

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Optimización multivariada
sin restricciones

Clase 10

Introducción

La optimización multivariada sin restricciones constituye un pilar fundamental en el análisis matemático aplicado a la economía, la administración, la ingeniería y las ciencias computacionales. Este enfoque se centra en identificar los valores de un conjunto de variables que potencian o disminuyen una función objetiva que depende de diversas dimensiones, sin establecer límites externos ni condiciones adicionales sobre dichas variables. En este tipo de problemas, la solución se determina exclusivamente a partir del comportamiento interno de la función, por lo que el análisis de derivadas parciales, gradientes y condiciones de primer y segundo orden se vuelve esencial para identificar puntos críticos y determinar si corresponden a máximos, mínimos o puntos silla.

La relevancia de esta técnica radica en su capacidad para modelar decisiones complejas, como maximizar utilidades, minimizar costos o ajustar parámetros óptimos en modelos estadísticos, permitiendo comprender cómo interactúan múltiples factores dentro de un sistema sin restricciones explícitas. En conclusión, la optimización multivariada sin restricciones ofrece un marco analítico sólido para la resolución de problemas de decisión en contextos donde la libertad de elección de las variables facilita la exploración de la estructura interna de la función y su comportamiento integral.

Clase: 10

RDA 2: Identificar los principios de optimización en los distintos problemas que surgen en las Ciencias Administrativas y Económicas.

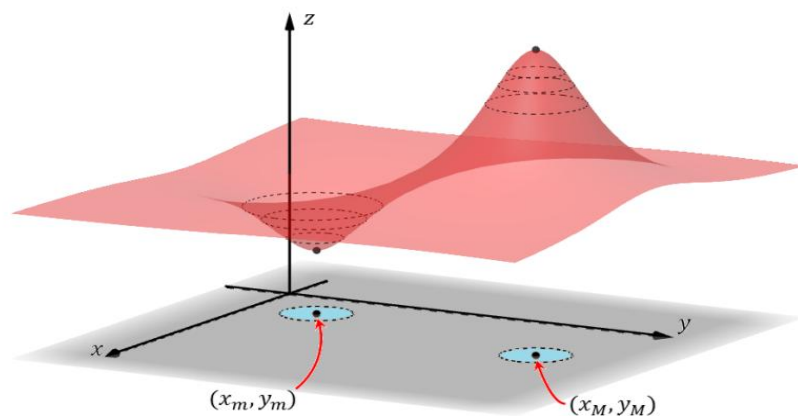
10. Optimización multivariada sin restricciones

La optimización multivariada sin restricciones se refiere al conjunto de métodos y principios utilizados para encontrar los valores de varias variables que maximizan o minimizan una función objetiva sin imponer límites externos sobre esas variables. Este enfoque es central en economía, administración, estadística, ingeniería y ciencias de datos, dado que muchos problemas reales se pueden formular como la búsqueda de un

óptimo interno en una función de varias dimensiones (Nocedal & Wright, 2006; Boyd & Vandenberghe, 2004).

En la figura a continuación se muestra la gráfica de una función de 2 variables.

Figura 1. *Función de dos variables con sus extremos*



Nota. Gráfica que representa una función de dos variables junto con sus puntos de máximo y mínimo. Tomado de “Optimización de funciones escalares de varias variables” (https://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/54_6_25092017162556.pdf). [Licencia no especificada].

Concepto general

Un problema de optimización multivariada sin restricciones se plantea como:

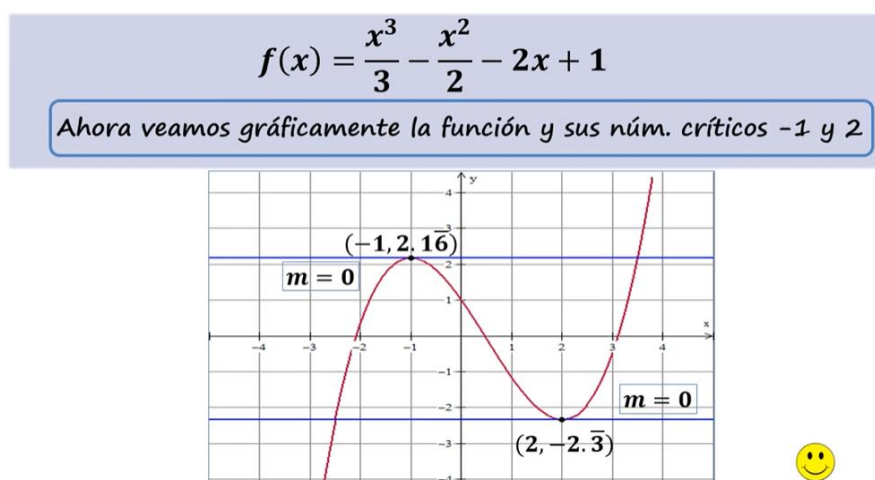
$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \text{ o } \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

donde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función diferenciable de varias variables.

La solución óptima se encuentra analizando los puntos críticos de la función, los cuales surgen cuando todas las derivadas parciales se igualan a cero. (Nocedal & Wright, 2006).

En la figura a continuación se muestran los puntos críticos de una función.

Figura 2. *Puntos críticos de una función*



Nota. Representación gráfica de los puntos críticos de una función real. Adaptado de *Puntos Críticos* [video], YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=xDLYbTx7atw>). [Licencia no especificada]. 😊

Condiciones de primer orden

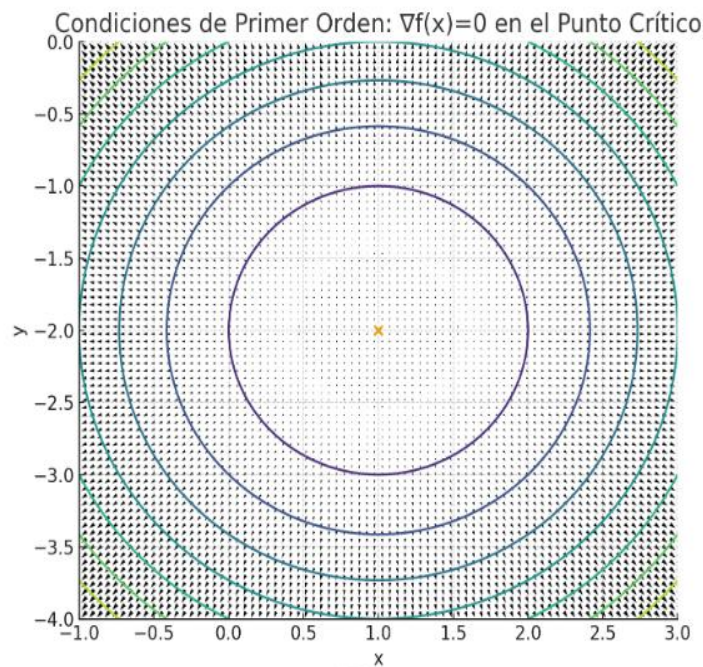
Los puntos críticos son los vectores x que satisfacen

$$\nabla f(x) = 0.$$

Resolver $\nabla f(x) = 0$ equivale a encontrar sistemas de ecuaciones no lineales que determinan candidatos a extremos (Boyd & Vandenberghe, 2004).

En la figura a continuación se muestra la condición de primer orden.

Figura 3. Condición de primer orden: punto crítico donde $\nabla f(x)=0$



Nota. Representación esquemática de la condición de primer orden en la que el gradiente de la función se anula en un punto crítico. Elaborado por Alexandra Palacios (2025), con apoyo de OpenAI.

Condiciones de segundo orden

Ejemplo: Clasificación de puntos críticos usando la Hessiana

Consideremos la función de dos variables:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 6y$$

- Condiciones de primer orden: encontrar puntos críticos

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6$$

Igualamos a cero para hallar los puntos críticos:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

Multiplicamos la segunda ecuación por 2:

$$2x + 4y = 12$$

Restamos la primera:

$$(2x + 4y) - (2x + y) = 12 - 4$$

$$3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$$

Sustituimos en: $x + 2y = 6$

$$x + \frac{16}{3} = 6 \Rightarrow x = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$

Punto crítico encontrado:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

- Construcción de la matriz Hessiana

La Hessiana está formada por las segundas derivadas:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada término:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

Por tanto:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Evaluación de la definitud de la Hessiana

La matriz es definida positiva si:

1. El determinante es positivo:

$$\det(H) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

2. El primer elemento diagonal es positivo:

$$2 > 0$$

Como ambas condiciones se cumplen:

H es definida positiva

- **En resumen**

Dado que la Hessiana en el punto crítico es *definida positiva*, podemos afirmar que:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{ es un **mínimo local** de } f(x, y)$$

Una vez encontrados los puntos críticos mediante $\nabla f(x) = 0$, se utiliza la matriz Hessiana formada por las segundas derivadas parciales para determinar si dichos puntos corresponden a mínimos, máximos o puntos silla. La clasificación depende de la definitud de la Hessiana: si es definida positiva, el punto es un mínimo local; si es definida negativa, es un máximo local, y si es indefinida, se trata de un punto silla. Este análisis permite entender la curvatura de la función y evaluar la estabilidad de las soluciones, siendo esencial en optimización multivariada y ampliamente aplicado en economía, estadística, machine learning y teoría de control.

Interpretación geométrica y económica

La interpretación geométrica del gradiente y la Hessiana permite visualizar la optimización multivariada como el análisis de un paisaje o una superficie. El gradiente

indica la dirección de máximo ascenso de la función y la rapidez con la que aumenta; por eso, cuando es cero, señala un punto crítico que puede corresponder a un máximo, mínimo o punto silla. La Hessiana, por su parte, describe la curvatura local de la superficie y determina la naturaleza de esos puntos críticos.

En economía, esta perspectiva geométrica se traduce en términos marginales. El gradiente actúa como un vector de efectos marginales que muestra cómo cambia una función económica como utilidad, costo, producción o beneficio ante variaciones pequeñas en cada variable de decisión. Así, sirve para identificar qué factores influyen más en el resultado económico y hacia dónde deben ajustarse para mejorar el desempeño o alcanzar un objetivo.

Métodos numéricos

En muchos problemas reales de optimización multivariada, la función objetivo puede ser altamente no lineal, presentar múltiples óptimos locales o tener una dimensión tan grande que impide obtener soluciones analíticas. En estos casos, se recurre a métodos numéricos iterativos, los cuales generan una secuencia de puntos que se acercan progresivamente al óptimo. Estos algoritmos exploran la geometría local de la función, utilizando información del gradiente, de la Hessiana o de aproximaciones de ella.

Entre los métodos más utilizados se encuentran:

a. Descenso de gradiente

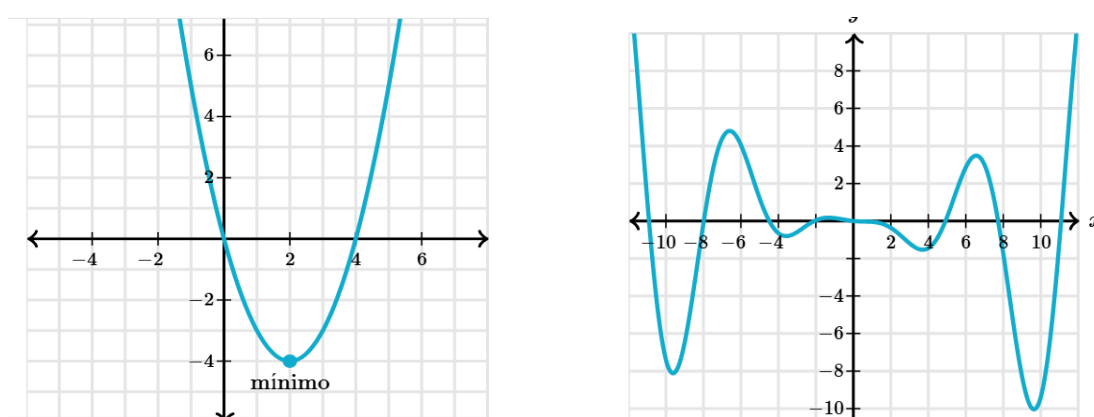
Este método actualiza la solución moviéndose en la dirección opuesta al gradiente, ya que esta indica la dirección de mayor aumento de la función. Puede implementarse con:

- Paso fijo, donde la magnitud del avance es constante en cada iteración.
- Paso adaptativo o line search, que ajusta el tamaño del paso según la curvatura local de la función.

El descenso de gradiente es sencillo de implementar y muy útil en problemas de alta dimensión, aunque puede ser lento en valles estrechos o en funciones mal condicionadas.

En la figura a continuación se muestran los descensos de gradiente, con varios mínimos.

Figura 4. *Puntos de descenso de gradiente*



Nota. Esquema que ilustra los puntos sucesivos generados por el método de descenso de gradiente en la búsqueda de un mínimo de una función multivariable. Tomado de “Descenso de gradiente”, Khan Academy (<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/what-is-gradient-descent>), recuperado en 2025. [Licencia no especificada].

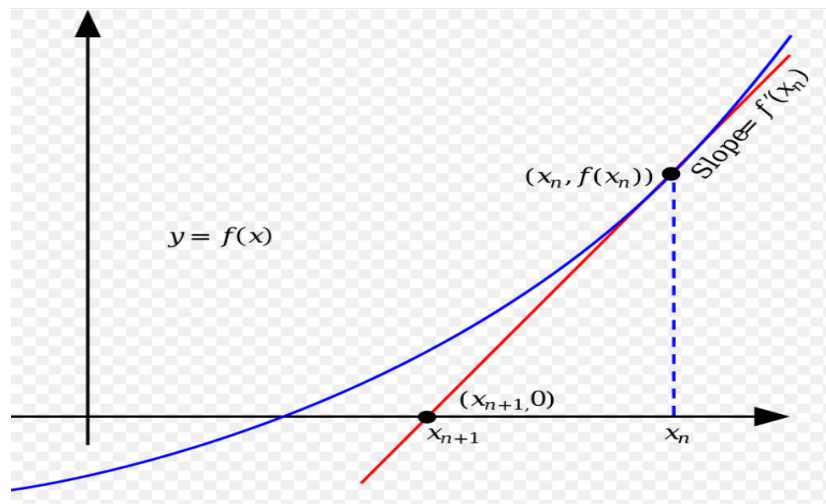
b. Métodos de Newton y cuasi-Newton

Los métodos de Newton utilizan información de la matriz Hessiana para aproximar la forma local de la función y dirigir el movimiento hacia el óptimo con pasos más eficientes, logrando frecuentemente convergencia cuadrática cerca del punto óptimo. Sin embargo, requieren calcular la Hessiana y su inversa, lo cual puede ser costoso en grandes dimensiones.

Por ello surgen los métodos cuasi-Newton, como BFGS y L-BFGS, que construyen aproximaciones de la Hessiana utilizando únicamente gradientes pasados. Estos métodos logran un equilibrio entre eficiencia y costo computacional, siendo ampliamente utilizados en econometría, machine learning y calibración de modelos económicos.

En la figura a continuación se muestra una ilustración de una iteración del método de Newton (la función f se muestra en azul y la línea de la tangente en rojo).

Figura 5. Método Newton



Nota. Esquema gráfico de las iteraciones del método de Newton para aproximar la raíz de una función real. Tomado de “Método Newton”, Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Newton#/media/Archivo:Newton_iteration.svg). [Licencia según Wikipedia].

c. Gradiente conjugado y métodos estocásticos

El método de gradiente conjugado es especialmente eficaz para problemas grandes y dispersos, como los provenientes de modelos de equilibrio general o simulaciones numéricas. Requiere solo gradientes y evita el almacenamiento de matrices grandes.

Por otro lado, los métodos de optimización estocástica se emplean en situaciones donde los datos contienen ruido, son masivos o están distribuidos. Estos métodos realizan aproximaciones del gradiente a partir de muestras, lo que reduce drásticamente el costo computacional por iteración.

d. Elección del método

La selección del algoritmo adecuado depende de varios factores:

- Estructura de la función f : si es convexa, la convergencia a un mínimo global está garantizada; si es, no convexa, se requiere mayor cautela para evitar óptimos locales.
- Tamaño y dimensionalidad del problema: métodos basados en Hessiana pueden ser impracticables en espacios muy grandes.
- Disponibilidad y costo del cálculo del gradiente o Hessiana.
- Presencia de ruido en los datos, lo cual favorece métodos estocásticos.

En conjunto, estos métodos permiten resolver problemas complejos de optimización que no admiten soluciones cerradas, constituyendo herramientas esenciales para la modelación matemática aplicada en economía, ingeniería y ciencias computacionales (Nocedal & Wright, 2006; Burden, Faires & Burden, 2023).

Aplicaciones en economía y administración

La optimización multivariada sin restricciones se aplica en: maximización del beneficio empresarial, calibración de parámetros en modelos macroeconómicos (DSGE), ajuste de portafolios sin restricciones iniciales, identificación de parámetros en modelos estadísticos y ajuste de planes operativos que no imponen límites explícitos sobre las variables de decisión.

Relación con problemas con restricciones

El estudio sin restricciones es la base conceptual para abordar luego problemas con restricciones (mediante multiplicadores de Lagrange o programación convexa).

Comprender el caso sin restricciones facilita la extensión a problemas con igualdad/inecuaciones y a la formulación de algoritmos híbridos (Boyd & Vandenberghe, 2004).

A continuación, se presenta un video en el que se explica la optimización de funciones sin restricciones.

Sonymath. 2021. Recuperado 10/11/2025. “Optimización de funciones sin restricciones” URL: <https://www.youtube.com/watch?v=8acCHSLj6CA>

10.1 Caso básico (funciones cuadráticas)

Las funciones cuadráticas multivariadas representan uno de los pilares de la optimización sin restricciones, ya que permiten analizar de forma exacta la estructura de curvatura, la existencia de óptimos y su naturaleza. De manera general, una función cuadrática en varias variables se expresa como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}' A \mathbf{x} + \mathbf{b}' \mathbf{x} + c,$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de decisión, A es una matriz simétrica, $\mathbf{b}$ un vector de coeficientes lineales y c una constante. Este tipo de funciones aparece en problemas de minimización de costos, análisis de riesgo en portafolios, estimación econométrica, análisis input–output y modelos de producción.

A continuación, se presenta un video de las funciones cuadráticas.
Susyprofe. 2019. Recuperado 10/11/2025. “Funciones cuadráticas” URL: <https://www.youtube.com/watch?v=J3qQWvxqFI4>

A. Condiciones de optimización

La solución de un problema cuadrático sin restricciones se encuentra aplicando el gradiente:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Para un óptimo, se cumple la condición de primer orden:

$$Ax^* + b = 0,$$

y, siempre que A sea invertible, el punto óptimo es:

$$x^* = -A^{-1}b.$$

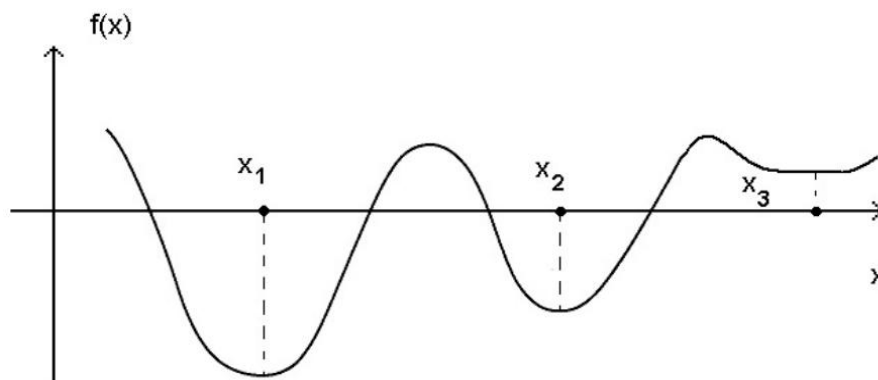
Este resultado es central en optimización clásica y en algoritmos como Newton y Quasi-Newton, donde la matriz Hessiana cumple un rol estructural.

En la figura a continuación se muestra una ilustración de mínimos cuadrados no lineales, que es un caso especial de optimización sin restricciones: x_1 mínimo global, x_2 mínimo local estricto, x_3 mínimo local no estricto.

Figura

6

Ejemplo de mínimos cuadrados no lineales



Nota. Ilustración de un ajuste por mínimos cuadrados no lineales en un problema de optimización sin restricciones. Tomado de “Optimización sin restricciones” (<https://www.dma.uvigo.es/~aurea/transparencias2.pdf>), recuperado en 2025. [Licencia no especificada].

B. Naturaleza del óptimo según la matriz A

La matriz A determina el tipo de solución:

a) Si A es definida positiva, $\rightarrow$ mínimo global

La función es convexa y existe un único punto que minimiza $f(\mathbf{x})$

Este caso es el más común en economía (costos, riesgo, producción).

b) Si A es definida negativa $\rightarrow$ máximo global

La función es cóncava y la solución representa un máximo.

c) Si A es indefinida $\rightarrow$ punto silla

La función no tiene máximo ni mínimo global.

Situación frecuente en superficies económicas no convexas (Varian, 2019).

C. Interpretación geométrica

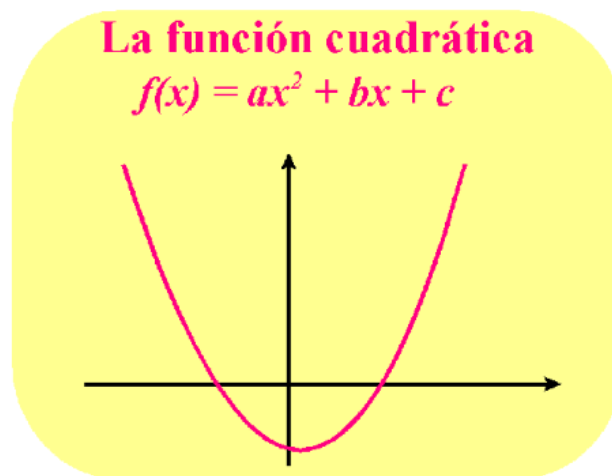
Las funciones cuadráticas generan superficies cuyas formas dependen de la curvatura matricial:

- Elipsoides $\rightarrow$ mínimo,
- Paraboloides invertidos $\rightarrow$ máximo,
- Hiperboloides $\rightarrow$ puntos silla.

Esta visualización es fundamental para comprender fenómenos como rendimientos marginales decrecientes o interacciones entre variables.

En la figura a continuación se muestra una ilustración de una función cuadrática.

Figura 7. Ejemplo de función cuadrática



Nota. Ejemplo gráfico de una función cuadrática que ilustra su forma parabólica. Tomado de *Funciones cuadráticas* (<https://clarisaranda32.wordpress.com/2014/02/22/funciones-cuadraticas/>). [Licencia no especificada].

D. Ejemplos

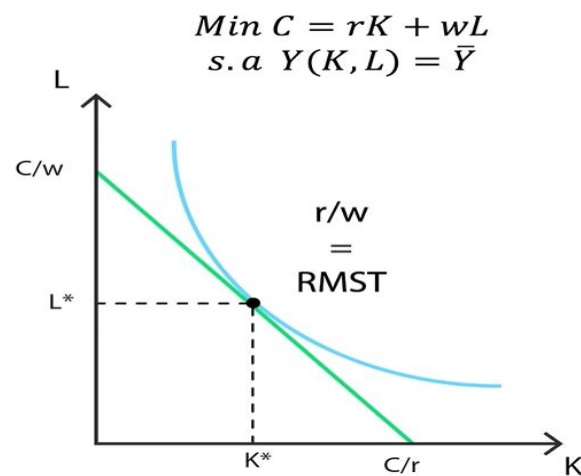
Minimización de costos

Una función de costos como:

$$C(K, L) = 3K^2 + 2L^2 + 4KL - 10K - 8L$$

Es un caso típico de función cuadrática donde A define la estructura productiva o tecnológica del sistema.

En la figura a continuación se muestra una ilustración de minimización de costos.

Minimización de costes

Nota. Representación gráfica de un problema de minimización de costes en un contexto económico. Tomado de “Minimización de costes” [video], YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=A2DRR2A5tsM>), recuperado en 2025. [Licencia no especificada].

Optimización de portafolios (Markowitz)

La varianza del portafolio:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}$$

Es una función cuadrática donde la matriz de covarianza Σ es positiva semidefinida.

Este es el fundamento matemático de la frontera eficiente.

Mínimos cuadrados ordinarios

Los modelos lineales estimados mediante OLS resuelven un problema cuadrático:

$$\min_{\beta} (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

lo que conduce a la famosa solución:

$$\beta = (X'X)^{-1}X'Y$$

E. Relevancia para modelos no lineales

Gracias al Teorema de Taylor, cualquier función suavemente diferenciable puede aproximarse localmente por una función cuadrática, lo que convierte a este caso en el punto de partida para:

- optimización no lineal,
- algoritmos numéricos,
- modelos macroeconómicos dinámicos,
- programación financiera,
- análisis de sensibilidad.

Por ello, el análisis cuadrático es considerado la base matemática del campo.

Conclusión

La optimización multivariada sin restricciones constituye un marco analítico esencial para comprender cómo se comportan las funciones en espacios de varias dimensiones y cómo identificar sus puntos óptimos utilizando información derivada del gradiente y la Hessiana. Este cuerpo teórico no solo proporciona criterios rigurosos para determinar máximos, mínimos o puntos silla, sino que también permite interpretar la estructura geométrica y económica de los problemas, revelando cómo influyen los cambios marginales y la curvatura local en las decisiones óptimas. Su aplicación abarca desde la minimización de costos y la maximización de beneficios en economía hasta la calibración de modelos estadísticos, el análisis de portafolios, el aprendizaje automático y la ingeniería computacional.

Asimismo, el estudio de funciones cuadráticas, base de muchos modelos y algoritmos, demuestra que la estructura matricial determina la existencia y naturaleza del óptimo, reforzando la importancia de la convexidad y la definitud en la evaluación de soluciones. Estos fundamentos teóricos se complementan con métodos numéricos

modernos, como el descenso de gradiente, los métodos de Newton y cuasi-Newton, el gradiente conjugado y las técnicas estocásticas, que permiten resolver problemas reales de alta complejidad donde las soluciones analíticas no son factibles.

En conjunto, la optimización multivariada sin restricciones integra teoría, geometría, economía y algoritmos computacionales para ofrecer un conjunto de herramientas robustas, versátiles e indispensables en la solución de problemas contemporáneos. Su comprensión profunda no solo facilita el análisis local y global de funciones, sino que también sirve como punto de partida para abordar problemas más avanzados con restricciones, consolidándose como un pilar fundamental de la modelación matemática aplicada.

Referencias citadas en la clase 10

Boyd, S. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press.

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2023). *Numerical Analysis* (11th ed.). Cengage Learning.

Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2020). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (10th ed.). Wiley.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* (11th ed.). McGraw-Hill Education.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2015). *Linear and Nonlinear Programming* (4th ed.). Springer.

Miller, R. E., & Blair, P. D. (2022). *Input–Output Analysis: Foundations and Extensions* (3rd ed.). Cambridge University Press

Nocedal, J., & Wright, S. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer.

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational Analysis* (3rd ed.). Springer.

Strang, G. (2019). *Linear Algebra and Learning from Data*. Wellesley-Cambridge Press.

Varian, H. R. (2019). *Microeconomic Analysis* (4th ed.). W.W. Norton.

Definición de los términos citados en la clase 10

Optimización multivariada sin restricciones. Es el proceso de encontrar los valores de un conjunto de variables que maximizan o minimizan una función que depende de múltiples factores, sin imponer límites o condiciones externas sobre dichas variables. En este contexto, la solución óptima se identifica analizando directamente la estructura matemática de la función, usualmente mediante el cálculo del gradiente y la Hessiana. Los puntos donde el gradiente es cero constituyen candidatos a óptimos, y la curvatura determinada por la Hessiana permite clasificarlos como máximos, mínimos o puntos silla.

Funciones cuadráticas multivariadas. Son expresiones matemáticas de varias variables que combinan términos constantes, lineales y cuadráticos, y cuya forma está determinada por una matriz que define su curvatura. Permiten describir superficies como valles, picos o puntos silla según la naturaleza de esa matriz, lo que facilita identificar mínimos, máximos o inestabilidades. Gracias a su estructura simple y predecible, son esenciales en análisis y optimización dentro de áreas como economía, ingeniería y estadística.

Profundización clase 10

Interpretación geométrica y económica

Geométricamente, el gradiente indica la dirección de mayor ascenso; en economía, esa dirección puede interpretarse como el vector de cambios marginales que más afectan el objetivo (por ejemplo, utilidad o beneficio). La Hessiana aporta información sobre riesgos de optimización local (convexidad/concavidad) y sirve para interpretar si un equilibrio es estable o no.

Desde una perspectiva geométrica, la optimización multivariada puede visualizarse como el análisis de la forma de una superficie o un paisaje multidimensional. En este contexto, el gradiente representa el vector que señala la dirección de máximo ascenso de la función, es decir, la dirección en la que la pendiente es más pronunciada. Su magnitud indica cuán rápido crece la función en ese punto. Por ello, cuando el gradiente es cero, nos encontramos en un punto donde la superficie es plana localmente, lo cual es una condición necesaria para un máximo, un mínimo o un punto silla.

En economía, esta interpretación geométrica se traduce en términos marginales. El gradiente refleja cómo cambia el valor de una función económica como la utilidad, el costo, el beneficio o la producción cuando se varía ligeramente cada variable de decisión. Por tanto, puede entenderse como un vector de efectos marginales, donde cada componente indica la sensibilidad del objetivo frente a un pequeño cambio en un insumo o decisión. De esta manera, el gradiente permite identificar qué variables influyen más en el resultado económico y en qué dirección deben ajustarse para mejorar el desempeño del sistema.

Por otra parte, la matriz Hessiana proporciona información detallada sobre la curvatura de la función alrededor de un punto crítico. Desde el punto de vista geométrico, describe si la superficie es convexa, cóncava o presenta curvaturas mixtas. Esto permite determinar si un punto constituye un valle (mínimo), un pico (máximo) o una silla. En términos económicos, esta interpretación es esencial para analizar la estabilidad de los equilibrios, la presencia de rendimientos marginales decrecientes o crecientes y la confiabilidad de las soluciones obtenidas. Por ejemplo, una Hessiana definida positiva asegura que el equilibrio corresponde a un mínimo estable, como un costo mínimo o una combinación de insumos eficiente, mientras que una Hessiana indefinida puede indicar inestabilidad o la presencia de trayectorias divergentes.

En síntesis, la interpretación geométrica y económica del gradiente y la Hessiana permite comprender no solo dónde se encuentran los óptimos, sino también cómo se comporta la función alrededor de ellos, lo cual es crucial para el análisis de decisiones, la evaluación de equilibrios y la modelación matemática aplicada en economía y administración.



La excelencia no se improvisa

síguenos

