

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Aplicaciones avanzadas

Clase 11

Introducción

Las aplicaciones avanzadas de la optimización multivariada sin restricciones trasladan los principios teóricos hacia escenarios complejos y de alto impacto en disciplinas como la economía, la ingeniería, la inteligencia artificial y la ciencia de datos. En estos contextos, las funciones objetivo suelen ser altamente no lineales, presentar múltiples óptimos locales o involucrar interacciones dinámicas entre variables, lo que demanda métodos y algoritmos más robustos para explorar eficientemente espacios de soluciones amplios y multidimensionales.

Estos enfoques permiten resolver problemas como la calibración de modelos macroeconómicos dinámicos, la optimización de portafolios financieros, el entrenamiento de redes neuronales profundas y el diseño de sistemas de control avanzados. En conjunto, estas aplicaciones demuestran cómo la optimización multivariada se convierte en una herramienta clave para construir soluciones precisas, eficientes y estratégicamente relevantes frente a los desafíos contemporáneos.

Clase: 11

RDA 2: Identificar los principios de optimización en los distintos problemas que surgen en las Ciencias Administrativas y Económicas.

11. Aplicaciones avanzadas

Las aplicaciones avanzadas de la optimización multivariada sin restricciones abarcan un conjunto amplio de métodos y contextos en los que se requiere resolver problemas complejos, generalmente caracterizados por funciones altamente no lineales, espacios de alta dimensionalidad, interacciones entre variables y ausencia de soluciones analíticas cerradas. En este nivel, la optimización se convierte en una herramienta estratégica para modelar, simular y resolver problemas reales en economía, finanzas, ingeniería, ciencias de datos, inteligencia artificial y sistemas dinámicos. Estas aplicaciones suelen integrar técnicas numéricas, estadísticas y computacionales de frontera, permitiendo abordar funciones objetivas cuyo análisis

tradicional (basado únicamente en derivadas parciales y análisis de curvatura) resulta insuficiente.

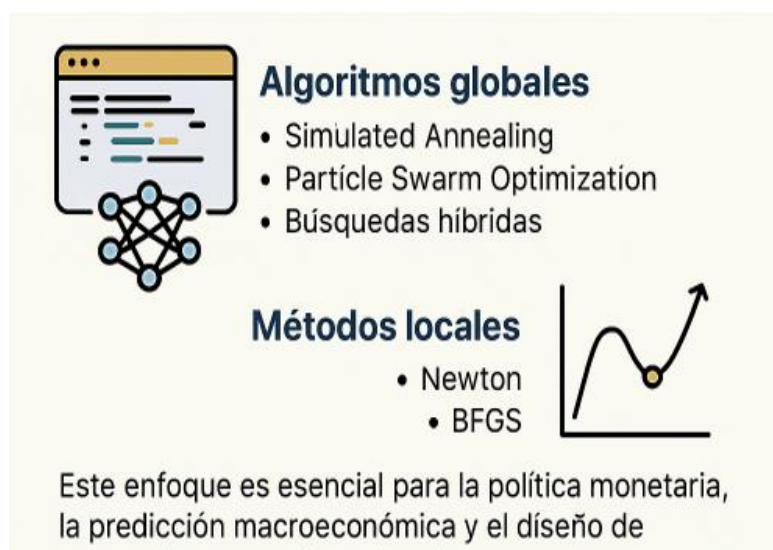
Optimización en modelos macroeconómicos y DSGE

En macroeconomía moderna, los modelos DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) requieren la estimación o calibración de parámetros estructurales mediante la minimización de funciones multivariadas de error. Debido a la complejidad de estos modelos, la optimización sin restricciones se combina con algoritmos globales como el *Simulated Annealing*, *Particle Swarm Optimization* o búsquedas híbridas, seguidas por métodos locales como Newton o BFGS para refinar la solución.

Estos métodos permiten encontrar parámetros que reproducen comportamientos observados en la economía real, incluso bajo shocks aleatorios o estructuras no lineales. Este enfoque es esencial para la política monetaria, la predicción macroeconómica y el diseño de escenarios de estrés económico.

En la figura a continuación se muestra la gráfica de la optimización en modelos macroeconómicos.

Figura 1. Optimización en modelos macroeconómicos



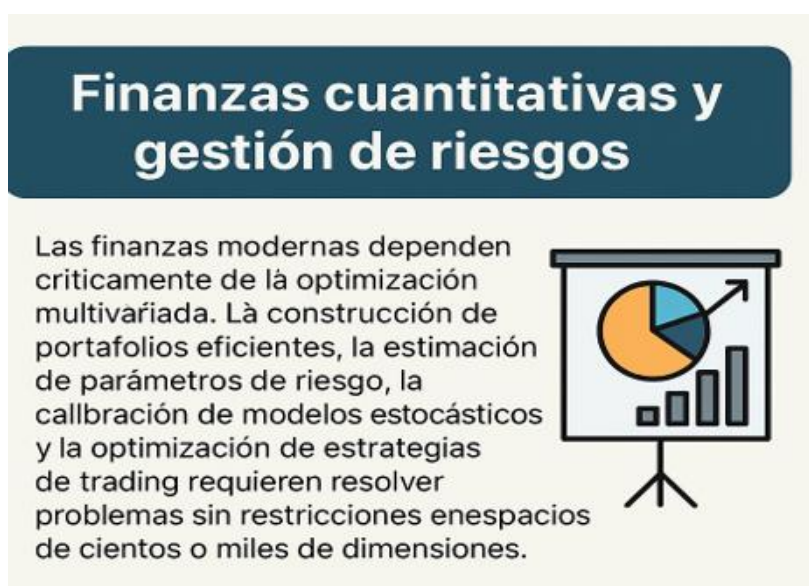
Nota. Representación esquemática de un modelo macroeconómico en el que se optimiza una función objetiva (como el crecimiento o el bienestar). Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

Finanzas cuantitativas y gestión de riesgos

Las finanzas modernas dependen críticamente de la optimización multivariada. La construcción de portafolios eficientes, la estimación de parámetros de riesgo, la calibración de modelos estocásticos y la optimización de estrategias de trading requieren resolver problemas sin restricciones en espacios de cientos o miles de dimensiones. Métodos avanzados integran técnicas del aprendizaje profundo para predecir rendimientos o volatilidades, que luego alimentan algoritmos de optimización como gradiente estocástico.

En la figura a continuación se muestra la gráfica de las finanzas cuantitativas y gestión de riesgos.

Figura 2. Finanzas cuantitativas y gestión de riesgos



Nota. Esquema que ilustra la aplicación de modelos cuantitativos para valorar activos financieros, medir la exposición al riesgo (de mercado, crédito y liquidez) y diseñar estrategias de cobertura en contextos corporativos y de inversión. Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

Además, la maximización de utilidad bajo incertidumbre, un pilar de la teoría financiera, se formula como un problema multivariado sin restricciones. Estas herramientas han permitido desarrollar modelos de control robusto, estrategias adaptativas y optimización en tiempo real en mercados altamente volátiles.

En la figura a continuación se muestran los métodos avanzados de las finanzas cuantitativas y gestión de riesgos.

Figura 3

Métodos avanzados



Nota. Esquema sintético de métodos avanzados de análisis y optimización, que integra técnicas numéricas, modelos computacionales y enfoques estadísticos para la toma de decisiones en contextos administrativos y económicos. Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

A continuación, se presenta un video en el que se explican los tipos de riesgo financiero.

Pirani. Recuperado en 2025. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=bsqZiKFchMo>

Aprendizaje automático y redes neuronales

En inteligencia artificial y machine learning, el proceso de entrenamiento de redes neuronales profundas se formula como un problema de optimización multivariada de gran escala, donde la función de pérdida depende de miles o incluso millones de parámetros (pesos y sesgos). Cada parámetro influye simultáneamente en el comportamiento del modelo, generando un paisaje de optimización altamente no lineal, no convexo y con múltiples mínimos locales y puntos silla.

Debido a esta complejidad, la optimización clásica basada en gradientes exactos se vuelve insuficiente. Por ello, se emplean métodos estocásticos como Stochastic Gradient Descent (SGD) y Adam, los cuales permiten aproximar el gradiente utilizando minibatches de datos, reduciendo el costo computacional y mejorando la capacidad del modelo para escapar de regiones planas o inestables del espacio de parámetros. Además, técnicas como regularización L1 y L2, dropout, batch normalization y early stopping contribuyen a mejorar la estabilidad y evitar el sobreajuste, al introducir restricciones implícitas sobre el comportamiento de los parámetros durante el entrenamiento.

En modelos avanzados, se incorporan aproximaciones de la matriz Hessiana, como métodos quasi-Newton o variantes adaptativas que ajustan dinámicamente las tasas de aprendizaje en función de la curvatura local. Estas aproximaciones ayudan a acelerar la convergencia en redes profundas, especialmente en capas donde el gradiente puede desvanecerse o explotar.

Un área emergente combina conceptos de la economía teórica con redes neuronales. Por ejemplo, el uso de homotopías estabilizadoras permite iniciar el entrenamiento desde problemas más simples y avanzar gradualmente hacia modelos complejos, aumentando la estabilidad numérica. Asimismo, arquitecturas inspiradas en principios de equilibrio general incorporan restricciones económicas directamente en la estructura de la red, permitiendo una mayor interpretabilidad y coherencia teórica. Estas innovaciones abren la puerta a modelos capaces de capturar relaciones causales, responder mejor a datos escasos y operar bajo marcos normativos específicos.

En conjunto, el entrenamiento de redes neuronales profundas se ha convertido en un campo donde la optimización multivariada, la estadística, la economía

computacional y la teoría de control confluyen para crear sistemas más robustos, explicables y eficientes. (Azinovic & Žemlička, 2023).

En la figura a continuación se muestra un detalle del aprendizaje automático y redes neuronales.

Figura 4

Aprendizaje automático y redes neuronales



Nota. Esquema que representa la utilización de modelos de aprendizaje automático y redes neuronales para identificar patrones en grandes volúmenes de datos, mejorar la capacidad predictiva y apoyar la optimización de decisiones en entornos administrativos y económicos. Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

Control óptimo, ingeniería y sistemas dinámicos

En ingeniería, el análisis de sistemas de control, robótica y dinámica no lineal depende de la optimización multivariada sin restricciones para ajustar parámetros, minimizar errores, predecir trayectorias y estabilizar sistemas. Métodos como *Moving Horizon Estimation* (MHE) y *Model Predictive Control* (MPC) utilizan optimización

continúa para actualizar estados de un sistema en tiempo real, sin restricciones explícitas en los parámetros del modelo. Estas técnicas permiten controlar drones, vehículos autónomos, procesos industriales y sistemas eléctricos avanzados. El uso de funciones objetivo-multivariadas hace posible minimizar costos energéticos, errores de trayectoria y desviaciones del sistema bajo incertidumbre.

En la figura a continuación se muestra un análisis del control óptimo.

Figura 5

Control óptimo



Nota. Esquema conceptual del control óptimo aplicado a sistemas dinámicos, en el que se determina una trayectoria de decisión que maximiza o minimiza una función objetivo (como costos, beneficios o desempeño) sujeta a restricciones temporales y estructurales del modelo. Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

A continuación, se presenta un video en el que se explica el control óptimo.

Recuperado en 2025. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=cven6Xv42Ek>

Aplicaciones en economía agrícola, ambiente y sostenibilidad

En ciencias agrícolas y ambientales, la optimización multivariada se usa para determinar combinaciones óptimas de nutrientes, maximizar productividad, minimizar impactos ambientales y mejorar el uso eficiente de recursos. El modelamiento matemático permite integrar múltiples variables (suelo, clima, absorción, respuesta productiva) en funciones complejas que se optimizan sin restricciones para encontrar escenarios sostenibles y eficientes. Este enfoque es fundamental para políticas de agricultura sostenible, economía circular y adaptación al cambio climático.

En la figura a continuación se muestran las aplicaciones en economía agrícola, ambiente y sostenibilidad.

Figura 6

Aplicaciones en economía agrícola, ambiente y sostenibilidad



Nota. Esquema que integra ejemplos de optimización y análisis cuantitativo en economía agrícola, gestión ambiental y estrategias de sostenibilidad, destacando decisiones sobre uso eficiente de recursos, reducción de impactos negativos y balance entre productividad y conservación. Elaboración: Alexandra Palacios, OpenAI.

Optimización en simulaciones y modelos computacionales

Los modelos que utilizan simulaciones computacionales, como los modelos basados en agentes, la dinámica molecular o las simulaciones en ingeniería estructural, requieren optimizar funciones altamente complejas donde la evaluación misma de la función objetivo es costosa. En estos casos se aplican métodos como:

- optimización por metamodelos,
- aproximación cuadrática secuencial,
- técnicas de gradiente aproximado o implícito,
- optimización global híbrida.

Estas herramientas permiten resolver problemas multivariados imposibles de abordar analíticamente o con métodos estándar.

11.1 Problemas en Administración y Economía (sin restricciones multivariadas).

Los problemas de optimización sin restricciones multivariadas en Administración y Economía abarcan un amplio conjunto de situaciones en las que se desea maximizar o minimizar una función objetivo que depende simultáneamente de varias variables de decisión, sin imponer restricciones externas sobre su rango o comportamiento. En estos contextos, la tarea consiste en identificar los valores óptimos, ya sean máximos o mínimos de factores como precios, niveles de producción, inversión, asignación de recursos, costos o utilidades, permitiendo que estas variables tomen cualquier valor dentro del espacio real.

Este enfoque resulta particularmente útil para analizar escenarios donde las decisiones operan en entornos libres o donde las limitaciones no han sido definidas explícitamente, lo que permite explorar de manera más profunda la estructura interna del problema. De este modo, la optimización sin restricciones permite determinar cómo interactúan múltiples variables entre sí y cómo influyen en el desempeño económico o administrativo de una organización. Al estudiar estos problemas se recurre al análisis del gradiente, la matriz Hessiana y otras herramientas matemáticas que permiten identificar puntos críticos, evaluar su naturaleza (máximos, mínimos o

puntos silla) y comprender la sensibilidad del sistema frente a pequeños cambios en sus parámetros.

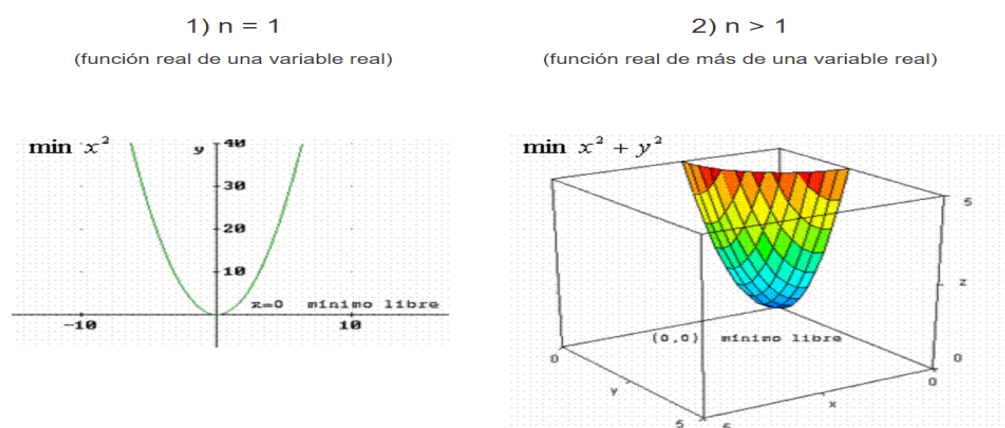
Gracias a esta metodología, es posible modelar decisiones complejas como la maximización de beneficios, la minimización de costos, la planificación de producción, el diseño de portafolios financieros o la elaboración de estrategias administrativas óptimas. En síntesis, este tipo de optimización proporciona un marco analítico robusto para comprender y resolver problemas decisionales donde las variables pueden ajustarse libremente, permitiendo evaluar escenarios internos, proyectar comportamientos y mejorar la toma estratégica de decisiones.

Este tipo de análisis es fundamental porque muchas decisiones gerenciales, productivas y financieras requieren identificar puntos de máximo beneficio, mínimo costo o equilibrio a partir de múltiples variables que interactúan entre sí.

En la figura a continuación se muestran ejemplos de problemas sin restricción.

Figura 7

Ejemplos de problemas sin restricción



Nota. Esquema que presenta ejemplos de problemas de optimización sin restricción en el análisis matemático y económico. Tomado de *Optimización sin restricciones* (<https://www.ub.edu/matheopt/optimizacion-economica/problema-de-optimizacion-sin-restricciones>). [Licencia no especificada].

Importancia en la Administración

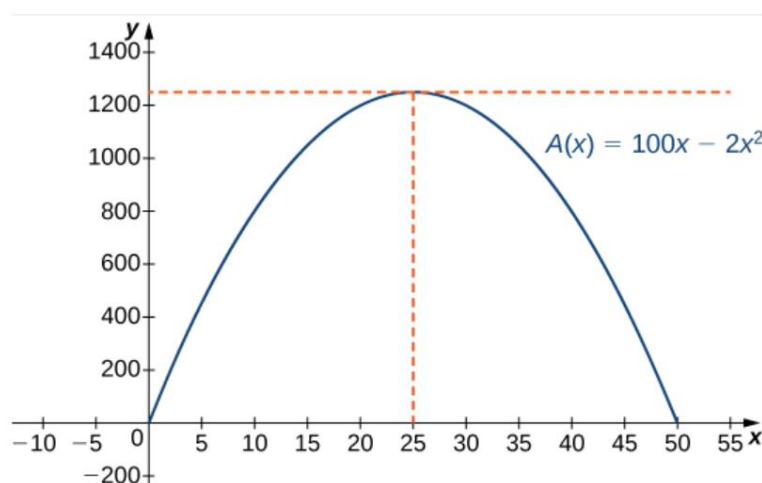
En el ámbito administrativo, los problemas de optimización multivariada permiten analizar de manera integral cómo varios factores afectan simultáneamente los resultados de una organización. Por ejemplo:

- Determinar el nivel óptimo de producción y personal para minimizar costos.
- Optimizar la combinación de canales publicitarios para maximizar la efectividad de una campaña.
- Identificar la mejor mezcla de productos para maximizar el margen de contribución.
- Evaluar la asignación óptima de recursos humanos, financieros y logísticos en un proyecto.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de optimización para maximizar el área de un jardín.

Figura 8

Ejemplos de optimización



Nota. Ilustración de distintos problemas clásicos de optimización planteados y resueltos mediante cálculo diferencial para hallar máximos y mínimos. Tomado de *Problemas de optimización*, de Cálculo21, s. f., <https://calculo21.com/problemas-de-optimizacion/>. [Licencia no especificada].

Estos problemas suelen representarse mediante funciones de costos, productividad, eficiencia o desempeño organizacional. La empresa busca un valor de las variables de decisión que haga que dicha función alcance un punto crítico.

Para ello se emplean las derivadas parciales, que permiten medir cómo cambia la función cuando se ajusta cada variable individualmente, manteniendo las demás constantes.

Cuando las derivadas parciales se igualan a cero, se obtienen los puntos críticos, que luego pueden clasificarse como máximos, mínimos o puntos de silla, analizando la matriz Hessiana (segundas derivadas parciales).

Importancia en la economía

En economía, los modelos multivariados sin restricciones son ampliamente usados para estudiar:

- Funciones de producción como Cobb-Douglas, donde se busca el nivel óptimo de capital y trabajo.
- Funciones de utilidad, en las que los consumidores maximizan su bienestar sujeto únicamente a sus preferencias (cuando aún no se incorpora la restricción presupuestaria).
- Funciones de costos o ingresos de empresas en competencia perfecta o imperfecta.
- Análisis macroeconómicos donde se optimizan niveles de inversión, consumo o ahorro.

Un caso típico es maximizar el beneficio económico:

$$\pi(Q, K, L) = \text{Ingresos}(Q) - \text{Costos}(K, L)$$

Aquí, la empresa decide simultáneamente cuánto producir (Q) y cuánto capital (K) y trabajo (L) contratar.

Interpretación económica de los puntos críticos

Cuando se encuentran puntos críticos sin restricciones, estos representan:

- Máximo: la combinación de variables que genera el mayor beneficio, utilidad o productividad.
- Mínimo: el nivel más bajo posible de costo o desperdicio.
- Punto de silla: combinación que no es óptima y presenta comportamientos mixtos (crece en una dirección, pero disminuye en otra).

En economía, los máximos y mínimos tienen significados relevantes:

- Un mínimo de costos implica eficiencia productiva.
- Un máximo de utilidad representa el nivel de satisfacción más alto alcanzable sin restricciones.
- Un máximo de beneficio determina la operación racional de una empresa.

Ejemplo aplicado: función Cobb-Douglas

Si la función de producción es:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

La empresa puede analizar qué combinación de capital (K) y trabajo (L) maximiza la producción cuando no hay restricciones.

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial K}, \frac{\partial Q}{\partial L}$$

Esto permite identificar si existen niveles óptimos de factores dada la tecnología disponible (A) y las elasticidades (α, β) .

Ventajas de este tipo de análisis:

- Permite estudiar fenómenos complejos con múltiples variables.
- Facilita decisiones óptimas sin considerar aún restricciones externas.

- Ofrece una primera aproximación antes de incluir restricciones reales como presupuestos, tecnología o disponibilidad de recursos.
- Es la base para modelos más avanzados como programación lineal, maximización con restricciones (Lagrange) y modelos econométricos.

Limitaciones:

- En el mundo real habitualmente existen restricciones (presupuesto, tiempo, capacidad).
- Puede haber múltiples soluciones o ninguna.
- La interpretación económica depende del contexto y de la forma de la función.

Conclusión

La optimización multivariada sin restricciones constituye una de las herramientas matemáticas más poderosas y versátiles para el análisis avanzado en economía, administración, ingeniería y ciencias computacionales. Su capacidad para modelar sistemas complejos donde múltiples variables interactúan simultáneamente y donde la estructura funcional suele ser altamente no lineal, permite comprender, simular y resolver problemas que serían inaccesibles mediante técnicas analíticas tradicionales. Desde la calibración de modelos macroeconómicos, la construcción de portafolios financieros y el entrenamiento de redes neuronales profundas, hasta el control óptimo de sistemas dinámicos y la gestión sostenible de recursos agrícolas y ambientales, la optimización multivariada demuestra su valor estratégico en escenarios reales y de alto impacto.

Este tipo de análisis no solo posibilita identificar puntos óptimos de producción, utilidad, costos o eficiencia, sino que además ofrece una mirada profunda sobre la sensibilidad de los sistemas y la interacción entre variables críticas. Aunque carece de restricciones explícitas, su aplicación constituye la base conceptual para modelos más sofisticados y realistas que incorporan limitaciones económicas, tecnológicas y operativas. En conjunto, las aplicaciones revisadas evidencian que la optimización multivariada sin restricciones no es solo un ejercicio matemático, sino un pilar fundamental para la toma de decisiones informada, el diseño de políticas, la

innovación tecnológica y la construcción de soluciones robustas frente a los desafíos contemporáneos.

Referencias citadas en la clase 11

Azinovic, M., & Žemlička, J. (2023). Economics-Inspired Neural Networks with Stabilizing Homotopies. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2303.14802>

Blanchard, O., & Johnson, D. R. (2013). *Macroeconomics* (6th ed.). Pearson.

Bonaldi, P., Prada, J. D., González, A., & Rodríguez, D. A. (2009). Método numérico para la calibración de un modelo DSGE. Banco de la República de Colombia.

Chen, T., & Ludkovski, M. (2019). Adaptive Robust Utility Maximization via Machine Learning. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1912.00244>

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental methods of mathematical economics* (4th ed.). McGraw-Hill.

Fernández-Villaverde, J., & Rubio-Ramírez, J. (2007). Estimating DSGE Models: A Sensitivity Analysis. *Review of Economic Studies*, 74(3), 725–770.

Forrester, A., Sobester, A., & Keane, A. (2008). *Engineering Design via Surrogate Modelling*. Wiley.

Frank, R. H., Bernanke, B., & Antonovics, K. (2022). *Principles of microeconomics* (8th ed.). McGraw-Hill.

Heizer, J., Render, B., & Munson, C. (2020). *Operations management* (13th ed.). Pearson.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2015). *Linear and nonlinear programming* (4th ed.). Springer.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford University Press.

Mayorga Romero, I. (2024). Aplicaciones del modelamiento matemático en la optimización de la nutrición vegetal. *Polo del Conocimiento*, 9(9).

Rawlings, J., Mayne, D., & Diehl, M. (2017). *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob Hill Publishing.

Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics: A modern approach* (9th ed.). W.W. Norton.

Definición de los términos citados en la clase 11

Optimización multivariada. Es la disciplina que busca maximizar o minimizar una función objetiva que depende de varias variables simultáneamente, analizando cómo interactúan entre sí para identificar la combinación que ofrece el mejor resultado posible. Puede aplicarse sin restricciones, cuando las variables pueden tomar cualquier valor, o con restricciones, cuando existen límites que deben cumplirse. Es fundamental en economía, administración, ingeniería y ciencias de datos, ya que permite resolver problemas complejos, modelar decisiones y encontrar soluciones eficientes en sistemas con múltiples factores interrelacionados.

Aplicaciones avanzadas. Son el uso de técnicas modernas de optimización multivariada para resolver problemas complejos, no lineales y de alta dimensionalidad en áreas como economía, finanzas, inteligencia artificial, ingeniería y sostenibilidad. Integran métodos numéricos y computacionales de frontera para analizar sistemas reales, manejar grandes volúmenes de datos y tomar decisiones óptimas en escenarios dinámicos e inciertos.

Profundización clase 11

Optimización en modelos macroeconómicos y DSGE

En la macroeconomía contemporánea, los modelos DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) representan uno de los marcos analíticos más utilizados para estudiar el comportamiento agregado de la economía bajo

incertidumbre. Estos modelos incorporan agentes optimizadores, expectativas racionales, fricciones nominales y reales, así como shocks estocásticos que afectan de manera dinámica al sistema. Para que un DSGE sea útil en la práctica, es indispensable estimar o calibrar sus parámetros estructurales, tales como elasticidades, coeficientes de fricción, persistencia de shocks o tasas de depreciación.

La calibración y estimación de estos parámetros implica solucionar un problema de optimización multivariada sin restricciones, donde el objetivo es minimizar una función de error que mide qué tan bien el modelo reproduce los datos observados. Estas funciones suelen ser altamente no lineales, presentar múltiples óptimos locales y requerir evaluaciones computacionalmente costosas, especialmente cuando el modelo incluye expectativas y ecuaciones dinámicas acopladas.

Debido a esta complejidad, el proceso de optimización combina algoritmos globales —como *Simulated Annealing*, *Particle Swarm Optimization*, algoritmos evolutivos y métodos híbridos— que exploran ampliamente el espacio de soluciones para evitar quedar atrapados en mínimos locales. Una vez identificado un conjunto prometedor de parámetros, se aplican métodos locales de alta precisión, como los algoritmos de Newton, quasi-Newton (BFGS, L-BFGS) o Gauss-Newton, que permiten refinar la solución y mejorar la convergencia hacia un punto óptimo.

Estos procedimientos son especialmente relevantes porque los modelos DSGE deben reproducir patrones empíricos claves de la economía real, como la volatilidad del PIB, la persistencia de la inflación, la dinámica del empleo y la respuesta ante shocks monetarios o de oferta. La optimización rigurosa de parámetros permite que el modelo refleje de forma coherente el comportamiento macroeconómico observado, incluso bajo shocks aleatorios, expectativas endógenas y estructuras no lineales.

El uso de optimización avanzada en DSGE es esencial para:

- Diseñar y evaluar políticas monetarias, como reglas tipo Taylor, metas de inflación o respuestas ante crisis.
- Realizar predicciones macroeconómicas bajo diferentes escenarios futuros.

- Construir ejercicios de estrés económico para bancos centrales y autoridades financieras.
- Analizar efectos contrafactuales, como reformas fiscales, choques externos o cambios en productividad.

En síntesis, la optimización multivariada es un componente crítico que permite transformar los modelos DSGE en herramientas confiables para la toma de decisiones macroeconómicas y para el análisis riguroso del comportamiento agregado de la economía.



La excelencia no se improvisa

síguenos

