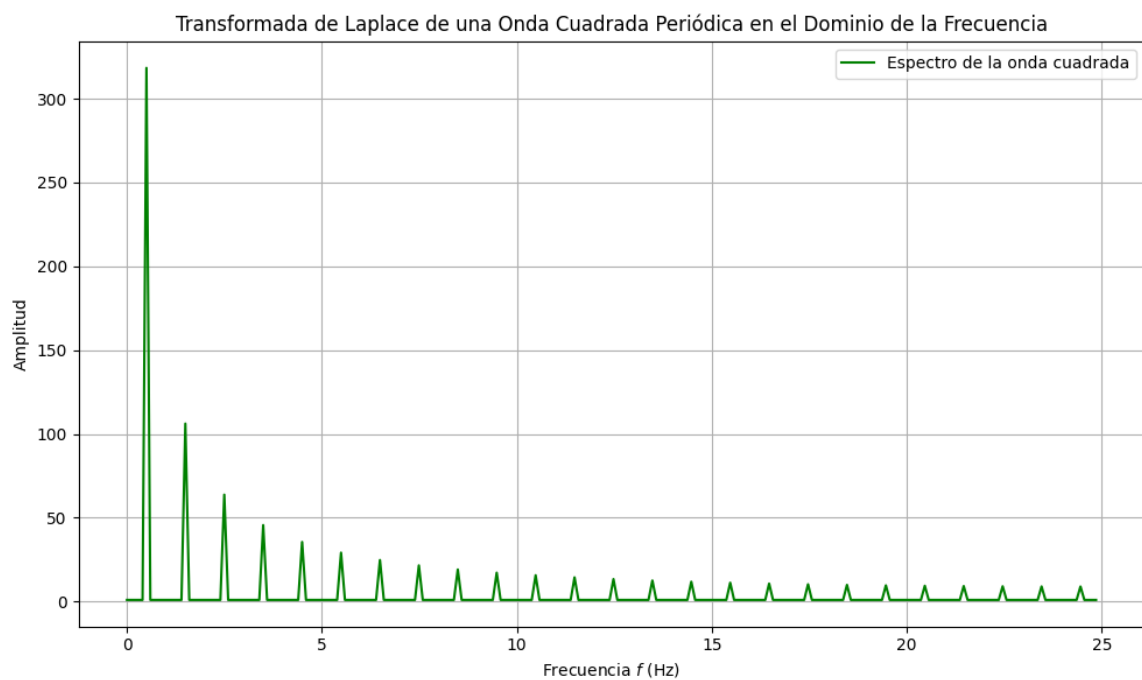
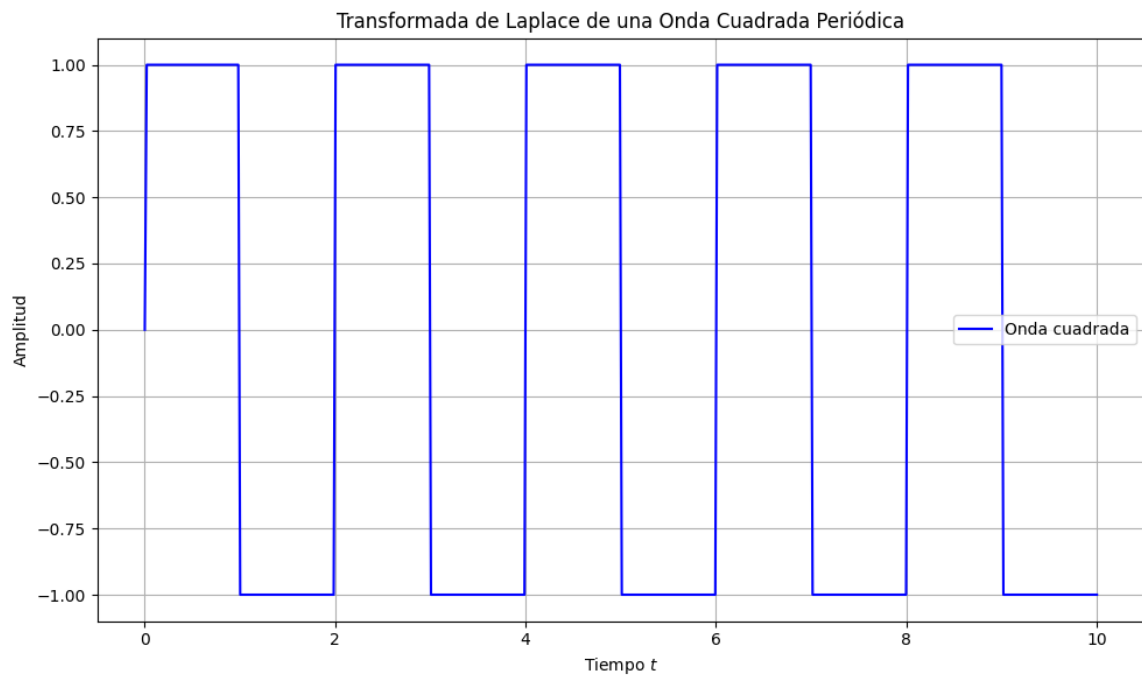


Gráfico 4: Transformada de Laplace de una onda cuadrada periódica en el dominio de la frecuencia. Creación propia.

En simulaciones computacionales, esta propiedad facilita el análisis de vibraciones periódicas en sistemas mecánicos, como en motores o turbinas, resueltas numéricamente en software como ANSYS. En machine learning, las funciones periódicas modelan patrones temporales, como en series temporales cíclicas, analizadas mediante solvers ODE en TensorFlow.

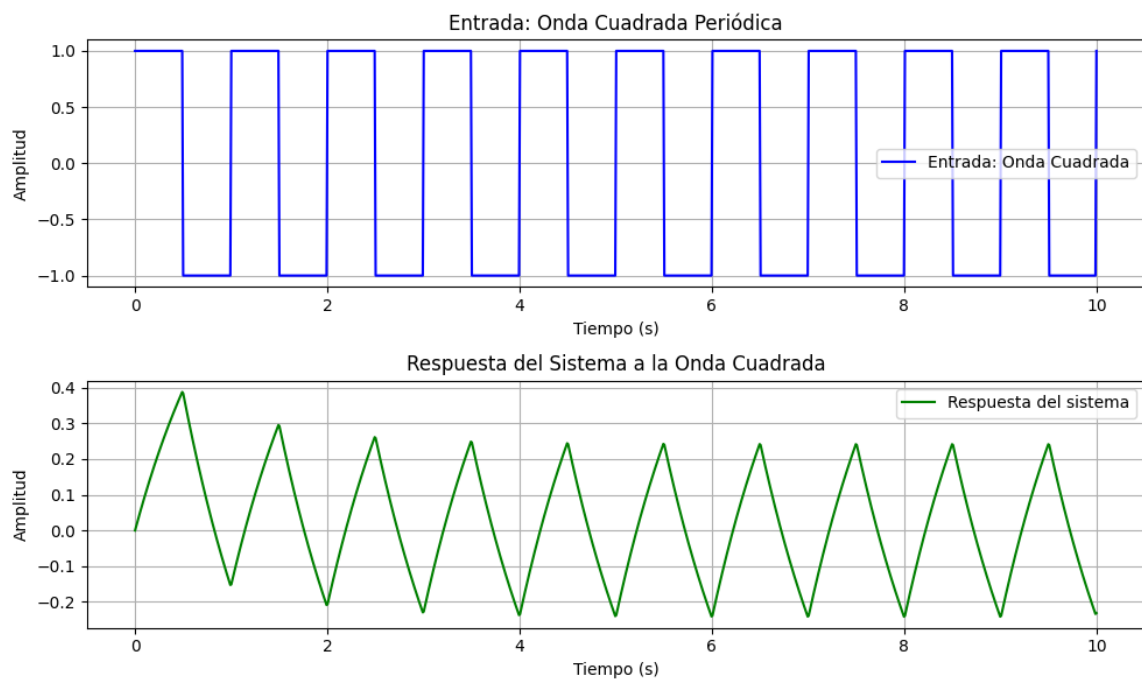


Gráfico 5: Respuesta de un sistema a una entrada periódica modelada con la transformada de Laplace. Creación propia.

La transformada de funciones periódicas es una herramienta crucial para analizar sistemas que exhiben comportamientos cíclicos o repetitivos en el tiempo. Esta técnica se utiliza para convertir funciones periódicas, como las señales sinusoidales, en un dominio más manejable, generalmente en el dominio de la frecuencia. Esto permite estudiar la composición espectral de la señal y facilita la resolución de problemas que involucran ciclos repetitivos en diversos campos.

En procesamiento de señales, la transformada de funciones periódicas es fundamental para el análisis de señales de frecuencia constante, como las ondas portadoras en sistemas de comunicación o las señales moduladas. En el diseño de filtros digitales, por ejemplo, la capacidad de analizar cómo una señal periódica es modificada por un filtro permite optimizar sistemas de transmisión y mejorar la calidad de las señales en aplicaciones como audio, video o telecomunicaciones.

En control automático, la transformada de funciones periódicas se aplica para modelar la respuesta de sistemas que están sujetos a entradas cíclicas u oscilantes. Esta herramienta ayuda a entender cómo los sistemas responden a señales periódicas y a diseñar controladores que optimicen el rendimiento del sistema ante tales entradas. En simulaciones computacionales, la capacidad de modelar y simular señales periódicas es

crucial en el análisis de sistemas dinámicos con comportamiento recurrente, como las oscilaciones en sistemas mecánicos, electrónicos o térmicos.

13.1.3. Función delta de Dirac

La función delta de Dirac, denotada $(\delta(t))$, es una distribución matemática que modela un impulso instantáneo en $(t = 0)$, con la propiedad $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t), dt = f(0)\right)$ para cualquier función continua $(f(t))$. Su transformada de Laplace es:

$$[\mathcal{L}\delta(t) = 1.]$$

Para un impulso desplazado, $(\delta(t - a))$, con $(a \geq 0)$, la transformada es:

$$[\mathcal{L}\delta(t - a) = e^{-as}.]$$

Esta propiedad es fundamental en el análisis de sistemas con entradas impulsivas, como en circuitos eléctricos donde un impulso modela un cambio súbito de voltaje. En un circuito RC, la respuesta a un impulso $(\delta(t))$ se obtiene transformando la ecuación diferencial $\left(RC \frac{dv_c}{dt} + v_c = \delta(t)\right)$, dando $\left(V_c(s) = \frac{1}{RCs+1}\right)$, cuya inversa describe la respuesta impulsiva del sistema.

En aplicaciones computacionales, la función delta de Dirac desempeña un papel crucial en el procesamiento de señales, donde se utiliza para modelar eventos discretos o impulsos ideales en diversas representaciones de datos. Por ejemplo, en audio digital, la función delta puede representar eventos puntuales como clics o saltos en la señal, que son esenciales para la detección de cambios repentinos en la entrada de audio. En el contexto de procesamiento de imágenes, la delta se emplea para modelar picos de intensidad o discontinuidades en la imagen, tales como bordes o puntos de interés. Estos eventos se capturan con precisión utilizando herramientas computacionales.

En Python, la biblioteca SciPy.signal permite simular la respuesta impulsiva de sistemas, que es una aplicación directa de la función delta de Dirac. La simulación de respuestas impulsivas es esencial para el diseño de filtros digitales. Estos filtros son fundamentales en la eliminación de ruido o en la mejora de la calidad de la señal en áreas como telecomunicaciones y procesamiento de audio. Al aplicar un impulso unitario (la función delta) al sistema, es posible obtener la respuesta temporal del

sistema, lo que ayuda a caracterizar su comportamiento y a diseñar filtros adecuados para diversas aplicaciones.

En control automático, la respuesta impulsiva de un sistema es un parámetro clave para analizar su estabilidad y comportamiento frente a perturbaciones. Esta respuesta se obtiene aplicando un impulso al sistema y observando cómo responde a lo largo del tiempo. Herramientas como MATLAB se utilizan para generar diagramas de Bode, que permiten visualizar la respuesta en frecuencia del sistema y evaluar su estabilidad. Estos diagramas son cruciales para el diseño y ajuste de sistemas de control, garantizando que el sistema sea estable y responda adecuadamente a las señales de entrada.

La función delta de Dirac se ha consolidado como una herramienta esencial en diversas ramas de la computación aplicada, desde procesamiento de señales hasta control automático. Su capacidad para modelar eventos discretos e impulsos instantáneos permite a los ingenieros y científicos simular y analizar sistemas dinámicos con precisión. En procesamiento de señales, se utiliza para modelar y manipular eventos repentinos en señales de audio e imágenes, mientras que, en control automático, facilita la evaluación de la estabilidad de los sistemas mediante su respuesta impulsiva. El uso de herramientas como SciPy en Python y MATLAB en ingeniería subraya la importancia de la función delta como un puente entre la teoría matemática y sus aplicaciones prácticas.

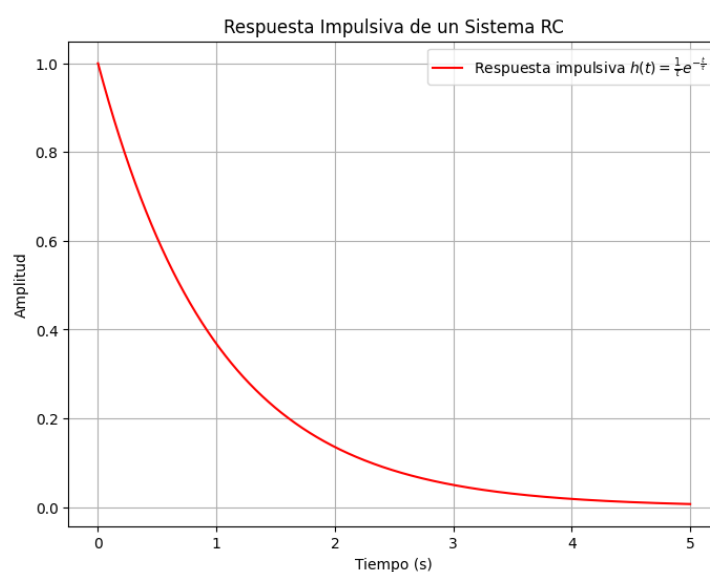


Gráfico 6: Respuesta impulsiva de un sistema RC modelada con la función delta de Dirac. Creación propia.



En el campo de la dinámica de fluidos computacional, la función delta de Dirac se utiliza para modelar perturbaciones puntuales en el flujo, tales como inyecciones de fluido o fuerzas concentradas en puntos específicos del dominio. Esta aproximación es crucial para resolver problemas como la introducción de un jet de fluido en un canal o la simulación de impactos en sistemas hidráulicos. En herramientas avanzadas como COMSOL, la función delta permite representar de manera eficiente y precisa estos eventos discretos sin la necesidad de una resolución completa en toda la malla, lo que optimiza el tiempo computacional y mejora la precisión en la simulación de fenómenos dinámicos complejos.

En el ámbito del aprendizaje automático, la función delta se utiliza en modelos que representan eventos discretos o cambios repentinos en sistemas dinámicos, como en las redes neuronales de espigas (Spiking Neural Networks, SNNs). Estas redes, que simulan la actividad de neuronas biológicas, dependen de impulsos puntuales o spikes para transmitir información. La función delta modela estos impulsos ideales, lo que permite la simulación y entrenamiento de redes neuronales que emulan de manera más precisa el comportamiento del cerebro humano. Frameworks como PyTorch permiten la implementación de estos modelos, utilizando la función delta para representar la activación neuronal instantánea y facilitar el análisis de redes neuronales que se comportan de manera más esporádica y dinámica.

La función delta de Dirac es una herramienta fundamental tanto en la simulación de fenómenos físicos como en el análisis de redes neuronales avanzadas, donde se requieren representaciones de eventos instantáneos o impulsivos. En dinámica de fluidos, su uso optimiza la resolución de sistemas complejos, mientras que en machine learning, ofrece una representación matemática precisa para eventos discretos que modelan el comportamiento dinámico de redes neuronales biológicamente inspiradas. Así, su aplicación en estos campos resalta la flexibilidad y relevancia de la función delta en la simulación y modelado de sistemas computacionales avanzados.

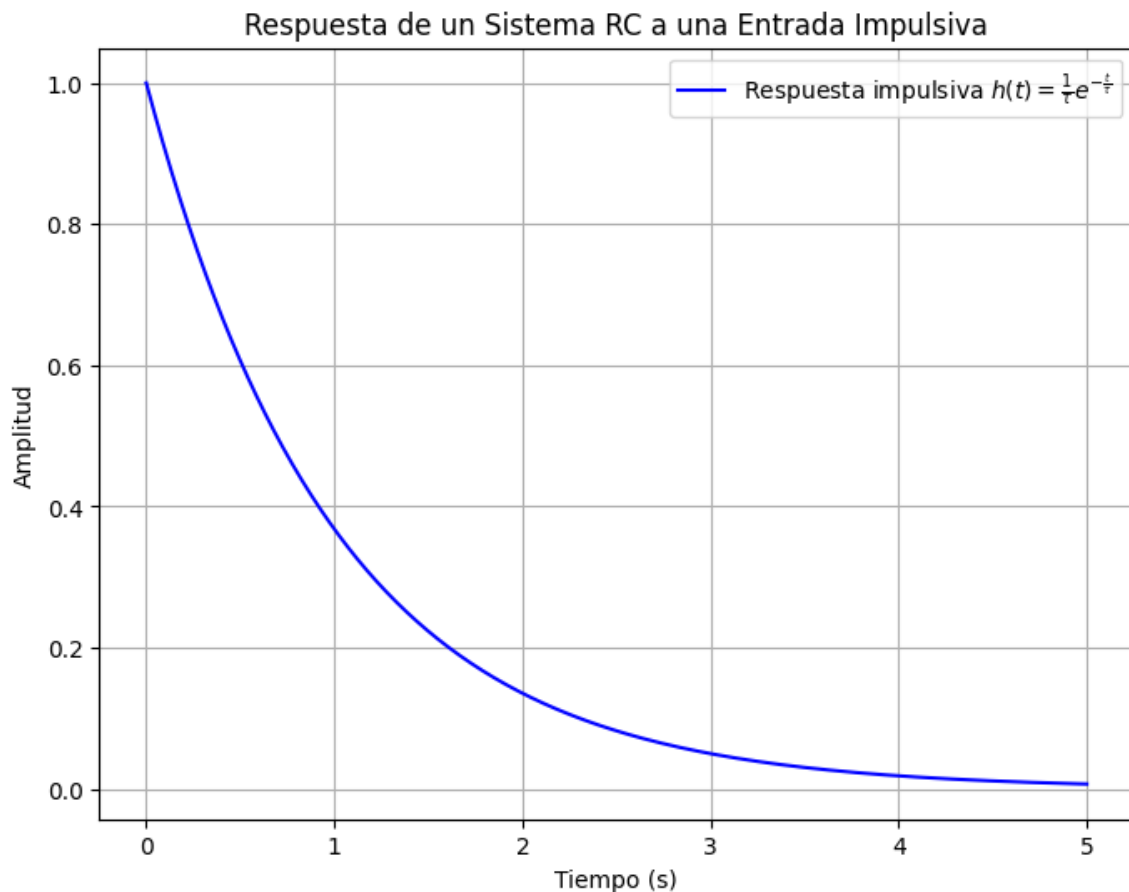


Gráfico 7: Simulación de un sistema con entrada impulsiva usando la transformada de la función delta. Creación propia.

En resumen, la función delta de Dirac y su transformada son esenciales para modelar eventos instantáneos, con aplicaciones en simulación computacional, control y análisis de señales.

La función delta de Dirac y su transformada constituyen herramientas matemáticas esenciales para la representación y análisis de eventos instantáneos o impulsos ideales en sistemas dinámicos. En simulación computacional, permiten modelar fenómenos que ocurren en tiempos muy breves, pero con efectos significativos, como impactos mecánicos, señales de disparo en circuitos electrónicos o eventos súbitos en sistemas físicos.

En el ámbito del control automático, la función delta se utiliza para estudiar la respuesta de sistemas ante entradas instantáneas, facilitando el diseño y ajuste de controladores que deben reaccionar rápidamente a perturbaciones repentinas. Asimismo, en el análisis de señales, la transformada de Laplace aplicada a la función delta facilita la

interpretación y procesamiento de señales de impulso, contribuyendo a técnicas avanzadas de filtrado y modulación.

Por tanto, la función delta de Dirac y su tratamiento mediante la transformada de Laplace son fundamentales para la modelación precisa y eficiente de sistemas reales, integrando conceptos matemáticos con aplicaciones prácticas en computación, ingeniería y ciencias aplicadas.

Enlace 2:

<https://www.youtube.com/watch?v=NyKTcYtoWNs&pp=ygVqbcOpdG9kb3MgbnVt w6lyaWNvcyBwYXJhIGVjdWFjaW9uZXMGZGlmZXJlbnNpYWxlcwY29uIGV qZW1wbG9zIHByw6FjdGljb3MgZW4gc2ltWxhY2lvbmVzIGNvbXB1dGFjaW9u YWxlcw%3D%3D>

Este video profundiza en la estabilidad de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, con ejemplos prácticos en simulaciones computacionales. Ver en YouTube: Estabilidad en Métodos Numéricos

Descripción del enlace: Este recurso es ideal para entender cómo la estabilidad afecta el diseño de algoritmos en problemas complejos de ingeniería y computación. Enlace destacado.

Definición de los términos citados en la clase 13

- **Transformada de derivadas:** Propiedad de la transformada de Laplace que convierte la derivada de una función ($f(t)$) en ($sF(s) - f(0^-)$) (para la primera derivada), simplificando la resolución de ecuaciones diferenciales en el dominio de la frecuencia.
- **Función delta de Dirac:** Una distribución que modela un impulso instantáneo, con transformada de Laplace igual a 1, utilizada para analizar respuestas impulsivas en sistemas dinámicos.

Referencias

- Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). Wiley.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2015). *Numerical Analysis* (10th ed.). Cengage Learning.
- Stoer, J., & Bulirsch, R. (2013). *Introduction to Numerical Analysis* (3rd ed.). Springer.
- Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM.
- Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2010). *Numerical Mathematics* (2nd ed.). Springer.

Recursos de Profundización

1. Simulación de Errores por Series

Descripción del enlace: Este simulador en **Colab** permite explorar cómo los **errores de truncamiento** afectan el cálculo de **sumas de series** y **aproximaciones de funciones**. Puedes ajustar el número de términos en la serie y ver cómo varía el error de truncamiento conforme añades más o menos términos a la aproximación.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://colab.research.google.com/drive/1SdUwk57WMCYJ8bKBX4T6MQvz65qVrOBT?usp=sharing>

2. Simulación Error en Geogebra

Descripción del enlace: Este recurso interactivo en **GeoGebra** te permite observar el **error de truncamiento** al aproximar integrales usando métodos numéricos como la regla del trapecio o Simpson. Puedes variar el número de intervalos y ver cómo se ajusta la solución y cómo el error disminuye o crece según el número de divisiones.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/bpkw9pff>

3. Comparación de Errores en Métodos Numéricos

Descripción del enlace: Este simulador en **Wolfram Alpha** te permite calcular el **error de truncamiento** cuando se utiliza un **método numérico** para aproximar una solución. Puedes observar cómo el error cambia dependiendo del número de pasos o términos utilizados en la aproximación.

Autor: Carlos Julio Mayorga Arias

Enlace:

<https://colab.research.google.com/drive/1CvsPwL5Z1R2rVDeK6wwltZ0c-kDyFwHa?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

