

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Restricciones complejas

Clase 15

1. Introducción

Las restricciones complejas surgen en cuestiones de optimización en las que las decisiones están condicionadas por relaciones no lineales, múltiples variables, límites institucionales o interdependencias tecnológicas. A diferencia de las restricciones simples, estas pueden involucrar funciones no diferenciables, regiones no convexas o condiciones lógicas que reducen el espacio factible y dificultan la búsqueda de soluciones óptimas.

En economía y gestión, este tipo de restricciones aparece en contextos como la planificación de producción con incertidumbre, la gestión de riesgos financieros, la asignación de recursos con externalidades o los sistemas energéticos con capacidades límite. Su análisis requiere herramientas avanzadas como programación no lineal, condiciones KKT y métodos computacionales para formular decisiones eficientes y aplicables en entornos reales.

Clase: 15

RDA 3: Aplicar las herramientas de optimización en la toma de decisiones en administración y economía.

15. Restricciones complejas

En los modelos de optimización económica y empresarial, las restricciones complejas son aquellas que no pueden representarse mediante relaciones lineales simples o condiciones directas de igualdad o desigualdad. Estas restricciones suelen involucrar estructuras matemáticas avanzadas, interdependencias entre variables, funciones no diferenciables o condiciones lógicas que limitan el espacio factible de forma no trivial. Su presencia refleja la realidad de los sistemas económicos contemporáneos, donde las decisiones deben considerar factores dinámicos, incertidumbre y múltiples dimensiones tecnológicas o institucionales.

A continuación, se presenta un video en el que se explica el Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), para la solución de problemas de optimización con restricciones.

MADRINAN, JC. 2021/05/27. “Teorema de Karush Kuhn Tucker (KKT), para la solución de problemas de optimización con restricciones”. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=ZA2gKq85M1U&t=5s>. Recuperado 15/11/2025

Desde una perspectiva formal, una restricción se vuelve compleja cuando presenta una o varias de las siguientes características:

- No linealidad, como funciones cuadráticas, exponenciales o logarítmicas que afectan la factibilidad y la convexidad del problema.
- Dependencias múltiples, donde una variable factible depende simultáneamente de varios parámetros o umbrales.
- Restricciones no convexas, que generan espacios factibles con múltiples mínimos locales.
- Condiciones lógicas o discretas, por ejemplo, decisiones binarias (0–1), combinaciones permitidas o secuencias obligatorias.
- Restricciones dinámicas, donde la factibilidad depende del tiempo, como en modelos intertemporales o de inventarios.
- Incertidumbre explícita, modelada mediante escenarios estocásticos, restricciones robustas o probabilísticas.

En la figura 1 a continuación se muestra cuándo una restricción se vuelve compleja cuando presenta una o varias de las siguientes características.

Figura 1. *Características de restricciones complejas*



Nota. La figura presenta las principales características asociadas a las restricciones complejas. Elaboración propia, 2025, con apoyo de OpenAI.

En economía y gestión, las restricciones complejas son especialmente relevantes en contextos donde la operación está sujeta a múltiples condicionantes. En la producción, pueden aparecer restricciones tecnológicas que relacionan insumos de forma no proporcional o rendimientos marginales no constantes. En las finanzas, surgen límites regulatorios, requisitos de liquidez o medidas de riesgo no lineales como el Value at Risk (VaR) o el Conditional Value at Risk (CVaR).

En logística y cadenas de suministro, es frecuente enfrentar capacidades fluctuantes, horarios, rutas obligatorias o decisiones secuenciales que deben cumplirse simultáneamente.

La presencia de restricciones complejas implica que las herramientas tradicionales como métodos de optimización lineal o análisis gráfico resultan insuficientes. Por ello, su tratamiento requiere técnicas más sofisticadas, como las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), la programación no lineal (NLP), la programación entera mixta (MIP/MIQP), la optimización robusta y los métodos

numéricos iterativos. Estas técnicas permiten caracterizar la solución óptima, identificar la factibilidad y analizar el impacto marginal de las restricciones mediante valores sombra y multiplicadores asociados.

En la figura 2 a continuación se muestran las características de las restricciones complejas.

Figura 2. *Restricciones complejas*



Nota. La figura muestra un gráfico sobre restricciones complejas. Elaboración propia, 2025, con apoyo de OpenAI.

MIP → Programación entera mixta. Problemas con variables enteras y función objetivo lineal.

MIQP → Programación Cuadrática Entera Mixta. Problemas con variables enteras y función objetivo cuadrática.

MIP: Mixed-Integer Programming (Programación Entera Mixta)

Es un tipo de problema de optimización donde algunas variables son enteras (por ejemplo, 0–1, 1–n) y otras pueden ser continuas.

- La función objetivo es lineal.
- Las restricciones también son lineales.
- Se usa cuando hay decisiones discretas:
 - “encender/apagar”,
 - “sí/no”,
 - “Seleccionar entre opciones”,
 - Cantidades que solo pueden ser enteras.

Ejemplos: rutas de transporte, asignación de turnos, selección de proyectos, planificación de inversiones.

MIQP: Mixed Integer Quadratic Programming (Programación Cuadrática Entera Mixta)

Es similar al anterior, pero la función objetivo es cuadrática (incluye términos como x^2 o productos x_1x_2).

- Algunas variables son enteras.
- Las restricciones pueden seguir siendo lineales.
- Se usa cuando el objetivo incluye relaciones no lineales suaves, como riesgo, varianza, eficiencia energética o costos no lineales.

Ejemplos:

- Optimización de portafolios con decisiones binarias (invertir o no invertir),
- modelos energéticos con costos crecientes,
- problemas de control óptimo con discretización,
- Asignación con penalizaciones cuadráticas.

En síntesis, las restricciones complejas reflejan la naturaleza multifacética de los problemas reales y obligan a los analistas a integrar enfoques matemáticos avanzados y herramientas computacionales modernas. Su correcta formulación y

tratamiento permiten construir modelos más realistas, diseñar estrategias más precisas y apoyar decisiones que responden mejor a los desafíos económicos actuales.

15.1. Restricciones de desigualdad y no negatividad

Las restricciones de desigualdad constituyen uno de los componentes más comunes en los modelos de optimización, ya que permiten representar límites tecnológicos, presupuestarios o regulatorios que acotan la región factible. Formalmente, pueden expresarse como:

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

Este tipo de restricciones define un conjunto de soluciones que depende de la forma funcional de $g_i(x)$. Si las funciones son lineales, el problema suele ser convexo y más sencillo de resolver; sin embargo, en presencia de no linealidades (cuadráticas, exponenciales, logarítmicas), la factibilidad puede volverse más compleja, dando lugar a espacios no convexos y múltiples óptimos locales (Nocedal & Wright, 2006).

Un caso especial, pero fundamental dentro de esta clase, lo constituyen las restricciones de no negatividad, comúnmente expresadas como:

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Estas restricciones son esenciales porque muchas variables económicas como producción, inventarios, inversiones o precios no pueden adoptar valores negativos. Su inclusión asegura que las soluciones sean física y económicamente interpretables (TaHERi & Hagan, 2019).

Desde la teoría de la optimización, las restricciones de desigualdad y no negatividad se incorporan mediante condiciones de optimalidad tipo Karush–Kuhn–Tucker (KKT). Los multiplicadores asociados deben cumplir:

- No negatividad del multiplicador:

$$\lambda_i \geq 0$$

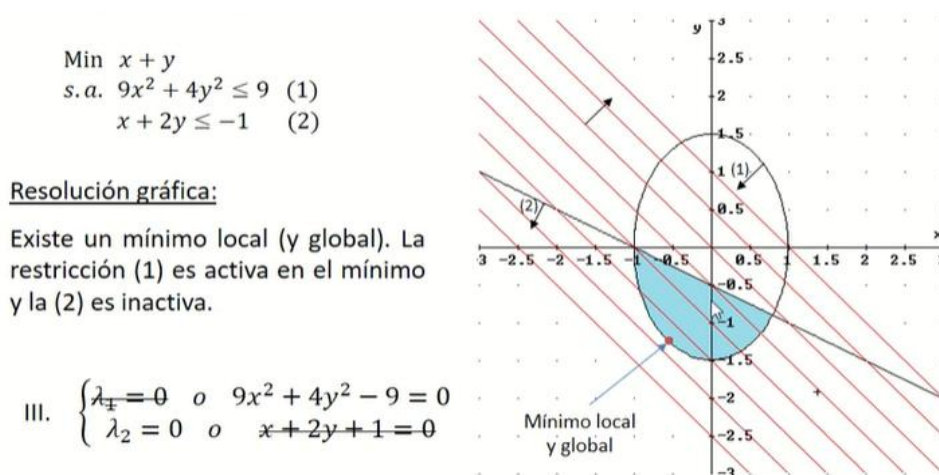
- Condición de complementariedad:

$$\lambda_i g_i(x) = 0$$

En la figura 3 a continuación se muestra un problema con restricción de desigualdad.

Figura 3

Problema con restricción de desigualdad



Nota: siempre que podamos resolver gráficamente ($\mathbb{R}^2$) para obtener información sobre las restricciones activas e inactivas en los óptimos, lo hacemos y empleamos dicha información para resolver las condiciones del Kuhn-Tucker.

Nota. La figura representa un problema de optimización con una restricción de desigualdad, mostrando la región factible y la recta de restricción. Tomado de Luque (2021), video en YouTube, recuperado el 15 de noviembre de 2025.

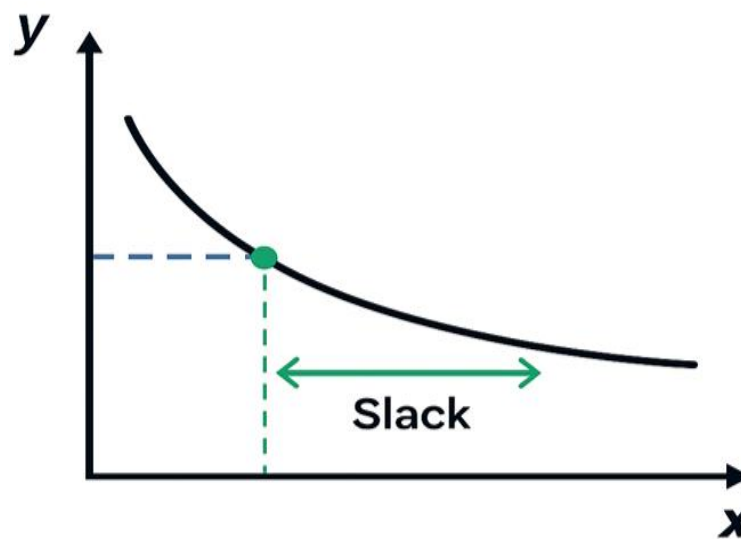
Estas condiciones permiten determinar cuándo una restricción es activa, es decir, cuándo se encuentra exactamente en el límite de factibilidad y, por lo tanto, está frenando o condicionando la solución óptima. Cuando una restricción es activa, cualquier intento de mejorar el objetivo violaría dicha restricción, lo que significa que el recurso asociado se ha utilizado por completo o está siendo gestionado al máximo de su capacidad permitida.

En contraste, una restricción inactiva es aquella que no opera como un límite real en la solución óptima; existe “holgura”, por lo que relajarla no genera cambios en el valor objetivo del problema. Este análisis permite identificar qué factores, recursos o condiciones son verdaderamente críticos dentro del sistema.

En la figura 4 a continuación se muestra el diagrama de una restricción inactiva

Figura 4

Restricción inactiva



Nota. La figura representa un problema de optimización en el que la restricción es inactiva, es decir, no afecta al punto óptimo de la solución. Elaboración propia, 2025, con apoyo de OpenAI.

Además, la teoría de optimización introduce una herramienta clave para interpretar el papel económico de estas restricciones: los valores duales. Estos son los valores asociados a los multiplicadores de Lagrange o KKT y representan el incremento marginal en el valor del objetivo (por ejemplo, utilidad, beneficio, impacto social) si se relajara la restricción en una unidad adicional (Rockafellar & Wets, 2009). En otras palabras, indican cuánto vale un recurso escaso desde la perspectiva del modelo.

Un precio sombra alto implica que la restricción es muy costosa: liberar un poco más del recurso generaría una ganancia significativa en el objetivo. Por el contrario, un

precio sombra igual a cero sugiere que la restricción no afecta a la solución óptima, reflejando abundancia relativa del recurso o irrelevancia en ese contexto.

“Precio sombra (valor dual): variación marginal del objetivo al relajar una restricción en 1 unidad.”

En la figura 5 a continuación se muestra el diagrama de un precio sombra

Figura 5. *Precio sombra*



Nota. La figura ilustra el concepto de precio sombra (valor dual) como la variación marginal de la función objetivo al relajar una restricción en una unidad en un problema de optimización. Elaboración propia, 2025, con apoyo de OpenAI.

A continuación, se presenta un video en el que se explica qué es y cómo se calcula el precio sombra.

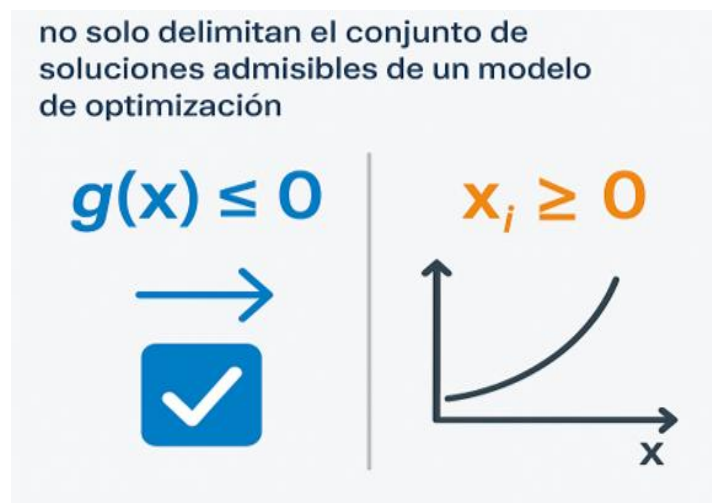
CIENCIAS, E. 2021/06/29. “Precio dual, precio sombra”. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Kx9yBvBWb70>. Recuperado 15/11/2025

Esta interpretación es crucial en economía, finanzas, logística y planificación, porque permite asignar recursos escasos con base en su verdadero costo de oportunidad, identificar cuellos de botella y evaluar si conviene invertir en ampliar capacidades, flexibilizar límites o modificar reglas operativas. Así, los multiplicadores no son solo objetos matemáticos, sino indicadores estratégicos para la toma de decisiones.

Las restricciones de desigualdad (por ejemplo $g(x) \leq 0$) y las restricciones de no negatividad ($x_i \geq 0$) no solo delimitan el conjunto de soluciones admisibles de un modelo de optimización, sino que condicionan profundamente la naturaleza matemática, numérica y la interpretación económica de la solución.

En la figura 6 a continuación se muestra un diagrama de las restricciones de desigualdad y no negatividad.

Figura 6. Restricciones de desigualdad y no negatividad



Nota. La figura representa un problema de optimización con restricciones de desigualdad y condiciones de no negatividad sobre las variables de decisión, delimitando la región factible correspondiente. Elaboración propia, 2025, con apoyo de OpenAI.

A continuación, se detallan los aspectos más relevantes y sus implicaciones prácticas.

1. Definen el espacio factible y determinan factibilidad

Las desigualdades y las restricciones de no negatividad construyen el conjunto factible (la región donde se busca la solución). Si las restricciones son estrictas o poco compatibles entre sí, el conjunto factible puede ser vacío, lo que obliga a revisar la modelación, o muy reducido, lo que implica soluciones con recursos muy acotados. La

formulación correcta de estas restricciones es clave para que el modelo represente fielmente la realidad y sea matemáticamente coherente (Boyd & Vandenberghe, 2004).

2. Actividad de la restricción y complementariedad

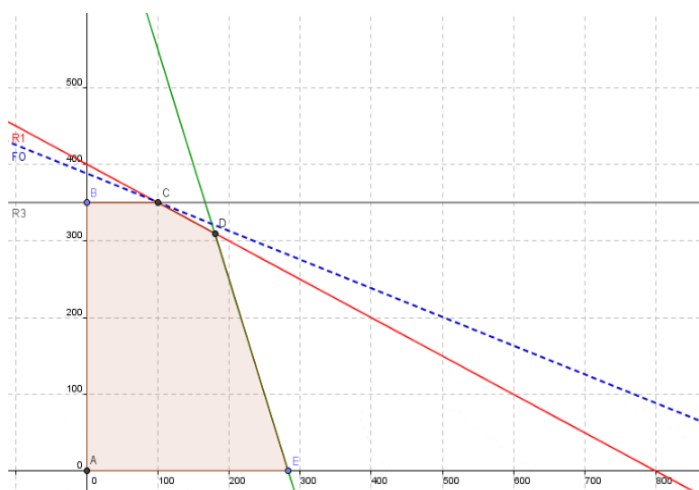
Una restricción de desigualdad se dice activa en la solución si se cumple como igualdad; $g_i(x^*) = 0$ si no, es inactiva. Esta distinción es central porque solo las restricciones activas afectan localmente la solución y suelen aparecer en las condiciones óptimas (KKT). La condición de complementariedad (en KKT) vincula el multiplicador dual con la actividad de la restricción: si el multiplicador es positivo, la restricción está activa; si es cero, la restricción es inactiva (Bertsekas, 2016).

3. Interpretación económica y costo de oportunidad

Los multiplicadores duales (o multiplicadores de Lagrange asociados a desigualdades) representan el valor marginal del recurso restringido o, dicho de otro modo, cuánto aumentaría el objetivo por relajar la restricción en una unidad. En asignación de presupuesto, un multiplicador λ asociado a la restricción de gasto indica cuánto mejoraría el beneficio si se incrementa el presupuesto en una unidad. Esta interpretación conecta la solución numérica con decisiones económicas (Varian, 2014).

En la figura 7 a continuación se muestra un diagrama de cálculo gráfico del precio sombra.

Figura 7. Precio sombra, cálculo gráfico



Nota. La figura muestra el cálculo gráfico del precio sombra asociado a una restricción en un problema de optimización. Tomado de YouTube, recuperado el 15 de noviembre de 2025.

Las desigualdades pueden mantener la convexidad (p. ej., g_i convexas) o romperla (no convexas). Si el problema es convexo, KKT son condiciones necesarias y suficientes y la resolución es más robusta; si no es convexo, aparecen múltiples óptimos locales y la optimización exige búsquedas globales o heurísticas. Las restricciones de no negatividad son relativamente sencillas computacionalmente (son box-constraints), pero combinadas con enteros o no linealidad elevan la complejidad.

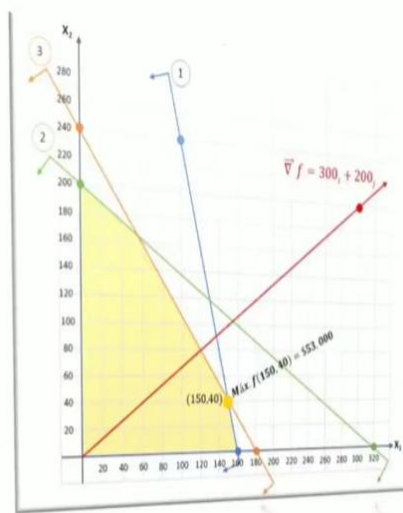
5. Análisis de sensibilidad y valores duales

Los multiplicadores permiten análisis de sensibilidad: indican cómo varía el valor óptimo ante pequeños cambios en los recursos o límites. Esto sirve para priorizar inversiones (¿dónde conviene aumentar capacidad?) y evaluar trade-offs entre restricciones. En modelos lineales, la relación entre duales y cambios es especialmente directa (dualidad lineal), mientras que en modelos no lineales la interpretación requiere cautela y verificaciones numéricas (Bertsekas, 2016).

En la figura 8 a continuación se muestra un diagrama del análisis de sensibilidad.

Figura 8

Análisis de sensibilidad



Análisis de Sensibilidad Método Gráfico



Nota. La figura representa un análisis de sensibilidad aplicado a un problema de optimización, mostrando cómo varía la solución óptima ante cambios en los parámetros del modelo. Tomado de YouTube, recuperado el 15 de noviembre de 2025.

6. Condiciones regulares y validez de las aproximaciones

Para que las condiciones KKT y la interpretación de multiplicadores sean válidas, se requieren condiciones regulares. Si estas condiciones fallan, pueden existir multiplicadores no únicos o perderse garantías teóricas sobre optimalidad y sensibilidad; por eso la verificación de hipótesis regulares forma parte del diagnóstico del modelo.

7. Implicaciones prácticas de modelación y computación

- Escalado y normalización: Variables con escalas muy distintas perjudican la convergencia numérica; escalar mejora estabilidad.
- Preprocesado: detectar restricciones redundantes o inconsistentes ayuda a simplificar el problema y reducir tiempos de solución.
- Interpretación crítica de duales: en modelos no lineales o sin regularidad, interpretar valores sombra exige pruebas de sensibilidad numérica o análisis por escenarios.

8. Recomendaciones de modelación

- Formular restricciones de forma explícita y realista (no esconder supuestos implícitos).
- Incluir no negatividad cuando las variables representen cantidades físicas o monetarias.
- Verificar factibilidad con casos extremos (stress tests).
- Realizar análisis de sensibilidad sobre límites clave para valorar la robustez de decisiones.
- Documentar los multiplicadores y su interpretación económica para que stakeholders entiendan el valor marginal de recursos.

En conjunto, las restricciones de desigualdad y no negatividad no solo definen los límites del espacio factible, sino que también ofrecen herramientas analíticas para evaluar eficiencia, escasez y respuesta óptima ante cambios en recursos o condiciones del entorno. Su correcta formulación es clave para garantizar que los modelos sean matemáticamente consistentes y económicamente interpretables.

Conclusión

Las restricciones complejas representan un elemento esencial en los modelos modernos de optimización, ya que reflejan la verdadera naturaleza de los sistemas económicos, financieros, productivos y logísticos, donde intervienen múltiples factores no lineales, interdependientes y sujetos a incertidumbre. Su presencia obliga a abandonar métodos tradicionales y adoptar herramientas avanzadas como programación no lineal, optimización robusta y condiciones KKT, que permiten caracterizar la factibilidad, interpretar los y comprender el impacto marginal de los recursos escasos.

En este sentido, dominar el análisis y la formulación de estas restricciones fortalece la capacidad de los profesionales para diseñar modelos realistas, evaluar decisiones estratégicas y resolver problemas complejos en la administración y la economía. En conjunto, comprender y gestionar adecuadamente las restricciones complejas contribuye al aprendizaje esperado, al potenciar el uso riguroso de la optimización como herramienta central en la toma de decisiones.

Referencias citadas en la Clase 15

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press. Stanford University

Bertsekas, D. P. (2016). *Nonlinear Programming* (2nd ed.). Athena Scientific. SpringerLink

Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer.

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (2009). *Variational Analysis*. Springer.

Taheri, S., & Hagan, M. T. (2019). Nonnegativity and inequality constraints in optimization models. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 180(1), 1–25.

Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach* (9th ed.). W.W. Norton & Company.

Definición de los términos citados en la Clase 15

Restricciones complejas. Son condiciones que limitan un problema de optimización y cuya estructura (no linealidad, variables discretas, dependencias múltiples, no convexidad, dinámicas en el tiempo o incertidumbre) dificulta describir el espacio factible y resolver el modelo con métodos tradicionales. Al representar procesos reales más detallados, requieren técnicas avanzadas como programación no lineal, entera mixta u optimización robusta para identificar soluciones factibles y coherentes. Estas restricciones permiten capturar mejor la complejidad de sistemas económicos, operativos o de ingeniería.

Restricciones de desigualdad. Son condiciones que limitan un problema de optimización estableciendo valores máximos o mínimos permitidos, mediante expresiones como $g - \text{se abre paréntesis} - x - \text{se cierra paréntesis} - \text{menor que o igual a } 0$ o mínimos permitidos, mediante expresiones como $g(x) \leq 0$ o $g(x) \geq 0$. Estas restricciones representan recursos escasos o requisitos mínimos y definen qué soluciones son factibles. Además, influyen en las condiciones óptimas del modelo y permiten interpretar económicamente la escasez a través de los valores sombra.

Profundización Clase 15

Precio sombra

El precio sombra (o *valor dual*) es un concepto central en optimización y economía que mide cuánto mejoraría el valor óptimo de un modelo si se relajara ligeramente una restricción activa, como disponer de un recurso adicional. En otras



palabras, indica el beneficio marginal de aumentar en una unidad la disponibilidad de un recurso escaso, manteniendo todo lo demás constante.

Cuando una restricción es activa, el precio sombra muestra cuán “valioso” es ese límite para la solución:

- Un precio sombra alto significa que el recurso es muy escaso y que liberar un poco más generaría una mejora significativa en el objetivo (por ejemplo, más utilidad, menor costo o mayor ganancia).
- Un precio sombra igual a cero indica que la restricción no está afectando la solución óptima, hay holgura y, por lo tanto, aumentar el recurso no cambia el resultado del modelo.

Este concepto es clave en análisis económico, planificación de recursos, finanzas y políticas públicas, porque ayuda a identificar qué restricciones son realmente críticas y dónde conviene invertir o reasignar recursos para mejorar el desempeño de un sistema.



La excelencia no se improvisa

síguenos

