

Ecuaciones Diferenciales

Sistemas de Ecuaciones
Diferenciales I

Clase 14



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Los sistemas de ecuaciones diferenciales representan un paso crucial en el estudio avanzado de ecuaciones diferenciales, ya que permiten modelar y analizar fenómenos que involucran múltiples variables dependientes que interactúan simultáneamente. Estos sistemas son fundamentales en el análisis de sistemas dinámicos en los que intervienen más de una función desconocida, lo cual es común en disciplinas como la ingeniería de sistemas, la biología matemática, la física y la economía. En este contexto, los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales se presentan como uno de los casos más sencillos y estructurados de resolver, donde las soluciones se pueden obtener mediante métodos analíticos directos, como el de matrices y valores propios. La comprensión de su clasificación y la estructura subyacente es esencial para abordar de manera eficiente los diferentes tipos de problemas que surgen, permitiendo una resolución clara y sistemática de sistemas que, en su forma original, pueden parecer complejos.

Por otro lado, los sistemas lineales no homogéneos añaden un nivel de complejidad adicional, ya que incluyen términos independientes o fuentes externas que alteran el comportamiento del sistema, lo que requiere el uso de técnicas especializadas para encontrar soluciones particulares. El análisis de estos sistemas no solo se limita a los métodos algebraicos tradicionales, sino que también se beneficia de herramientas más avanzadas, como el **método de operadores**, que proporciona una forma estructurada de abordar ecuaciones diferenciales que involucran derivadas de orden superior. Este enfoque es fundamental en la resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes variables o en problemas donde los métodos tradicionales pueden resultar ineficaces. La integración de estos métodos dentro del marco de los sistemas de ecuaciones diferenciales abre nuevas perspectivas tanto en la teoría como en la práctica, permitiendo modelar de manera más precisa fenómenos multivariantes y dinámicos complejos, y consolidando un dominio profundo y avanzado en el análisis de sistemas interdependientes.

Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase.

- 1) Comprender los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería y ciencias computacionales.
- 2) Desarrollar habilidades para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con distintas técnicas.
- 3) Aplicar los conocimientos de ecuaciones diferenciales para la modelización de fenómenos físicos y su simulación mediante técnicas numéricas en herramientas computacionales.

Clase 14: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales I

Los **sistemas de ecuaciones diferenciales** representan un conjunto de ecuaciones en las que se involucran varias funciones desconocidas y sus derivadas. Estos sistemas son cruciales en el modelado de fenómenos multidimensionales donde diversas variables interactúan, tales como los sistemas físicos, biológicos, económicos, y en simulaciones computacionales complejas. Los sistemas pueden clasificarse de diversas maneras según su estructura, y en esta clase nos enfocaremos en la definición y clasificación de los sistemas, abarcando casos lineales homogéneos y no homogéneos, así como el método de operadores.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según la linealidad de las ecuaciones involucradas y su homogeneidad o no homogeneidad. Un sistema es lineal si las funciones desconocidas y sus derivadas aparecen de manera lineal, es decir, sin productos ni potencias de las funciones o sus derivadas. Además, se puede clasificar en homogéneo si no contiene términos independientes (es decir, sin fuentes externas o forzadas), o no homogéneo si incluye términos que dependen explícitamente de variables independientes (como el tiempo).

Los sistemas lineales homogéneos son de especial relevancia en la computación debido a su capacidad para ser resueltos mediante técnicas algebraicas, como la diagonalización de matrices o el cálculo de valores y vectores propios. Estos sistemas pueden describir fenómenos como la oscilación de circuitos eléctricos o el comportamiento de redes neuronales en su estado de equilibrio. La estructura de estos sistemas permite encontrar soluciones generalizadas y estudiar su estabilidad y respuestas ante pequeñas perturbaciones, lo que es esencial en simulaciones dinámicas.

En sistemas lineales no homogéneos, la aparición de términos independientes o forzantes introduce un grado de complejidad adicional. Estos sistemas modelan situaciones en las que existe alguna influencia externa, como fuerzas externas aplicadas a un sistema físico o entradas en un sistema de control. El análisis y la resolución de estos sistemas es un campo esencial en ingeniería computacional y procesamiento de señales, donde se aplican métodos de variación de parámetros o funciones generadoras para encontrar soluciones aproximadas. Las técnicas numéricas, como la transformada de Laplace o el método de Runge-Kutta, son comúnmente utilizadas para obtener soluciones prácticas en estos casos.

El método de operadores ofrece una técnica poderosa y eficiente para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tanto homogéneos como no homogéneos. Este enfoque transforma las ecuaciones diferenciales en operaciones algebraicas, donde un operador diferencial actúa sobre la función desconocida. En este contexto, se utilizan operadores diferenciales para modelar la evolución temporal de un sistema. Este método es esencial para la resolución de sistemas en simulaciones computacionales, donde el tiempo y el comportamiento dinámico deben ser resueltos de manera eficiente. Además, su integración con herramientas como MATLAB o Python permite la automatización de la resolución de ecuaciones diferenciales en modelos multidimensionales.

14.1. Definición y clasificación

Un *sistema de ecuaciones diferenciales* es un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución conjunta de múltiples variables dependientes, típicamente interrelacionadas, en función de una variable independiente, como el tiempo (t). Formalmente, un sistema de (n) ecuaciones de primer orden se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{bmatrix}$$

donde $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ son las variables dependientes y (f_i) son funciones que describen las dinámicas del sistema. Estos sistemas modelan fenómenos complejos en

física, biología, ingeniería y computación, como circuitos eléctricos acoplados, sistemas predator-presa o redes neuronales.

Los sistemas se clasifican según varios criterios:

1. **Linealidad:** Un sistema es *lineal* si las funciones (f_i) son combinaciones lineales de las variables (x_i) y sus derivadas, de la forma $\left(\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)\right)$, donde $(x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T)$, $(A(t))$ es una matriz de coeficientes y $(b(t))$ un vector de términos no homogéneos. Si $(b(t) = 0)$, el sistema es *homogéneo*; de lo contrario, es *no homogéneo*. Los sistemas no lineales incluyen términos como productos o potencias de las variables.
2. **Orden:** El orden del sistema está determinado por la derivada de mayor orden presente. La mayoría de los sistemas se convierten en sistemas de primer orden mediante variables auxiliares, lo que simplifica su resolución numérica.
3. **Coefficientes:** Los sistemas con coeficientes constantes $((A(t) = A))$ son más fáciles de resolver analíticamente, mientras que los coeficientes variables $((A(t)))$ requieren métodos numéricos o especializados.

En aplicaciones computacionales, los sistemas de ecuaciones diferenciales se resuelven numéricamente usando métodos como Euler, Runge-Kutta o Adams-Bashforth, implementados en Python con bibliotecas como SciPy.integrate. Por ejemplo, en simulaciones de dinámica de fluidos computacional (CFD), los sistemas modelan flujos acoplados, resueltos en software como COMSOL. En machine learning, los sistemas de ecuaciones diferenciales describen dinámicas continuas en redes neuronales diferenciales, integradas en frameworks como TensorFlow.

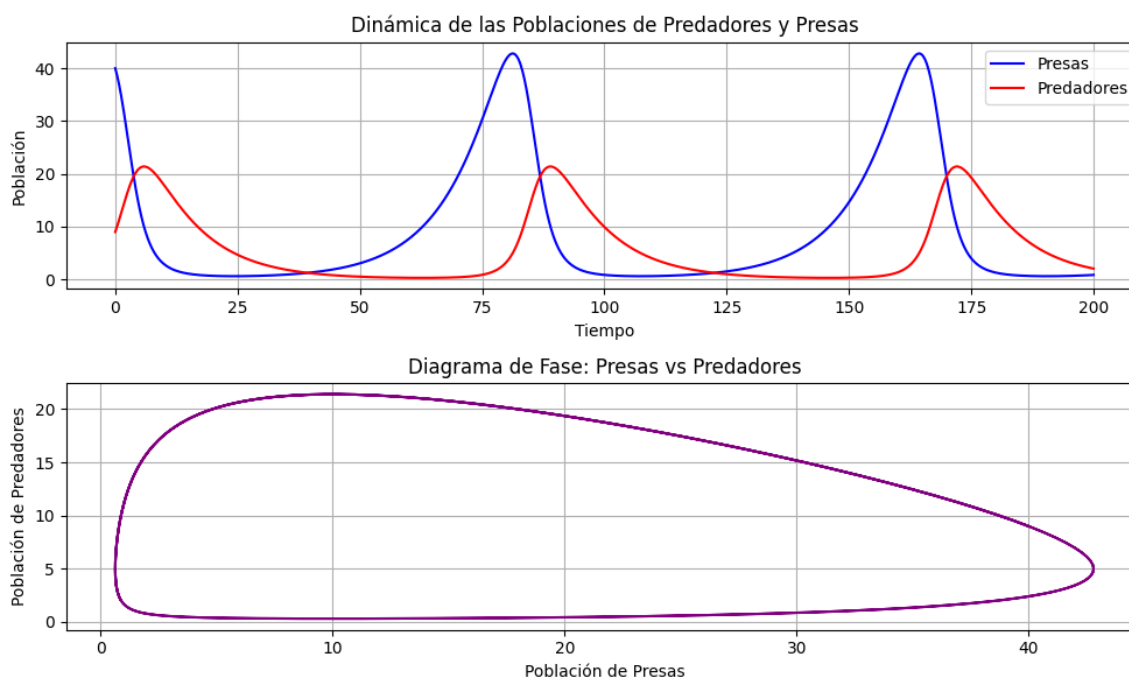


Gráfico 1: Representación esquemática de un sistema de ecuaciones diferenciales para un modelo predator-presa. Creación propia.

En resumen, los sistemas de ecuaciones diferenciales son fundamentales para modelar interacciones complejas, con aplicaciones en simulación computacional, control y análisis de datos.

Enlace 1:

https://www.youtube.com/watch?v=Hn_y1KKSUBI&pp=ygUdc2lzdGVtYXNMgZGluw6FtaWNvcyBlbiBQeXRRob24%3D

Este video ofrece un tutorial práctico sobre cómo implementar simulaciones de sistemas dinámicos en Python usando Jupyter Notebooks. Ver en YouTube: Simulación de Sistemas Dinámicos en Python

Descripción del enlace: Este recurso visual explica paso a paso cómo programar y visualizar un modelo dinámico, ideal para principiantes en simulación computacional.

14.1.1. Sistemas lineales homogéneos

Los *sistemas lineales homogéneos* tienen la forma $\left(\frac{dx}{dt} = Ax\right)$, donde (A) es una matriz $(n \times n)$ de coeficientes constantes y $(x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T)$ es el vector de variables. La solución general se basa en los valores y vectores propios de (A) .

Para resolver el sistema, se asume una solución de la forma $(x(t) = ve^{\lambda t})$, donde (λ) es un valor propio y (v) un vector propio asociado. Sustituyendo, se obtiene el problema de valores propios $(Av = \lambda v)$. Las soluciones dependen de los valores propios:

- **Valores propios reales distintos:** Si (A) tiene (n) valores propios reales distintos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, con vectores propios $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, la solución general es $(x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t})$.
- **Valores propios repetidos:** Si un valor propio (λ_i) tiene multiplicidad (m) , se incluyen términos como $(t^k v_i e^{\lambda_i t})$ para $(k = 0, 1, \dots, m - 1)$.
- **Valores propios complejos:** Para $(\lambda = \alpha \pm i\beta)$, las soluciones incluyen términos como $(e^{\alpha t} \cos(\beta t))$ y $(e^{\alpha t} \sin(\beta t))$.

En aplicaciones computacionales, los valores propios se calculan usando bibliotecas como NumPy en Python, que implementan algoritmos eficientes como QR. Por ejemplo, en un sistema de dos masas acopladas por resortes, la ecuación $(\frac{d^2 x}{dt^2} = Ax)$ se convierte en un sistema de primer orden, resuelto numéricamente en MATLAB para analizar modos de vibración.

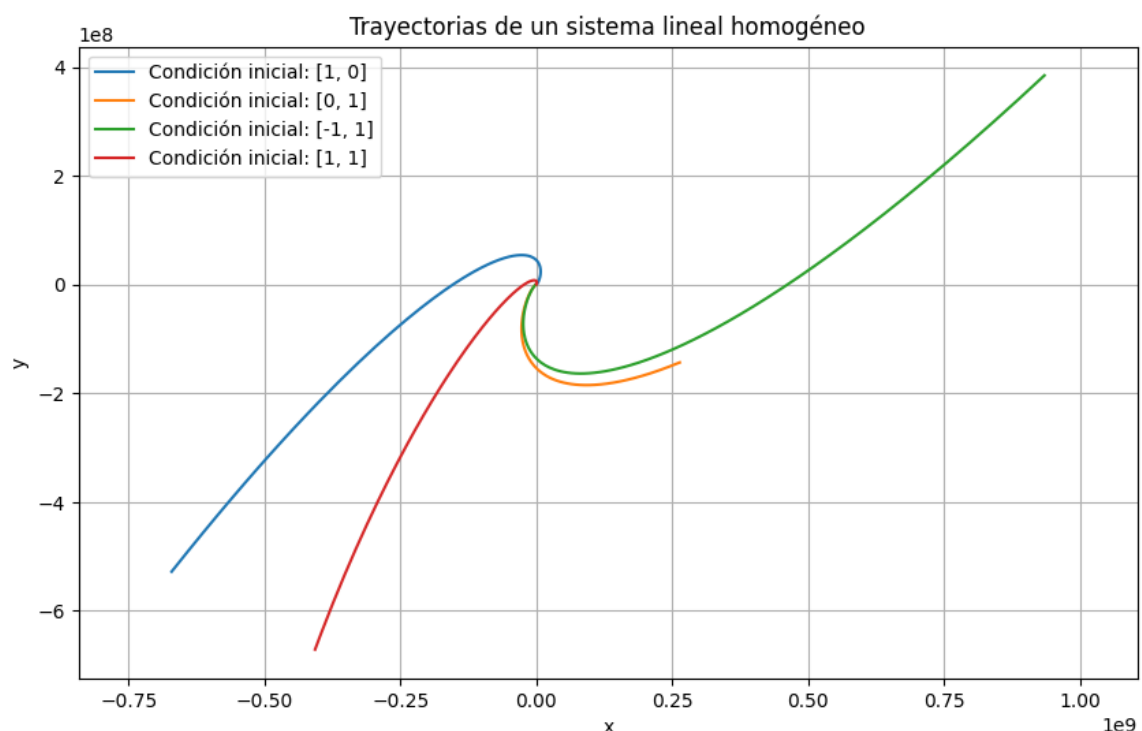


Gráfico 2: Trayectorias de un sistema lineal homogéneo con valores propios reales distintos. Creación propia.

En control automático, estos sistemas modelan la dinámica libre de sistemas, como en vehículos autónomos, donde la estabilidad depende de los valores propios de (A) . En bioinformática, modelan interacciones celulares, resueltas mediante solvers ODE en SciPy.

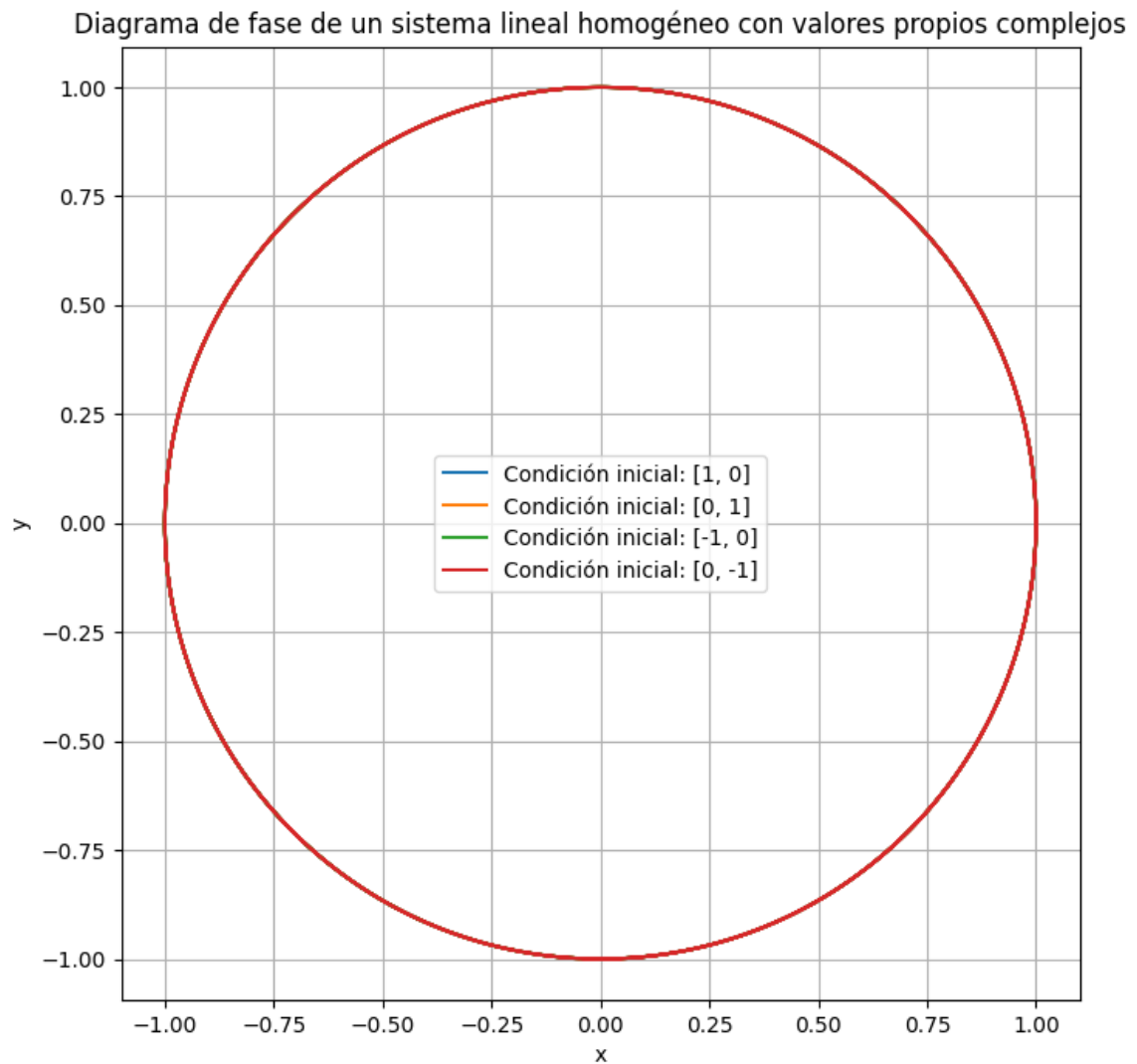


Gráfico 3: Diagrama de fase de un sistema lineal homogéneo con valores propios complejos.

Creación propia.

En resumen, los sistemas lineales homogéneos son fundamentales para analizar dinámicas estables, con aplicaciones en simulación, control y modelado computacional.

14.1.2. Sistemas lineales no homogéneos

Los *sistemas lineales no homogéneos* tienen la forma $\left(\frac{dx}{dt} = Ax + b(t)\right)$, donde $(b(t))$ es un vector de términos no homogéneos que representa entradas externas, como fuerzas o señales de control. La solución general es la suma de la solución homogénea $(x_h(t))$ (obtenida como en el subtema anterior) y una solución particular $(x_p(t))$: $(x(t) = x_h(t) + x_p(t))$.

Los métodos principales para encontrar $(x_p(t))$ son:

1. **Método de variación de parámetros:** Se asume $(x_p(t) = \Phi(t)u(t))$, donde $(\Phi(t))$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo, y se resuelve $\left(\Phi(t)\frac{du}{dt} = b(t)\right)$. Esto requiere integrar $(u(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t), dt)$.
2. **Método de coeficientes indeterminados:** Para $(b(t))$ de forma simple (polinómica, exponencial o sinusoidal), se propone una solución particular basada en la forma de $(b(t))$.

En aplicaciones computacionales, la variación de parámetros es más general y se implementa en solvers como odeint en SciPy, mientras que los coeficientes indeterminados son eficientes para entradas específicas. Por ejemplo, en un sistema de control con una entrada sinusoidal $(b(t) = [\sin(\omega t), 0]^T)$, la solución particular modela la respuesta forzada, simulada en MATLAB para analizar seguimiento de referencias.



Gráfico 4: Respuesta de un sistema no homogéneo a una entrada sinusoidal.

Creación propia.

En robótica, los sistemas no homogéneos modelan trayectorias con fuerzas externas, resueltas en ROS para optimizar movimientos. En procesamiento de señales, describen respuestas a entradas externas, como ruido, analizadas en SciPy.signal.



Gráfico 5: Solución particular de un sistema no homogéneo con entrada polinómica.

Creación propia.

En machine learning, los sistemas no homogéneos modelan dinámicas con perturbaciones externas, resueltas mediante solvers ODE en TensorFlow para redes neuronales continuas.

Los sistemas no homogéneos son fundamentales para modelar sistemas dinámicos que están sujetos a entradas externas o perturbaciones. Estas entradas, que pueden ser impulsos, fuerzas externas o variaciones en los parámetros del sistema, generan una respuesta que depende tanto de las condiciones iniciales como de las influencias externas. En comparación con los sistemas homogéneos, donde las soluciones dependen únicamente de las condiciones iniciales, los sistemas no homogéneos ofrecen una mayor versatilidad para representar fenómenos reales en los que intervienen factores externos.

En simulaciones computacionales, los sistemas no homogéneos permiten modelar una amplia gama de sistemas físicos, como circuitos eléctricos con fuentes de voltaje variables, redes de comunicación afectadas por ruido, o procesos de control que dependen de señales de entrada. Estas simulaciones son esenciales en ingeniería, ya que ayudan a predecir cómo un sistema responderá a diferentes tipos de estímulos, facilitando el diseño de soluciones adaptativas.

Por ejemplo, en control automático, un sistema no homogéneo puede representar un proceso en el que la entrada externa modifica el comportamiento del sistema, como en el caso de un robot que sigue una trayectoria determinada por comandos de entrada. En este caso, el sistema debe adaptarse dinámicamente para mantener el control bajo condiciones cambiantes. Además, en dinámica de fluidos computacional, las ecuaciones no homogéneas permiten simular el efecto de fuerzas externas, como la presión o las variaciones de temperatura en un fluido, lo que es crucial para la predicción de flujos complejos en aplicaciones de ingeniería civil, automotriz y ambiental.

En aprendizaje automático, los sistemas no homogéneos son útiles para modelar dinámicas no lineales en redes neuronales, donde las entradas pueden representar diferentes tipos de datos o condiciones cambiantes, afectando la evolución del aprendizaje. Además, estos sistemas ayudan a optimizar el entrenamiento de modelos mediante la integración de variables externas, como la tasa de aprendizaje o entradas aleatorias, que modifican el comportamiento del modelo a medida que evoluciona.

En resumen, los sistemas no homogéneos ofrecen una herramienta poderosa para modelar fenómenos en los que las entradas externas tienen un impacto significativo en la dinámica del sistema. Su versatilidad en simulaciones computacionales, control y aprendizaje automáticos los convierte en elementos clave para desarrollar soluciones más adaptativas, precisas y eficientes en diversas áreas tecnológicas y científicas.

Enlace 2:

<https://www.youtube.com/watch?v=do-7q84Z5t0&pp=ygUdc2lzdGVtYXNjZGluw6FtaWNvcyBlbiBjb29sYWl%3D>

Este video profundiza en el uso de Google Colab para simulaciones científicas, con ejemplos de visualización de sistemas dinámicos. Ver en YouTube: Google Colab para Simulaciones

Descripción del enlace: Este recurso es útil para aprender a configurar entornos interactivos y generar visualizaciones avanzadas en la nube.

14.1.3. Método de operadores

El **método de operadores** es una técnica para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, transformándolos en ecuaciones algebraicas mediante operadores diferenciales. Para un sistema $\left(\frac{dx}{dt} = Ax + b(t)\right)$, el método reescribe las ecuaciones usando el operador diferencial $\left(D = \frac{d}{dt}\right)$, de modo que el sistema se expresa como:

$$[(DI - A)x = b(t),]$$

donde (I) es la matriz identidad. La solución homogénea se obtiene resolviendo $(\det(DI - A) = 0)$, que genera la ecuación característica del sistema. La solución particular se encuentra aplicando operadores inversos a $(b(t))$, similar al método de coeficientes indeterminados.

En aplicaciones computacionales, el método de operadores se implementa en herramientas como SymPy para soluciones analíticas, o en solvers numéricos como SciPy para sistemas complejos. Por ejemplo, en un sistema de dos ecuaciones

acopladas, como en un circuito eléctrico con inductores mutuos, el método transforma las ecuaciones en un sistema algebraico, resuelto mediante álgebra matricial en NumPy.

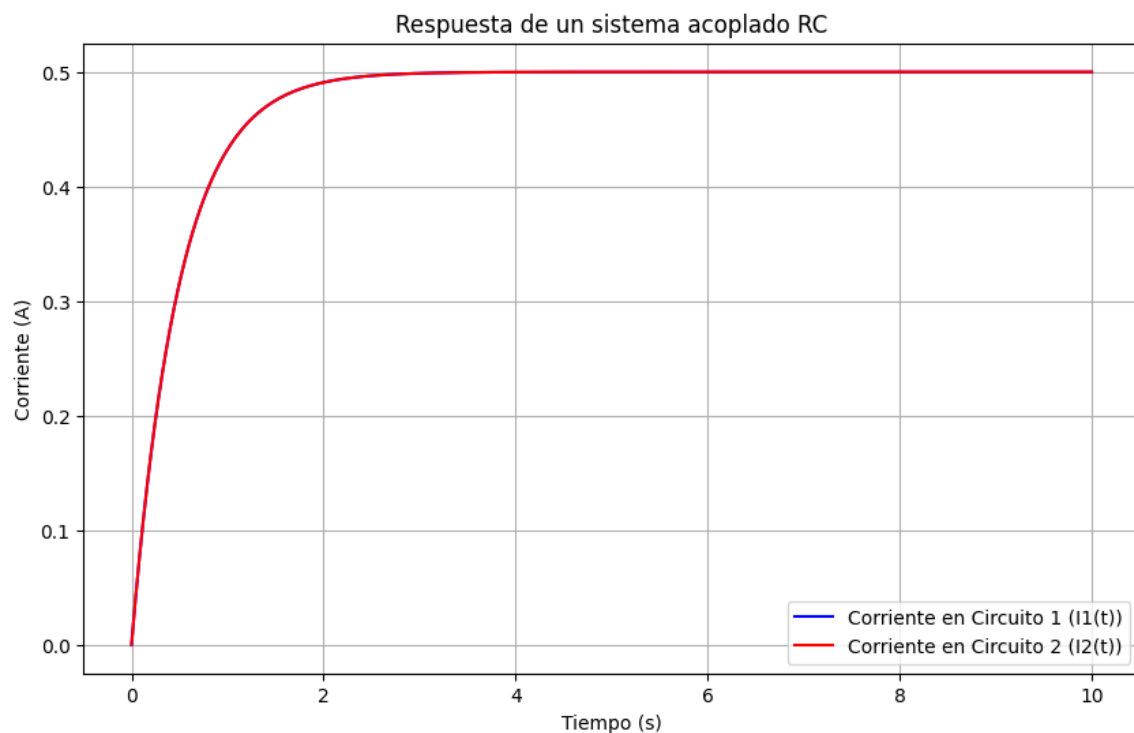


Gráfico 6: Resolución de un sistema lineal usando el método de operadores en un circuito acoplado. Creación propia.

En control automático, el método de operadores es fundamental para el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos. Utilizando los operadores lineales, los ingenieros pueden calcular los polos del sistema mediante la ecuación característica, lo cual determina la estabilidad del sistema en función de sus respuestas a perturbaciones. Al obtener estos polos, es posible diseñar controladores como PID (proporcional-integral-derivativo) o controladores adaptativos que aseguren que el sistema se mantenga estable incluso ante variaciones en sus parámetros o condiciones externas. Este análisis también se aplica al seguimiento de trayectorias y al ajuste de ganancias de control, áreas clave en la robótica y la automatización.

El cálculo de polos y ceros a través del método de operadores no solo es útil para el control automático de sistemas lineales, sino que también se extiende al diseño de sistemas de control de ruido, como en la regulación de señales o en el filtrado de datos en telecomunicaciones. Además, herramientas computacionales como MATLAB o Simulink utilizan este enfoque para realizar simulaciones rápidas de sistemas

dinámicos, lo que permite una evaluación eficiente de los posibles comportamientos del sistema bajo diversas condiciones de operación.

En dinámica de fluidos computacional (CFD), el método de operadores es igualmente útil para modelar flujos acoplados en sistemas fluidos. En simulaciones de fluidos, como las utilizadas en COMSOL o OpenFOAM, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del fluido se resuelven mediante operadores diferenciales que encapsulan las leyes físicas del fluido dinámico. Estos operadores permiten resolver problemas complejos como el flujo turbulento, las interacciones fluido-estructura, y la propagación de ondas acústicas.

Los métodos numéricos implementados en CFD son cruciales para predecir fenómenos como la resistencia del aire en vehículos, el comportamiento de fluidos en la atmósfera o la simulación de sistemas de refrigeración. En estos contextos, el método de operadores facilita el análisis y la predicción de la evolución del estado del fluido a lo largo del tiempo, permitiendo la optimización de diseños y la mejora de rendimiento de sistemas en sectores como la automoción, la energía, y la ingeniería ambiental.

El método de operadores no solo simplifica el análisis y la resolución de sistemas dinámicos en control automático y dinámica de fluidos, sino que también proporciona un enfoque eficiente para la simulación y optimización de sistemas complejos en diversas disciplinas tecnológicas. Este enfoque algebraico permite aplicar herramientas computacionales avanzadas, mejorando la precisión y eficiencia de los modelos utilizados en áreas como ingeniería de control, procesamiento de señales y simulación física.

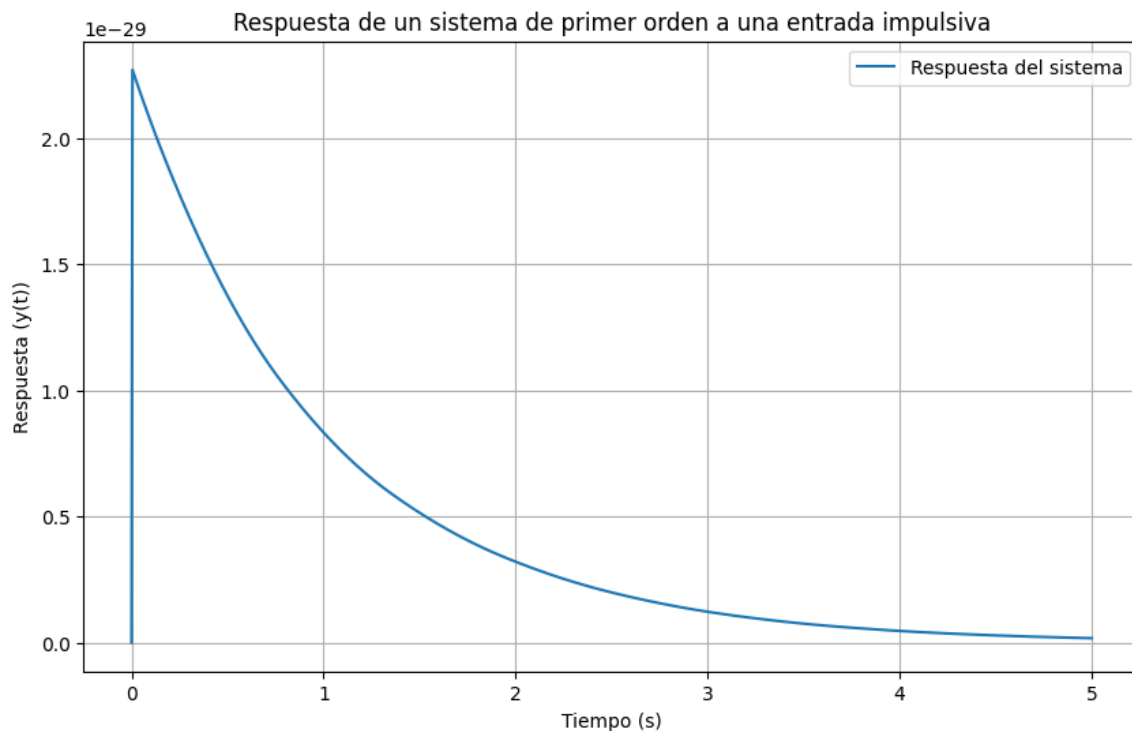


Gráfico 7: Trayectorias de un sistema resuelto mediante el método de operadores con entrada impulsiva. Creación propia.

En machine learning, el método se usa en modelos dinámicos continuos, como en redes neuronales diferenciales, integradas en TensorFlow para optimizar trayectorias temporales.

El método de operadores es una técnica poderosa en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que permite abordar problemas complejos de manera algebraica. Este enfoque utiliza operadores diferenciales para transformar las ecuaciones en una forma que es más accesible para su resolución, eliminando la necesidad de manejar directamente las derivadas y convirtiendo el problema en uno de álgebra matricial. Este marco algebraico facilita el estudio y la solución de sistemas dinámicos, ya que simplifica el análisis de las soluciones en términos de sus componentes estructurales, como valores y vectores propios.

En simulación computacional, el método de operadores se aplica extensamente para resolver modelos físicos que involucran ecuaciones diferenciales, como el movimiento de partículas, la propagación de ondas y el comportamiento de sistemas de control. Por ejemplo, en la simulación de sistemas de control, el uso de operadores permite modelar

la evolución de sistemas dinámicos bajo entradas externas, optimizando el comportamiento del sistema y mejorando la precisión de las predicciones.

Además, este método es de gran utilidad en el análisis de sistemas dinámicos, especialmente cuando se modelan interacciones complejas entre diversas variables dependientes del tiempo. En el campo de la computación, herramientas como MATLAB y Python se integran con este enfoque para ofrecer soluciones numéricas eficientes que permiten simular sistemas de múltiples dimensiones y analizar el impacto de pequeñas variaciones en las condiciones iniciales.

En el contexto de redes neuronales y aprendizaje automático, el método de operadores también juega un papel crucial en la modelización de sistemas adaptativos. Aquí, los operadores permiten analizar la evolución de los pesos de las conexiones neuronales durante el entrenamiento, ayudando a mejorar la estabilidad y convergencia del algoritmo. Esta técnica también se emplea para estudiar el comportamiento de sistemas no lineales y para resolver ecuaciones diferenciales que describen procesos de aprendizaje.

En resumen, el método de operadores no solo facilita la resolución de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos, sino que se convierte en una herramienta fundamental para la simulación y análisis de sistemas dinámicos. Su aplicación abarca desde el diseño de sistemas de control hasta la optimización de procesos computacionales y el desarrollo de modelos predictivos en áreas como la inteligencia artificial, procesamiento de señales, y simulación física.

Definición de los términos citados en la clase 14

- **Sistema de ecuaciones diferenciales:** Un conjunto de ecuaciones que describen la evolución conjunta de múltiples variables dependientes, modelando interacciones dinámicas en sistemas complejos.
- **Método de operadores:** Una técnica que usa operadores diferenciales para transformar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en ecuaciones algebraicas, facilitando su resolución mediante álgebra matricial.

Referencias

- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
- Iserles, A. (2009). *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM.

Recursos de Profundización

1. Modeling and Simulation in Python

Autor: Carlos Mayorga

Descripción: Este libro ofrece una introducción práctica a la simulación de sistemas dinámicos en Python, con ejemplos detallados de implementación y visualización en Jupyter Notebooks. Ideal para estudiantes que deseen aprender a programar simulaciones desde cero.

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/12S6qwqLEZ5VLrxyeEhwYY1BIII2GtBp/view?usp=sharing>

2. Numerical Methods in Engineering with Python 3

Autor: Carlos Mayorga

Descripción: Este artículo cubre métodos numéricos para sistemas dinámicos, con un enfoque en la implementación en Python y la interpretación de resultados. Es un recurso valioso para ingenieros y científicos computacionales.

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1H7Gdg6L7Pleyw14gDftTE6C9zV1WEfgY/view?usp=sharing>

3. Introduction to Computational Science



Autor: Carlos Mayorga

Descripción: Este texto explora la simulación de sistemas dinámicos con un enfoque en la visualización y el análisis, incluyendo ejemplos prácticos en Python y herramientas interactivas como Jupyter.

Enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1NbDysY3EmYQDo74evxRQxmuvcSZmVPjf/view?usp=sharing>



La excelencia no se improvisa

síguenos

