

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Optimización con restricciones

Clase 12

Introducción

La optimización con restricciones es fundamental en Administración y Economía porque la mayoría de las decisiones deben tomarse dentro de límites concretos como presupuestos, recursos escasos, capacidades productivas o normativas. En contraposición a la optimización sin restricciones, aquí no se aspira únicamente a maximizar o reducir una función objetivo, sino a lograrlo respetando condiciones que reflejan el entorno real en el que una organización o un sistema económico funciona.

Para abordar estos problemas se utilizan técnicas como los multiplicadores de Lagrange, la programación lineal y no lineal, y métodos numéricos modernos que permiten encontrar soluciones factibles y óptimas incluso en escenarios complejos. El objetivo es aplicar estas herramientas para mejorar la eficiencia, asignar recursos de manera estratégica y apoyar decisiones que fortalezcan la gestión administrativa y económica.

Clase: 12

RDA 3: Aplicar las herramientas de optimización en la toma de decisiones en administración y economía.

12.1 Optimización con restricciones

La optimización con restricciones estudia problemas donde se busca maximizar o minimizar una función objetivo $f(x)$ sujeta a un conjunto de condiciones que limitan los valores admisibles de las variables de decisión x . Estas restricciones reflejan limitaciones reales: presupuestos, capacidades, normativas, requisitos técnicos, etc. El propósito es encontrar la mejor solución factible (que cumpla las restricciones) y, cuando procede, interpretar los multiplicadores o precios sombra que miden el valor marginal de relajar dichas restricciones (Bertsekas, 2016).

Formulación general:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Donde g_i son restricciones tipo desigualdad y h_j restricciones de igualdad.

A continuación, se presenta un video en el que se explica la optimización con restricciones.

YouTube, @calculo6882. (13/05/2020). “Optimización con restricciones”
<https://www.youtube.com/watch?v=9u5UCJpBv1M>. YouTube. URL. Recuperado el 15/11/2025.

Clases de restricciones y ejemplos prácticos

- Igualdades: $h(\mathbf{x}) = 0$ p. ej., balance contable, condición de mercado de equilibrio.
- Desigualdades, $g(\mathbf{x}) \leq 0$ o: $g(\mathbf{x}) \geq 0$ p. ej., presupuesto máximo, capacidad productiva, límites regulatorios.
- Box constraints: límites simples $l_k \leq x_k \leq u_k$.
- Enteras/mixtas: variables que deben ser enteras (n.º de máquinas, camiones) → *programación entera*.
- Estos tipos determinan qué métodos numéricos son apropiados y la dificultad computacional del problema (Hillier & Lieberman, 2021).

A continuación, se presenta un video en el que se explica un ejemplo sobre la optimización de una función con restricciones.

YouTube, @Creadoporunperuano (27/09/2021). “Ejercicio sobre la optimización de una función con restricciones”.
<https://www.youtube.com/watch?v=NRSvzBTigkk>. YouTube. URL. Recuperado el 15/11/2025.

Métodos analíticos: Lagrange y condiciones de KKT

Lagrangiana (restricciones de igualdad)

Para restricciones $h_j(\mathbf{x}) = 0$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

Condición de primer orden:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = 0, h_j(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Condiciones KKT (igualdades + desigualdades)

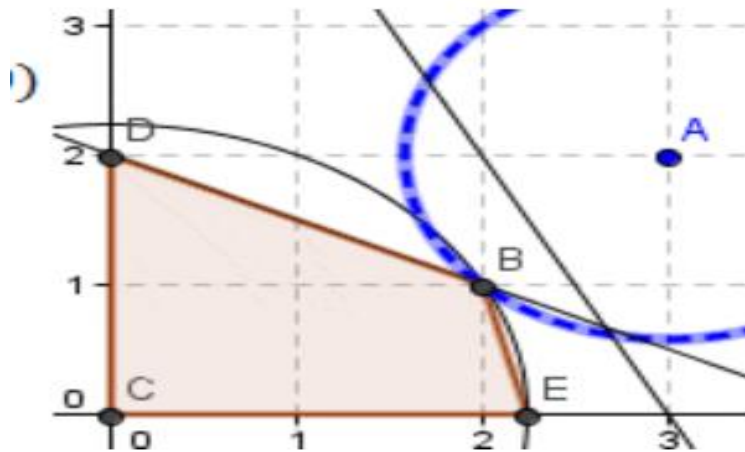
Si además hay desigualdades $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, las condiciones de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) combinan:

- Estacionariedad: $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_j \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) + \sum_i \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$.
- Factibilidad primal: $h_j(\mathbf{x}^*) = 0, g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$.
- Factibilidad dual: $\mu_i \geq 0$.
- Complementariedad: $\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ (si $\mu_i > 0$ entonces $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$).

Las KKT son condiciones necesarias bajo cierta regularidad (condiciones de restricción regular) y suficientes si el problema es convexo (Bertsekas, 2016).

En la figura a continuación se muestran las condiciones de optimalidad establecidas en el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Figura 1. Condiciones de optimalidad en el teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)



Nota. La figura resume las condiciones de optimalidad del teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) aplicadas a problemas de programación no lineal con restricciones. Adaptado de *Teorema de Karush-Kuhn-Tucker* (s. f.), recuperado el 15 de noviembre de 2025 de https://www.gestiondeoperaciones.net/programacion-no-lineal/teorema-de-karush-kuhn-tucker-aplicado-a-un-problema-de-programacion-nolineal/#google_vignette.

¿Qué son las condiciones KKT?

Las condiciones KKT generalizan el método de los multiplicadores de Lagrange para problemas donde existen restricciones de igualdad y de desigualdad, y donde la función objetivo puede no ser lineal.

Se aplican en problemas del tipo:

$$\min f(x) \text{ sujeto a } g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0$$

Incluyen cuatro componentes clave:

1. Estacionaridad

$$\nabla f(x^*) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_j \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

2. Factibilidad primal

$$g_i(x^*) \leq 0, h_j(x^*) = 0$$

3. Factibilidad dual

$$\lambda_i \geq 0$$

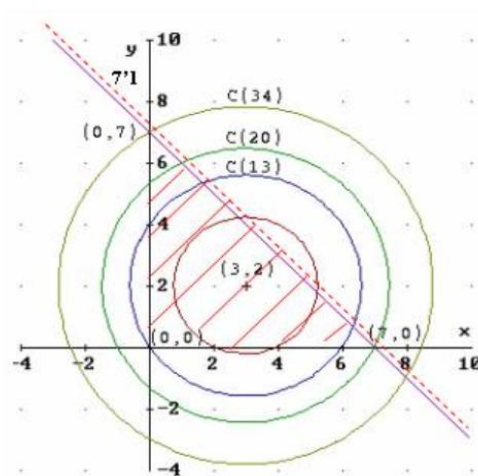
4. Complementariedad

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0$$

✓ ¿Para qué sirven?

En la figura a continuación se muestra una función de producción y la pregunta es si se conseguiría mejorar la producción si la restricción $x + y \leq 7$, pasa a ser $x + y \leq 7.1$

Figura 2. Estructura de las funciones en varias variables



Nota. La figura ilustra la estructura de funciones de varias variables en un contexto de optimización con restricciones de desigualdad. Adaptado de “*Optimización con restricciones de desigualdad*”, Universitat de Barcelona (s. f.), recuperado el 15 de noviembre de 2025 de <https://www.ub.edu/matheopt/optimizacio-economica/condicion-de-khun-tucker>.

Los KKT permiten identificar puntos candidatos a óptimos en problemas comunes de administración y economía, como:

- Maximización de beneficios con restricciones de recursos.

- Modelos de producción.
- Portafolios financieros sujetos a límites de riesgo.
- Equilibrio general computable.
- Asignación óptima en logística y operaciones.

Condiciones de segundo orden y clasificación

Las condiciones de segundo orden y su clasificación constituyen una fase esencial en el análisis de problemas de optimización con o sin restricciones. Una vez identificados los puntos candidatos mediante las Condiciones de KKT o el método de Lagrange, es necesario evaluar su naturaleza para determinar si corresponden a un mínimo local, máximo local o punto silla.

Para ello, se emplea la Hessiana de la Lagrangiana, es decir, la matriz de segundas derivadas que captura la curvatura del problema. En presencia de restricciones, el análisis es más complejo: la Hessiana no se evalúa sobre todo el espacio, sino únicamente sobre el subespacio tangente a las restricciones activas, que refleja las direcciones permitidas de variación del sistema. Este procedimiento permite determinar si la curvatura es positiva (mínimo), negativa (máximo) o indefinida (punto silla), asegurando así una correcta clasificación del punto crítico.

Tal como explican Nocedal y Wright (2006), este enfoque proporciona un criterio robusto para garantizar optimalidad en problemas no lineales, especialmente en contextos donde la estructura de restricciones influye significativamente en la geometría del espacio factible.

Métodos numéricos y algoritmos prácticos

Según la estructura del problema:

- Programación lineal (PL): objetivo y restricciones lineales: *Simplex* e *Interior Point*. Muy usado en asignación de recursos, logística y planificación.
- Programación cuadrática (QP): objetivo cuadrático, restricciones lineales; útil en optimización de portafolios (Markowitz).

- Programación no lineal (NLP) objetivo o restricciones no lineales: métodos *SQP* (*sequential quadratic programming*), *interior-point* para no lineal, *trust-region*, *Newton/Cuasi-Newton* (Nocedal & Wright, 2006; Bertsekas, 2016).
- Optimización entera mixta (MIP): variables enteras + continuas: ramificación y acotamiento (*branch-and-bound*), heurísticas.
- Métodos globales (si no convexa): búsquedas globales, algoritmos evolutivos, *simulated annealing* o métodos híbridos, seguidos de refinamiento local.

Herramientas: Excel Solver, MATLAB (*fmincon*, *linprog*, *quadprog*), Python (*SciPy.optimize*, *CVXOPT*, *Pyomo*, *Gurobi*), GAMS, LINGO.

Interpretación económica: multiplicadores / valores sombra

Los multiplicadores de Lagrange λ (o los multiplicadores KKT μ) tienen interpretación económica: representan el valor marginal de relajar una restricción (precio sombra). Por ejemplo, en asignación presupuestaria, λ indica cuánto aumentaría el objetivo (beneficio social) por una unidad adicional de presupuesto (Arrow–Debreu/teoría del dual económico) (Rockafellar & Wets, 2009).

Ejemplo (asignación de presupuesto)

Maximizar impacto $I(x_1, x_2)$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq B$, $x_i \geq 0$.

Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = I(x_1, x_2) + \lambda(B - x_1 - x_2)$$

KKT y solución dan asignaciones x_i^* y valor sombra λ^* que informa si vale la pena ampliar el presupuesto.

Ejemplo: Interpretación económica del valor sombra en asignación presupuestaria

Supongamos que una institución pública debe asignar un presupuesto de $B = 100$ unidades monetarias entre dos programas sociales:

- x_1 : programa de nutrición,
- x_2 : programa de educación.

El impacto total está dado por la función:

$$I(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2}.$$

La restricción presupuestaria es:

$$x_1 + x_2 \leq 100, x_1, x_2 \geq 0.$$

La lagrangiana es:

$$L = 4\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2} + \lambda(100 - x_1 - x_2).$$

Al resolver las condiciones KKT, se obtiene:

- Asignación óptima:

$$x_1^* = 64, x_2^* = 36.$$

- Valor sombra óptimo:

$$\lambda^* = 0.25.$$

Interpretación económica del resultado

El multiplicador $\lambda^* = 0.25$ indica que, si el presupuesto aumentara en una unidad, el impacto total máximo aumentaría 0.25 unidades.

Esto significa que el presupuesto es *estrictamente vinculante*: la institución obtiene un beneficio marginal positivo si se relaja la restricción.

En términos económicos:

- Si el costo de obtener 1 unidad adicional de presupuesto es menor que 0.25 unidades de impacto, conviene ampliar el presupuesto.
- Si cuesta más que 0.25, no es eficiente hacerlo.

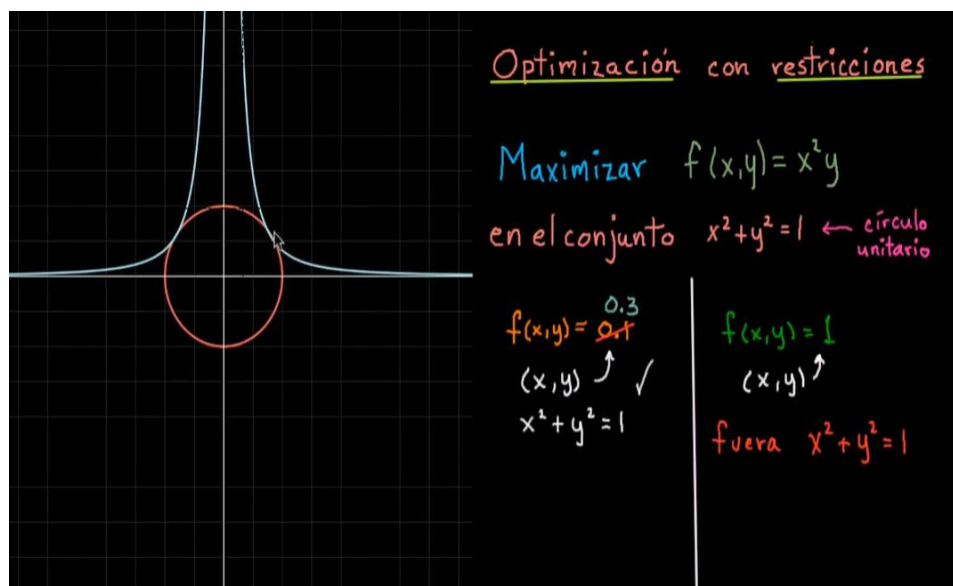
Este valor sombra resume la contribución marginal del recurso escaso y orienta decisiones de planificación y eficiencia (Rockafellar & Wets, 2009).

Buenas prácticas en modelación

- Verificar convexidad: si el problema es convexo, cualquier mínimo local es global (mayor seguridad).
- Escalar variables y regularizar cuando sea necesario (mejor numerics).
- Realizar análisis de sensibilidad: cómo cambian soluciones y multiplicadores si varían parámetros.
- Validar resultados con simulaciones o pruebas empíricas antes de aplicar decisiones.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de una función de optimización con restricciones.

Figura 3. Ejemplo de optimización con restricciones



Nota. La figura ilustra un ejemplo gráfico de optimización con restricciones para una función de varias variables. Adaptado de *Introducción a la optimización con restricciones* [Video], de Khan Academy, 2017, YouTube

(<https://www.youtube.com/watch?v=hoiWLbvzzeM>)

12.1 Tipos de restricciones en optimización

En los problemas de optimización con restricciones, las restricciones definen el conjunto de soluciones factibles dentro del cual se debe encontrar el óptimo. Estas restricciones representan límites reales en administración, economía, operaciones o ingeniería, como presupuestos, capacidades, normativas o requerimientos técnicos. La naturaleza de las restricciones afecta directamente la complejidad del problema y determina qué métodos numéricos pueden utilizarse (Boyd & Vandenberghe, 2023; Bertsekas, 2016).

A continuación, se presentan los tipos más comunes:

1. Restricciones de igualdad ($h(x) = 0$)

Estas restricciones obligan a que una relación se cumpla exactamente.

Ejemplos:

- Balance contable: ingresos – gastos = 0
- Condición de mercado: demanda = oferta
- Conservación de flujos o materiales en procesos productivos

Implicaciones:

- Reducen la dimensión efectiva del problema.
- Son tratadas con multiplicadores de Lagrange.

2. Restricciones de desigualdad ($g(x) \leq 0$ o $g(x) \geq 0$)

Permiten que la relación se cumpla dentro de un límite. Son las más comunes en economía y administración.

Ejemplos:

- Presupuesto máximo: $C(x) \leq B$
- Capacidad productiva: $Q(x) \leq Q_{\text{max}}$

- Límites regulatorios: emisiones $\leq$ umbral permitido
- Margen mínimo de rentabilidad: $r(x) \geq r_{\min}$

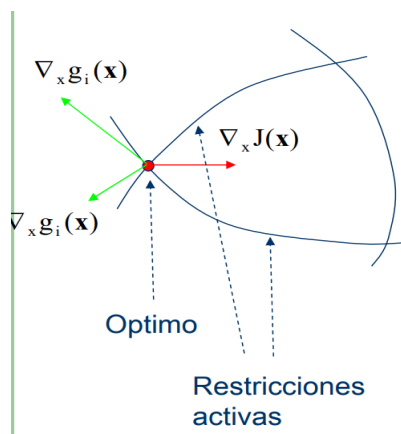
Implicaciones:

- Entran en los criterios KKT (Karush–Kuhn–Tucker).
- Pueden ser “activas” (se cumplen como igualdad) o “inactivas”.

En la figura a continuación se muestra un problema con restricciones de desigualdad.

Figura 4

Problema con restricciones de desigualdad



Problema con restricciones de desigualdad

$$\nabla_x J(\mathbf{x}) = -\sum_i \mu_i \nabla_x g_i(\mathbf{x})$$

Dado que, en el óptimo, para las restricciones activas $\mu > 0$ el gradiente de J , que es una combinación lineal de los gradientes de g_i (activas), debe estar en un semiplano distinto a estos últimos

Nota. La figura ilustra un problema de optimización con restricciones de desigualdad en programación matemática. Tomado de *Optimización con restricciones* [Apuntes], por C. de Prada (s. f.), recuperado el 15 de noviembre de 2025 de <https://www.eii.uva.es/~prada/KKT.pdf>

3. Restricciones de caja (box constraints)

Son límites simples, típicamente individuales, sobre cada variable:

$$l_i \leq x_i \leq u_i$$

Ejemplos:

- Precio mínimo y máximo permitido
- Cantidades físicas no negativas
- Límites técnicos: temperatura, velocidad, uso de insumos

Implicaciones:

- Sencillas de manejar computacionalmente.
- Muy utilizadas en modelos de portafolios y en machine learning.

4. Restricciones de no negatividad

Caso especial de restricciones de caja:

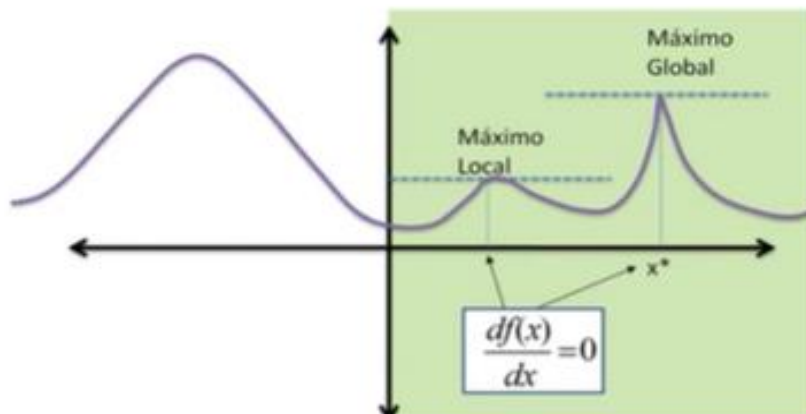
$$x_i \geq 0$$

Ejemplos:

- Cantidades producidas
- Horas de trabajo asignadas
- Inversión en un activo (no puede ser negativa si no se permite short selling)

En la figura a continuación se muestra una gráfica de optimización con restricciones de no negatividad.

Figura 5. *Optimización con restricciones de no negatividad*



Nota. La figura representa un esquema de optimización sujeto a restricciones de no negatividad, mostrando el efecto de dichas restricciones sobre el conjunto factible y la solución óptima. Adaptado de *Optimización con restricciones de no negatividad* [Video], de H. Acuña, 2020, YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=VflkMlhbF9U>).

5. Restricciones enteras y mixtas (MIP)

Algunas variables deben tomar valores enteros (1, 2, 3...) o valores binarios (0/1).

Ejemplos:

- Número de máquinas
- Selección de proyectos
- Decisiones logísticas (ruta o no ruta)
- Variables que representan “sí/no” u “on/off”

Implicaciones:

- Hacen el problema no convexo.
- Se usan métodos como branch-and-bound, branch-and-cut y heurísticas.

6. Restricciones no lineales

Aparecen cuando la función que describe el límite no es lineal.

Ejemplos:

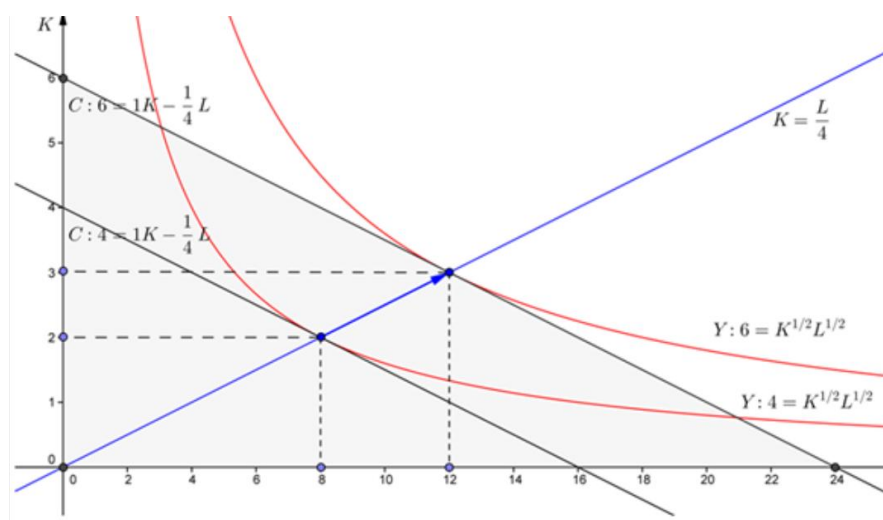
- Elasticidades en demanda: $g(x) = p \cdot q - k \leq 0$
- Restricciones físicas en modelos de energía
- Fronteras no lineales en producción (tipo Cobb–Douglas)
- Modelos macroeconómicos no lineales (DSGE)

Implicaciones:

- Requieren métodos avanzados:
 - SQP (sequential quadratic programming)
 - Métodos de región de confianza
 - Interior-point no lineal

En la figura a continuación se muestra una gráfica de una función de producción con programación no lineal.

Figura 6. *Función de producción con programación no lineal*



Nota. La figura representa un ejemplo de función de producción modelada mediante programación no lineal, mostrando la relación entre insumos y producto bajo determinadas restricciones. Adaptado de *Función de producción con programación no lineal*, por R. Apaza, 2013, <https://ruben-apaza.blogspot.com/2013/07/funcion-produccion-no-lineal.html>

7. Restricciones lógicas o disyuntivas

Las restricciones lógicas o disyuntivas aparecen cuando las decisiones dentro de un modelo no pueden expresarse únicamente con ecuaciones o inecuaciones lineales tradicionales. Estas restricciones describen relaciones del tipo “*si-entonces*”, “*o-exclusivo*”, “*y*”, “*no simultáneo*” o “*activación condicional*”. Dado que las decisiones reales suelen ser discretas, encender o no una máquina, abrir o no una sucursal, elegir una ruta u otra. Estas restricciones capturan la lógica empresarial y transforman el modelo en un problema de programación entera o entera-mixta (MIP).

A diferencia de las restricciones continuas, las restricciones lógicas requieren variables binarias, que permiten representar estados (0 = no se activa, 1 = se activa).

Este tipo de modelación es crucial en situaciones donde las decisiones son interdependientes y afectan directamente la viabilidad de las operaciones o inversiones.

Ejemplos típicos

- Dependencia condicional:

“Si se abre la planta A (variable binaria = 1), entonces deben contratarse al menos X trabajadores”.

Esto obliga a que una decisión activa genere otra decisión asociada.

- Disyunción exclusiva (OR):

“O se invierte en el proyecto 1 o en el proyecto 2, pero no en ambos”.

Permite modelar escenarios de selección estratégica con recursos limitados.

- Mutua exclusión:

“No pueden operar simultáneamente la máquina A y la máquina B”.

Usado en control de procesos, turnos y sistemas de seguridad.

- Activación de capacidades:

“Solo si se activa el centro logístico, se puede usar su capacidad de almacenamiento”.

Implicaciones en modelación y computación

- Transforman el problema en MIP:

La necesidad de variables binarias y disyunciones convierte el modelo en entero-mixto, incrementando la complejidad computacional.

- Dificultan la convexidad:

La solución ya no se puede obtener con métodos lineales o convexos clásicos; se requieren técnicas como *branch-and-bound*, *branch-and-cut* heurísticas.

- Permiten modelar decisiones altamente realistas:

Son esenciales en problemas de planificación estratégica, diseño de redes logísticas, selección de inversiones, gestión de capacidad, scheduling y optimización de portafolios con reglas complejas.

- Mayor interpretación de resultados:

Las variables binarias actúan como interruptores que revelan decisiones estratégicas claves, facilitando la toma de decisiones.

12.2 Optimización con restricciones de igualdad

Las restricciones de igualdad aparecen en problemas donde las variables de decisión deben cumplir relaciones exactas, como balances contables, identidades estructurales, condiciones de conservación o ecuaciones tecnológicas. Matemáticamente, estos problemas se formulan como:

$$\min f(x) \text{ s.a. } h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$$

Estas restricciones definen un subespacio o variedad factible en la que deben ubicarse las soluciones. Para resolver este tipo de problemas, uno de los métodos más utilizados es el método de multiplicadores de Lagrange, que transforma el problema restringido en uno sin restricciones mediante la función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x)$$

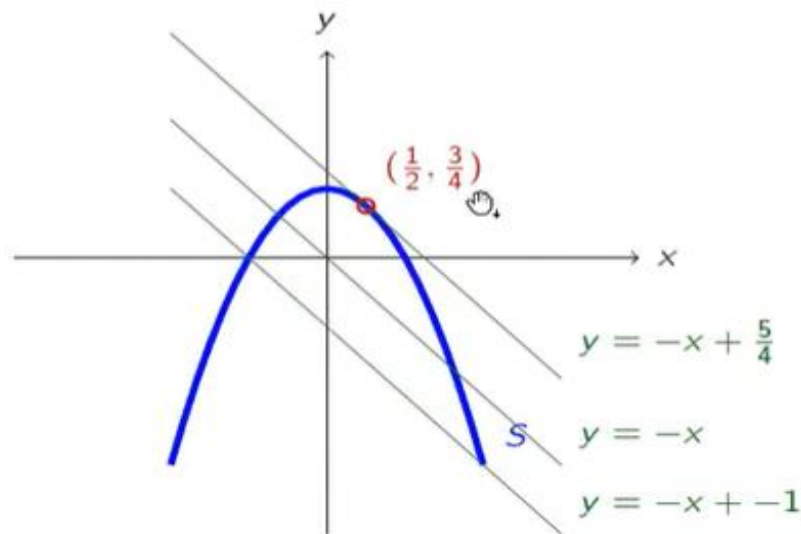
Los puntos óptimos candidatos se obtienen resolviendo las condiciones de primer orden:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0, h_j(x) = 0.$$

Estas condiciones representan la idea geométrica de que, en el óptimo, el gradiente de la función objetivo es ortogonal al conjunto factible, reflejando que cualquier variación permitida no mejora la solución (Nocedal & Wright, 2006). En economía, estas condiciones permiten interpretar los multiplicadores de Lagrange como precios sombra, que capturan el valor marginal de relajar cada restricción de igualdad (Varian, 2020).

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de optimizaciones con restricciones de igualdad.

Figura 7. Ejemplo de optimización con restricciones de igualdad



Nota. La figura ilustra un ejemplo de optimización con restricciones de igualdad aplicado a funciones de varias variables. Adaptado de *Optimización con restricciones de igualdad* [Video], Universidad de Uruguay, 2020, YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=tsy2S9CL4Bg>).

Una vez obtenidos los candidatos, se aplican condiciones de segundo orden para verificar si se trata de un mínimo, máximo o punto silla. En este proceso se evalúa la Hessiana de la Lagrangiana proyectada sobre el espacio tangente a las restricciones, lo

que determina la curvatura de la función dentro del conjunto factible (Boyd & Vandenberghe, 2023).

En la práctica, los problemas con igualdades aparecen en múltiples áreas: modelos de equilibrio general (restricciones de contabilidad), programación de producción (balances de material), optimización de portafolios (suma de pesos igual a uno) y modelos macroeconómicos (identidades de ingreso y gasto). Herramientas modernas como MATLAB, Python–SciPy, Pyomo, GAMS o R implementan algoritmos especializados para manejar restricciones de igualdad mediante métodos tipo Newton, SQP o interior-point (Gill et al., 2021).

Conclusión

Las restricciones lógicas o disyuntivas representan un componente esencial en la formulación de modelos de optimización que deben capturar decisiones reales de naturaleza discreta. A través del uso de variables binarias y estructuras condicionales, estos modelos permiten reflejar de manera precisa la lógica operativa y estratégica de sistemas complejos, tales como la asignación de recursos, la gestión de capacidades, la selección de proyectos o la operación de equipos.

Aunque su incorporación transforma el problema en uno de programación entera o entera-mixta, incrementando su dificultad computacional, también amplía significativamente la capacidad del modelo para representar situaciones del mundo real con mayor fidelidad.

En consecuencia, las restricciones lógicas no solo enriquecen el poder descriptivo y prescriptivo de los modelos, sino que también fortalecen el proceso de toma de decisiones al permitir que las soluciones derivadas estén alineadas con limitaciones, dependencias y reglas que realmente gobiernan la operación de una organización.

Referencias citadas en la Clase 12

Bertsekas, D. P. (2016). *Nonlinear Programming* (3rd ed.). Athena Scientific.

- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2023). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific.
- Gill, P. E., Murray, W., & Saunders, M. A. (2021). Optimization methods and software for large-scale constrained problems. *SIAM Review*, 63(4), 661–684
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* (11th ed.). McGraw-Hill Education.
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer.
- Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational Analysis* (3rd ed.). Springer.
- Varian, H. R. (2020). *Intermediate microeconomics: A modern approach* (11th ed.). W. W. Norton.
- Wright, S. (1997). *Primal-dual interior-point methods*. SIAM.

Definición de los términos citados en la Clase 12

Restricciones. Son condiciones matemáticas que limitan las posibles soluciones de un modelo de optimización. Representan las capacidades, recursos, reglas, relaciones lógicas o límites físicos que deben cumplirse obligatoriamente para que una solución sea factible. Estas condiciones suelen expresarse como ecuaciones o inecuaciones (igualdades o desigualdades) y pueden involucrar variables continuas, enteras o binarias. Su función principal es asegurar que el modelo describa fielmente el sistema real, evitando soluciones que violen requisitos operativos, tecnológicos, económicos o lógicos.

Variables binarias. Son variables de decisión que solo pueden tomar los valores 0 o 1, y se usan para representar decisiones del tipo sí/no, activar/desactivar o seleccionar/no seleccionar. Son esenciales en modelos de optimización entera y mixta porque permiten expresar restricciones lógicas, condiciones, disyunciones y decisiones estratégicas que no pueden representarse con variables continuas.

Profundización Clase 12

Restricciones no lineales

Las restricciones no lineales surgen cuando la relación que limita el espacio factible del problema no puede expresarse como una combinación lineal de las variables. En estos casos, la restricción incluye productos entre variables, exponentes, funciones logarítmicas, cuadráticas, exponenciales o cualquier estructura matemática que genere curvaturas en la frontera factible. Este tipo de restricciones es común en modelos donde los fenómenos económicos, físicos o técnicos no siguen relaciones proporcionales simples.

Ejemplos representativos.

- Elasticidades en demanda:

Relaciones como

$$g(x) = p \cdot q - k \leq 0$$

Combinan precio y cantidad de forma multiplicativa, lo cual genera una restricción no lineal con implicaciones importantes en análisis de mercados.

- Restricciones físicas en modelos de energía:

Procesos como pérdidas por transmisión, eficiencia térmica o conversión energética suelen describirse mediante funciones cuadráticas o exponenciales.

- Fronteras no lineales en producción (Cobb–Douglas, CES):

Por ejemplo:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^\beta \geq Y^*$$

Representa rendimientos marginales decrecientes y sustituibilidad imperfecta.

- Modelos macroeconómicos no lineales (por ejemplo, DSGE):

Las ecuaciones que representan expectativas, utilidad intertemporal o ajustes de precios incluyen logaritmos, exponenciales o ecuaciones de Euler no lineales.

Implicaciones en el análisis y la optimización

- Requieren métodos avanzados de solución:

Dado que las restricciones no lineales pueden generar múltiples óptimos locales, curvas complejas y regiones no convexas, se emplean algoritmos especializados como:

- SQP (Sequential Quadratic Programming): Aproxima el problema mediante subproblemas cuadráticos.
- Métodos de región de confianza: Evalúan soluciones dentro de una región acotada y adaptativa para mejorar la estabilidad numérica.
-
- Mayor complejidad computacional:

A diferencia de los modelos lineales, las restricciones no lineales suelen aumentar el tiempo de cómputo y requieren buenas condiciones iniciales para converger.

- Capturan fenómenos más realistas:

A pesar de su complejidad, permiten modelar comportamientos verdaderamente observables en sistemas económicos, productivos, físicos y financieros.

- Interpretación más profunda:

Sus soluciones pueden revelar efectos marginales no constantes, relaciones de complementariedad o sustitución y comportamientos dinámicos que no pueden representarse con modelos lineales.



La excelencia no se improvisa

síguenos

