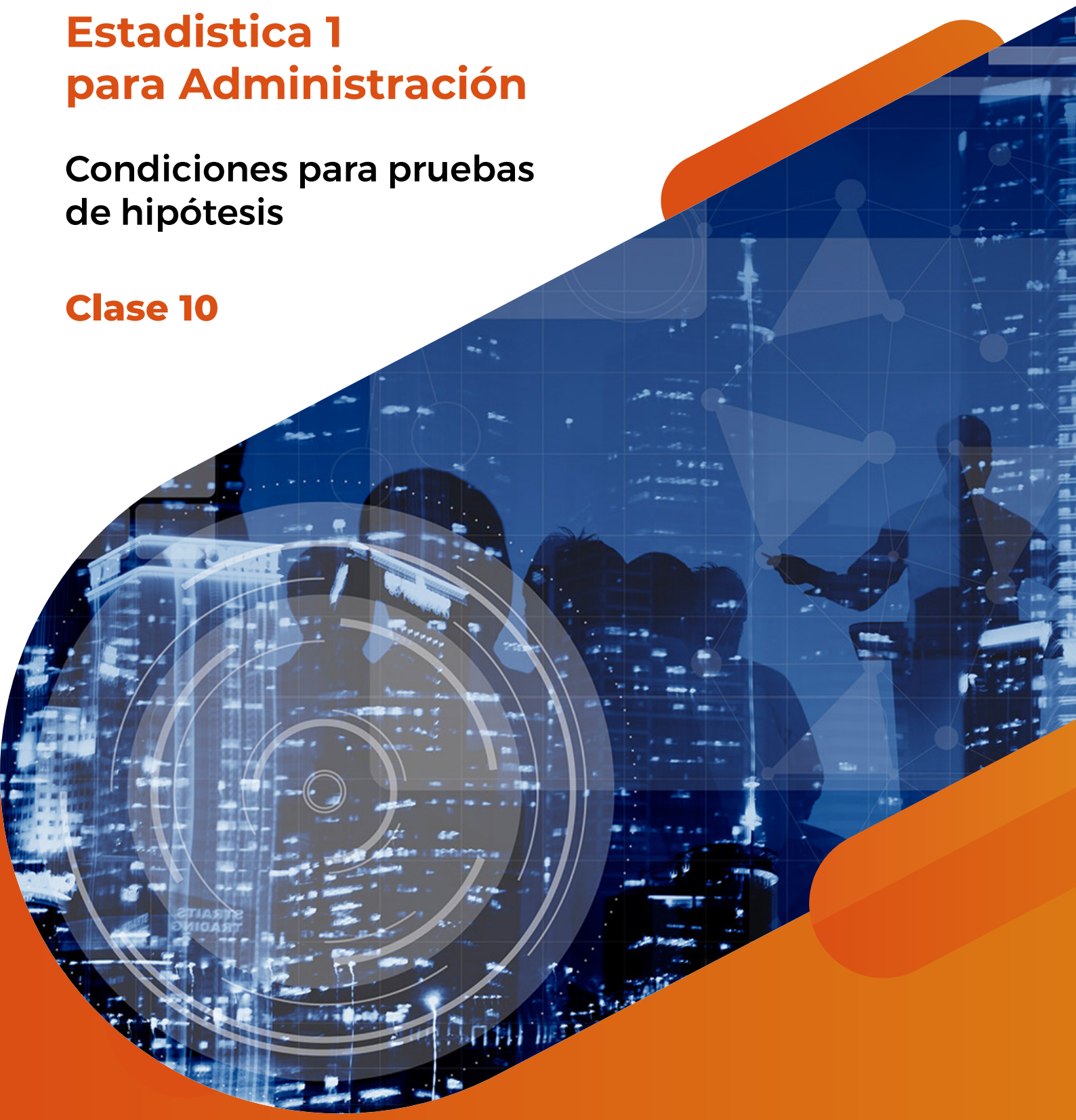
PUCE Virtual
EDUCACIÓN FLEXIBLE

# Estadistica 1 para Administración

## Condiciones para pruebas de hipótesis

## Clase 10



La excelencia no se improvisa

## INTRODUCCIÓN

En la clase anterior habíamos visto los distintos usos de la prueba t.test. Habíamos mencionado entonces que esta prueba está relacionada con la distribución t y que existían algunos requisitos para que la misma funcione adecuadamente.
Específicamente el primer requisito es que la muestra sobre la que estamos trabajando tenga una distribución normal o quasi-normal. Por otro lado, indicamos que cuando t.test se usa para comparar si dos muestras, denotados como X/Y , provienen de la misma población, los dataset deban tener varianzas iguales o al menos similares. En la presente clase presentaremos algunas funciones que nos sirven para validar estos supuestos.

**Resultado o resultados de aprendizaje que será abordado con el contenido de la clase**
Aplicar distribuciones de probabilidad con variables discretas y continuas en la solución de problemas, en distintas áreas del conocimiento. Las medidas estadísticas y probabilísticas a partir de la presentación de tablas y gráficos sobre problemáticas de su área de conocimiento.

## Condiciones para pruebas de hipótesis

Para que t.test funcione correctamente es necesario que se cumplan 2 condiciones: La distribución debe ser normal y la varianza en el caso de comparación de 2 dataset debe ser similar.

## Prueba de Shapiro-Wilk

La prueba de normalidad de Shapiro-Wilk es una de las tres pruebas generales de normalidad diseñadas para detectar las desviaciones de la normalidad.
El test de Shapiro-Wilks es en sí, una prueba de hipótesis que plantea la hipótesis nula que la muestra proviene de una distribución normal. Para la prueba elegimos un nivel de significancia, la prueba permite escoger el nivel de significancia que se desea siendo los más comunes 0.05 o 0.01, y tenemos una hipótesis alternativa que sostiene que la distribución no es normal.

**H0** = La distribución es normal

**H1** = La distribución no es normal,

o más formalmente:

**H0:** $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
**H1:** $X \nsim N(\mu,\sigma^2)$

Esta prueba retorna un p-value. El valor p representa el nivel más bajo de la significancia, el cual se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, se garantiza que la distribución es normal si p-value es mucho mayor que 0.05.

Esta prueba también realiza una prueba no paramétrica medida por el estadístico W. Éste debe tener un valor aproximadamente igual a 1 para muestras de distribuciones normales. Los valores grandes indican no normalidad, más específicamente, el valor W debe compararse con un W-critico, mismo que varía de acuerdo con el tamaño de la muestra y el nivel de confianza.

Para el cálculo del Wcritico no podemos utilizar las funciones qnorm o qt, dado que no podemos asegurar su distribución, en su lugar usaremos una distribución gamma. Esta distribución de la familia de probabilidad continua contiene 2 parámetros, parámetro de forma K y de escala θ. El siguiente código ayuda a encontrar el Wcritico para cualquier combinación de número de observaciones y nivel de confianza.
Distribución gamma
Describe el uso de las funciones gamma
Enlace

```
#Cálculo de Wcritico
tmpf <- function(gshape=20,n=50) {
  shapiro.test(qgamma((1:n)/(n+1),scale=1,shape=gshape))
}
# Encontrar el parámetro de forma que corresponde a un valor p particular
find.shape <- function(n,alpha) {
  uniroot(function(x) tmpf(x,n)$p.value-alpha,
```

```
        interval=c(0.01,100))$root
}
find.W <- function(n,alpha) {
  s <- find.shape(n,alpha)
  tmpf(s,n=n)$statistic
}
#Wcritico para 14 observaciones y alfa 0.05
find.W(14,0.05)
0.8753995
#Wcritico para 14 observaciones y alfa 0.01
find.W(14,0.01)
0.8238614
```

Valores referenciales figuran en la siguiente tabla.

Tabla 1

Valores del W-critico en función de la cantidad de observaciones

Creación de autor Alfonso Prado

| No. Observaciones | W crítico IC=.95 | W crítico IC=.99 |
|---|---|---|
| **3** | 0.77 | 0.75 |
| **6** | 0.79 | 0.72 |
| **9** | 0.83 | 0.77 |
| **12** | 0.86 | 0.80 |

Veamos un ejemplo teórico

```
#En primer lugar creamos una distribución normal
vnormal <- rnorm(100, mean = 5, sd = 3)
shapiro.test(vnormal )


Shapiro-Wilk normality test
```

```
data:  rnorm(100, mean = 5, sd = 3)
W = 1, p-value = 0.2

#Dado que p-value es > 0.05 , la distribución del vector es normal

#El siguiente vector tiene una distribución uniforme
runif <- runif(100, min = 2, max = 4)
shapiro.test(vrunif)

shapiro.test(runif(100, min = 2, max = 4))

        Shapiro-Wilk normality test

data:  runif(100, min = 2, max = 4)
W = 1, p-value = 0.0009

#Dado que runif nos provee un vector con distribución uniforme, el resultado
#es un pvalue mucho menor que 0.05

#Veamos un ejemplo con una distribución T con 20 grados de libertad que se aproxima
a la normalidad

vt <- rt(100, 20)
shapiro.test(vt)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  vt
W = 1, p-value = 0.04
#pvalue se encuentra por debajo del límite indicando que no sigue una distribución
normal
```

Veamos un ejemplo práctico con el dataset “housing”, queremos entender si la distribución de los pies cuadrados de las construcciones sigue una distribución normal

```
read.csv("http://www.jaredlander.com/data/housing.csv", header=TRUE, sep=",")
housing<- na.omit(housing)
#Entendamos el dataset
names(housing)
#Nombre largos o con puntos es mejor cambiarlos
nombres <- names(housing)
names(housing) <- c("sector" ,"class", "TUnits" , "Year","GSqFt" ,
                    "Est_GIncome" ,"GIncomexSqFt","Est_Expense" ,
                    "ExpSqFt","NetIncome",
                    "FullValue" , "valxSqFt" ,"Boro")
#Nos interesa saber si de todo el dataset el tamaño de los áreas siguen
#una distribución normal
shapiro.test(housing$GSqFt)

Shapiro-Wilk normality test

data:  housing$GSqFt
W = 0.4567, p-value < 2.2e-16

#Con un pvalue menor que 0.05 y W menor que 1 concluimos que no sigue
Distribución normal
```

Si un conjunto de datos determinado no se distribuye normalmente, podemos realizar una de las siguientes transformaciones para que sea más normal:

a) Transformación logarítmica: transforma el vector a log(vector).
b) Transformación de raíz cuadrada: transforma el vector a √vector

Al realizar estas transformaciones, la variable de respuesta suele acercarse a una distribución normal.

## Prueba de Ansari-Bradley

Esta prueba se usa para probar la hipótesis nula (HO) de que las varianzas de 2 dataset, correspondientes a dos muestras son idénticas, mientras que la hipótesis alternativa (H1) indica que difieren por de que difieren por dispersión (algunos autores lo llaman escala). La prueba de Ansari también retorna un p-value, el cual debe ser mucho mayor que 0.05 para asegurar que las varianzas son similares.

Figura 1

Sintaxis de la función programática ansari.test

Fuente: https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/ansari.test

```
ansari.test(x, …)

# S3 method for default
ansari.test(x, y,
            alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
            exact = NULL, conf.int = FALSE, conf.level = 0.95,
            …)
```

Veamos un ejemplo teórico

```
#Creamos un vector normal
V1 <- rnorm(100)
#Creamos un segundo vector normal pero con desviación estándar de 2
V2 <- rnorm(100, 0,2)

 ansari.test(V1, V2)

Ansari-Bradley test

data:  rnorm(100) and rnorm(100, 0, 2)
AB = 5872, p-value = 5.892e-05
alternative hypothesis: true ratio of scales is not equal to 1
95 percent confidence interval:
```

```
 0.4035154 0.7085887
sample estimates:
ratio of scales
      0.5356437

#Pvalue obtenido es menor que 0.05 indicando que la función detecta que las varianzas son diferentes.
```

De la figura 1 se puede ver claramente que la función solo permite comparar 2 dataset, sin embargo, comúnmente nos topamos con situaciones en las cuales tenemos una variable de tipo factor con múltiples niveles, en estos casos necesitamos garantizar que valores de cada uno de estos niveles tengan una varianza similar. La pregunta que nos hacemos es ¿Cómo puedo comparar múltiples dataset? La respuesta es ANOVA

## Pruebas de anova de 1 vía

### Estadístico F ratio

Para entender cómo funciona anova, necesitamos conocer previamente sobre la distribución F. De acuerdo a Berman H, "la distribución F es la distribución de probabilidad asociada con el estadístico F". De la misma manera que la distribución Student T está relacionada con el estadístico t, la distribución F está asociada con el estadístico F (o Fratio).

El estadístico Fratio sirve para comparar varianzas de dos poblaciones, la comparación se hace en base a la razón (división) de las mismas, sin embargo, debemos entender que los estadísticos de las poblaciones generalmente no son conocidos. Cuando se comparan las varianzas de dos poblaciones, se toma una muestra de cada población. Las varianzas de la muestra sirven como estimados de sus varianzas poblacionales respectivas. Una distribución F se forma por la razón de estas dos varianzas muestrales.

Debemos conocer también que existen varios tipos de pruebas en las que usamos este estadístico. La prueba conocida como anova de 1 vía (aov) que nos permite contestar la

siguiente pregunta: ¿La varianza entre las medias de dos poblaciones es significativamente diferente?"

La distribución F tiene la particularidad, que la relación de las varianzas se espera que sea mayor que 1, por lo tanto, al hacer la relación colocaremos la varianza mayor en el numerador y la varianza menor en el denominador.

Para calcular el estadístico F, seleccionamos una muestra aleatoria de tamaño $n_1$ de la población normal 1 bajo análisis y que tenga una desviación estándar igual a $S_1$.
Luego seleccionamos otra muestra aleatoria independiente de tamaño $n_2$ de otra población normal, que tenga una desviación estándar igual a $S_2$.
Quedando su fórmula como se menciona en la siguiente figura

Figura 2
Razón F para comparar varianzas Prado, A.(2025)
Adaptación de Webster (2000) capítulo 10.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

**Distribución F**

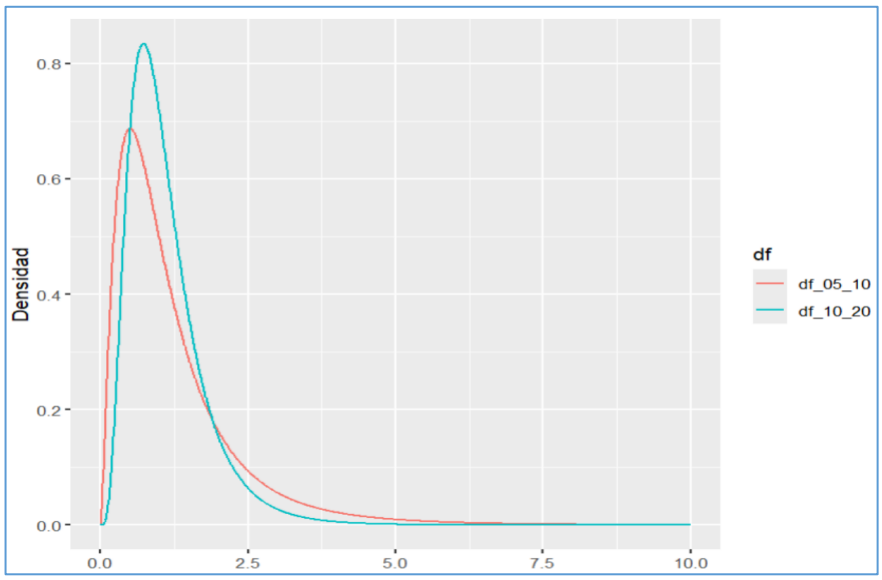
La distribución de todos los valores posibles del estadístico f se denomina distribución F, cuyos grados de libertad de cada set se calculan como v1 = n1 - 1 y v2 = n2 – 1

La curva de la distribución F depende de los grados de libertad, v1 y v2. Al describir una distribución F, el número de grados de libertad asociados con la desviación estándar en el numerador del estadístico f siempre se indica primero. Por lo tanto, f(5, 10) se referiría a una distribución F con v1 = 5 y v2 = 10 grados de libertad; mientras que f(10, 20) se referiría a una distribución F con v1 = 10 y v2 = 20 grados de libertad. Nótese que la curva representada por f(5, 10) sería diferente de la curva representada por f(10, 20).

Figura 3

Dos ejemplos de distribución F el primero con 10 y 20 grados de libertad y el segundo con 5 y 10 grados de libertad

Creación de autor: Alfonso Prado




Al igual que cuando hacemos una prueba de hipótesis tenemos un área de rechazo de H0 y un área de aceptación de H0, en la distribución F vamos a tener un área de rechazo y una de no rechazo. Pero debido a que la razón F está restringida para exceder siempre de 1 , resulta que sólo tienen una zona de rechazo en la cola derecha. Por lo tanto, sólo la mitad del área bajo la distribución es accesible como zona de rechazo y es necesario dividir por 2 el valor de α seleccionado e identificar una zona de rechazo única en la cola derecha. La delimitación de estas áreas estará dada por el intervalo de confianza con el que se desea trabajar, más los grados de libertad del numerador y denominador de los sets bajo comparación. Para encontrar este valor utilizaremos la función qf() cuya sintaxis se muestra en la figura siguiente.

En los siguientes ejemplos podemos ver cómo el valor correspondiente a alfa 0.05 y 0.01 varía con respecto a los grados de libertad del numerador y denominador.

Tabla 2

Ejemplos del valor qf() correspondiente a alfa 0.05 y 0.01 variando con respecto a los grados de libertad del numerador y denominador

Creación el autor Alfonso Prado

| IC | Grados de libertad numerador | Grados de Libertad denominador | QF |
|---|---|---|---|
| **0.95** | 5 | 10 | 3.33 |
| **0.95** | 10 | 5 | 4.74 |
| **0.99** | 5 | 10 | 5.64 |
| **0.99** | 10 | 5 | 10.1 |

Figura 4

Sintaxis de la función qf, Prado A. (2025)

Adaptado de https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/FDist

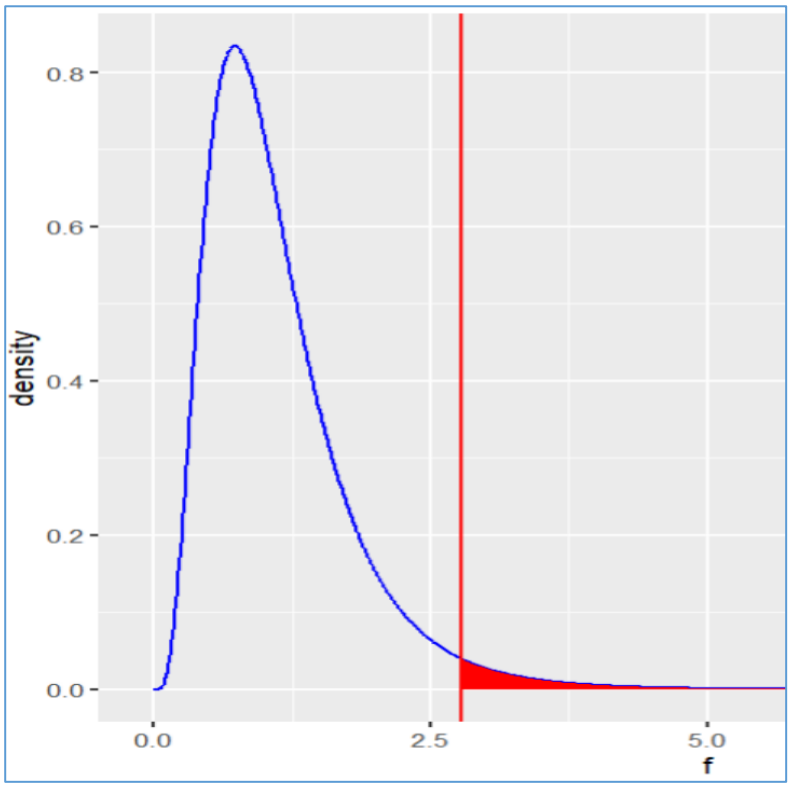
```
qf(p, df1, df2, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
```

El valor retornado por la función qf() limitaría las zonas de rechazo como se muestra a continuación.

Figura 5

Zona de rechazo de una distribución F

Creación de autor Alfonso Prado



**Funcionamiento de aov**

La técnica de análisis de varianza (aov) también conocida como análisis factorial es la herramienta básica para el estudio del efecto de uno o más factores (cada uno con dos o más niveles) sobre la media de una variable continua. Es por lo tanto el test estadístico a emplear cuando se desea comparar las medias de dos o más grupos. Esta técnica puede generalizarse también para estudiar los posibles efectos de los factores sobre la varianza de una variable.
aov tiene las siguientes hipótesis y supuestos:

- ✓ **H0:** La media de todos los grupos considerados son iguales.
- ✓ **H1:** La media de todos los grupos no son todos iguales
- ✓ En realidad, no indica cual(es) son diferentes o cual(es) son iguales, lo único que indica es que no son todos iguales.
- ✓ Pruebas adicionales son necesarias para establecer cuáles son iguales o no
- ✓ Asume que los dataset son distribuidos normalmente y que su desviación estándar es la similar
- ✓ Los datos atípicamente extremos pueden invalidar por completo las conclusiones de un ANOVA. Si se observan residuos extremos hay que estudiar con detalle a que observaciones pertenecen, siendo aconsejable recalcular el ANOVA sin ellas y comparar los resultados obtenidos

**Función Programática**

Como indicamos anteriormente, existen 2 funciones ANOVA que sirven para propósitos diferentes:

- ✓ aov es una variante donde los grupos se hallan en un mismo dataset . A veces llamado “1-way-ANOVA” los grupos se forman por los niveles de una variable tipo factor
- ✓ anova es similar, pero está diseñada para permitir comparar la varianza de dos modelos predictivos (Veremos esto en la próxima clase)

Figura 6

Sintaxis de la función aov, Prado A. (2025)

Adaptado de https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/aov

```
aov(formula, data = NULL, projections = FALSE, qr = TRUE,
    contrasts = NULL, …)
```

De acuerdo con Rodrigo (2017) "El estadístico estudiado en el ANOVA, conocido como $Fratio$, es la ratio entre la varianza de las medias de los grupos y el promedio de la varianza dentro de los grupos"

Pero, como en todas las pruebas, los estadísticos per-se no indica mayor cosa, los estadísticos deben ser comparados con un valor crítico que marca la frontera entre zonas de rechazo y zona de no rechazo de H0.

En el caso de aov() el estadístico F debe ser comparado con un F-critico (obtenido de una distribución F) que depende de algunos parámetros (Intervalo de confianza, grados de libertad del numerador, grados de libertad del denominador).

Por otro lado, aov() también nos provee un p-value, sin embargo, éste lo único que nos indica es la probabilidad de observar los resultados obtenidos (o resultados más extremos) si la hipótesis nula fuera cierta, asumiendo que todas las medias de los grupos son iguales, por lo que no es estadístico de decisión en estos casos. La comparación debe ser en Fcritico y Fcalculado.

Ejemplo con el dataset de construcciones

```
#El dataset contiene una variable categórica llamada class que define el tipo de construcción. Queremos determinar si la varianza en precios es igual para cada tipo de construcción


levels(housing$class)
[1] "R2-CONDOMINIUM" "R4-CONDOMINIUM" "R9-CONDOMINIUM" "RR-CONDOMINIUM"
aov_class <- aov(valxSqFt~class, data= housing)
summary(aov_class)
```

```
             Df   Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
class         3  1243078  414359    97.3 <2e-16 ***
Residuals   2526 10756882    4258
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

>
#Obtenemos el fcritico para los grados de libertad  mencionados
qf(.95,3,2526)
[1] 2.608426
#El estadístico F reportado por anova es muy superior al fcritico ,por lo tanto indica que hay diferencias en las varianzas de los grupos de tipos de construcción

#Una segunda prueba con respecto a los vecindarios
levels(housing$Boro)
levels(housing$Boro)
[1] "Bronx"         "Brooklyn"      "Manhattan"     "Queens"        "Staten Island"
aov_boro <-aov(valxSqFt~Boro, data= housing)
summary(aov_boro)
qf(.95,4,2525)
2.375452
#El estadístico F reportado por anova es muy superior al fcritico ,por lo tanto indica que hay diferencias en las varianzas de los grupos de vecindarios
```

## Referencias citadas en la Clase 10


Schmuller J.(2022), Statistical Analysis with Excel For Dummies, Wiley

Teck  K, (2022) , Practical t-test Power Analysis with R, Practical Assessment, Research & Evaluation , Volumen 27, No 18

Berman H.G., "*F Distribution* , descargado de https://stattrek.com/probability-distributions/f-distribution

Rodrigo J. (2016), *Análisis de varianza para comparar múltiples medias*, https://cienciadedatos.net/documentos/19_anova

PUCE Virtual

**La excelencia no se improvisa**

síguenos