

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Modelos exponenciales y logarítmicos

Clase 4

Introducción

En el ámbito de la economía, la administración y las finanzas, comprender el comportamiento de variables que crecen o decrecen de manera no lineal es fundamental para la planificación y la toma de decisiones estratégicas. Los modelos exponenciales y logarítmicos, junto con la capitalización continua y el uso de exponentes y logaritmos, constituyen herramientas matemáticas esenciales para este propósito. Estas herramientas permiten analizar fenómenos como la evolución de inversiones, la proyección de ventas, la productividad laboral o la expansión de mercados, donde los cambios no son uniformes, sino que pueden acelerarse o estabilizarse con el tiempo.

Además, los exponentes y logaritmos facilitan la resolución de ecuaciones complejas y la linealización de relaciones no lineales, lo que permite aplicar técnicas econométricas y estadísticas para evaluar tasas de crecimiento, elasticidades y rendimientos de manera precisa. En conjunto, estos modelos proporcionan a los profesionales la capacidad de interpretar datos complejos, proyectar escenarios futuros y tomar decisiones fundamentadas en análisis cuantitativos rigurosos, fortaleciendo así la gestión eficiente de recursos y la planificación estratégica en entornos económicos y financieros dinámicos. El estudio de las herramientas matemáticas aplicadas a la Administración y la Economía permite modelar relaciones entre variables, analizar fenómenos empresariales y económicos y fundamentar la toma de decisiones en datos cuantitativos y análisis lógico.

Clase: 4

RDA 1: Emplear las herramientas matemáticas en funciones univariadas y multivariadas en la administración y la economía.

1.1 Modelos exponenciales y logarítmicos

Los modelos exponenciales y logarítmicos son herramientas matemáticas fundamentales para analizar fenómenos de crecimiento, transformación y cambio no lineal en los ámbitos de la economía y la administración. A diferencia de las funciones lineales, en las que las variaciones se producen a una tasa constante, estos modelos describen situaciones donde las variaciones son proporcionales al valor actual de la

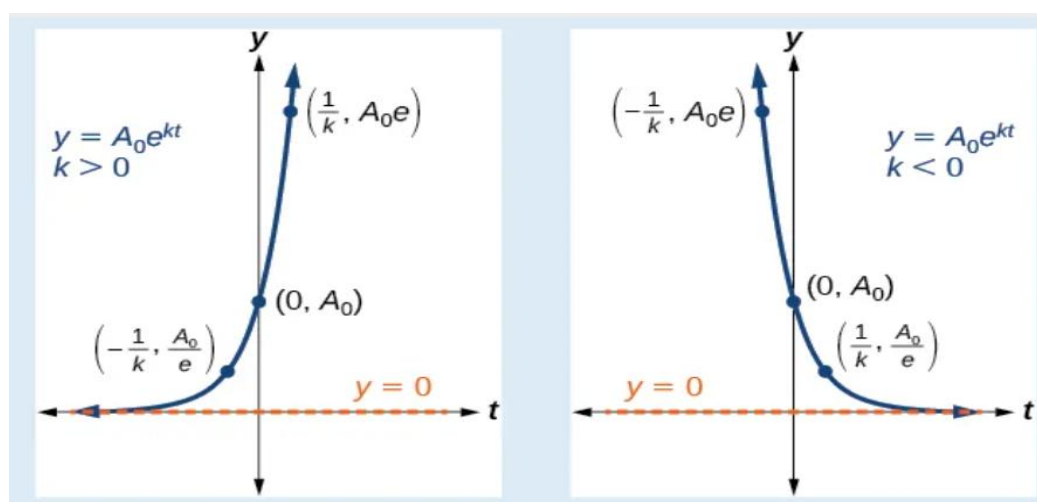
variable, lo que permite captar procesos de aceleración o desaceleración del crecimiento.

En el caso de las funciones exponenciales, la tasa de cambio aumenta en proporción al tamaño de la variable, generando un crecimiento rápido y sostenido. Este comportamiento es característico de fenómenos como el crecimiento del capital con interés compuesto, la expansión de mercados emergentes o el aumento de la población o la demanda de bienes tecnológicos. Por su parte, las funciones logarítmicas representan procesos donde el crecimiento es alto al inicio, pero se reduce progresivamente, reflejando una tendencia hacia la estabilidad o la madurez, común en situaciones de saturación del mercado, aprendizaje organizacional o difusión de innovaciones.

Estas funciones son esenciales para los analistas y gestores, ya que permiten proyectar escenarios futuros, evaluar la eficiencia de las inversiones y tomar decisiones estratégicas informadas en contextos de cambio. Según Chiang y Wainwright (2017), los modelos exponenciales y logarítmicos facilitan la comprensión de las relaciones dinámicas entre variables económicas, haciendo posible representar con mayor precisión la realidad compleja de los sistemas financieros y productivos.

En la gráfica detallada a continuación se pueden visualizar algunos ejemplos de funciones exponenciales.

Figura 1. *Funciones exponenciales*



Nota. La figura muestra el comportamiento característico de las funciones exponenciales para apoyar la comprensión de su uso en contextos matemáticos y financieros. Tomado de CEUPE y OpenStax (s. f.), <https://www.ceupe.com/blog/que-funciones-tiene-la-gestion-financiera.html> y <https://openstax.org/books/prec%C3%A1culo-2ed/pages/4-7-modelos-exponenciales-y-logaritmicos>. [Licencia según los recursos originales].

Modelos Exponenciales

Un modelo exponencial describe situaciones en las que una cantidad cambia a una tasa proporcional a su valor actual, lo que implica un crecimiento o decrecimiento continuo. Su forma general es:

$$y = ae^{bx}$$

Donde a es el valor inicial, b la tasa de crecimiento o decrecimiento y e la base de los logaritmos naturales (Sydsaeter et al., 2016).

Estos modelos son muy útiles en el análisis del crecimiento económico, la depreciación de activos, la proyección de ventas o el interés compuesto. Por ejemplo, si una empresa incrementa sus ventas a una tasa del 10 % anual, el modelo exponencial permite estimar sus ventas futuras como $V(t) = V_0 e^{0.10t}$, donde V_0 es el valor inicial (Varian, 2019).

El crecimiento exponencial se caracteriza por un aumento acumulativo, lo que refleja procesos de expansión sostenida como la adopción de tecnologías o la evolución de mercados emergentes (Mankiw, 2020).

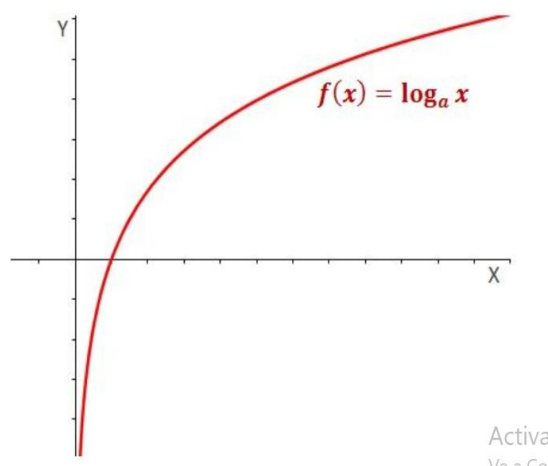
Modelos logarítmicos

Los modelos logarítmicos expresan relaciones donde la variación de una variable disminuye a medida que otra crece. Su forma general es:

$$y = a + b \ln(x)$$

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar un ejemplo de función logarítmica.

Figura 2. *Funciones logarítmicas*



Nota. La figura representa la gráfica de una función logarítmica, utilizada para apoyar la comprensión de su comportamiento y de sus propiedades básicas en el análisis matemático. Adaptado de Universo Fórmulas (s. f.),

<https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-logaritmica/>.

[Licencia según el recurso original].

En economía, este tipo de modelos describe procesos de rendimientos decrecientes, curvas de aprendizaje o saturación del mercado. Por ejemplo, el aumento de la productividad laboral suele ser rápido al inicio, pero se estabiliza con el tiempo (Chiang & Wainwright, 2017).

Además, los modelos logarítmicos son muy utilizados en la estimación de elasticidades:

$$\ln(Q) = a + b \ln(P)$$

Donde b mide la elasticidad-precio de la demanda, es decir, el grado de sensibilidad de la cantidad demandada frente a los cambios en el precio (Varian, 2019).

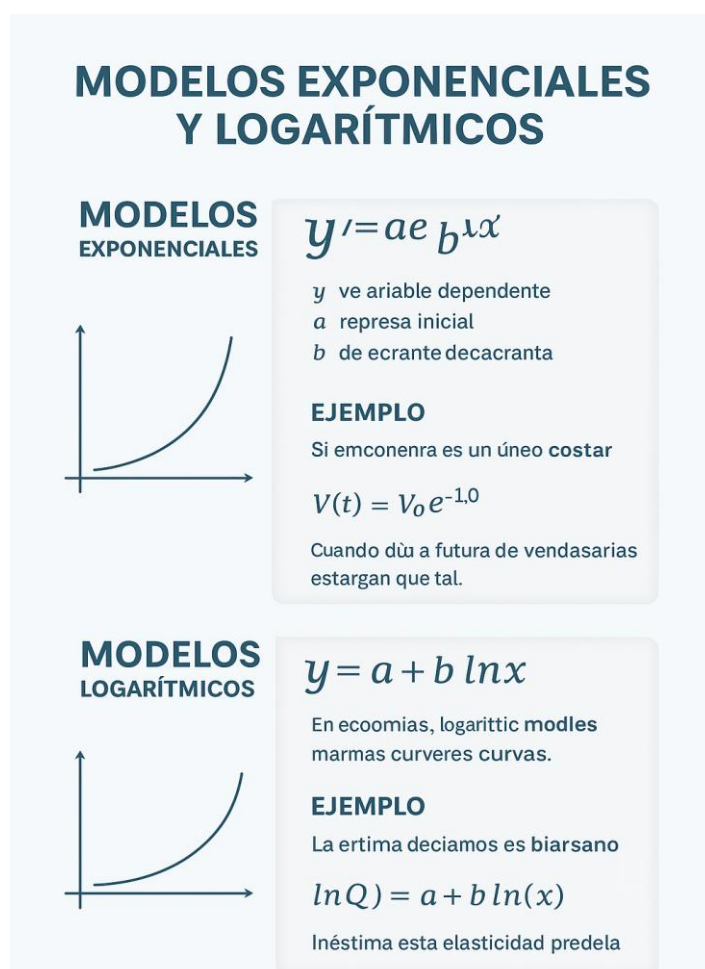
Aplicaciones en Administración y Economía

Los modelos exponenciales y logarítmicos permiten predecir comportamientos dinámicos y planificar estrategias de crecimiento sostenible.

- En finanzas, sirven para calcular rendimientos compuestos e inflación acumulada.
- En marketing, ayudan a modelar la difusión de innovaciones y el crecimiento de la participación de mercado.
- En economía, explican procesos de crecimiento a largo plazo y la transición hacia rendimientos decrecientes (Mankiw, 2020).

En la gráfica detallada a continuación se pueden visualizar ejemplos de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Figura 3. *Funciones exponenciales y logarítmicas*



Nota. La figura presenta de manera comparativa el comportamiento de funciones exponenciales y logarítmicas, resaltando sus diferencias y relaciones para apoyar el análisis e interpretación de modelos matemáticos. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA. [Derechos reservados].

La capacidad de representar fenómenos no lineales convierte a estos modelos en herramientas indispensables para la toma de decisiones estratégicas basadas en evidencia cuantitativa (Sydsaeter et al., 2016).

1.1.1 Capitalización continua

La capitalización continua es un proceso financiero en el cual los intereses generados por una inversión se reinvierten de manera constante e infinitesimal, lo que permite un crecimiento ininterrumpido del capital. A diferencia de la capitalización discreta (anual, semestral o mensual), en la capitalización continua los intereses se suman al principal en cada instante del tiempo, generando una tasa de crecimiento exponencial (Mankiw, 2020).

La fórmula general de la capitalización continua se expresa como:

$$A = Pe^{rt}$$

donde:

- A = monto final acumulado,
- P = capital inicial o principal,
- r = tasa de interés anual expresada en forma decimal,
- t = tiempo en años,
- e = número de Euler (aproximadamente 2.71828), base de los logaritmos naturales (Sydsaeter et al., 2016).

Esta expresión deriva del límite del modelo de capitalización compuesta tradicional cuando la frecuencia de capitalización tiende al infinito:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = Pe^{rt}$$

La capitalización continua es muy utilizada en finanzas avanzadas, especialmente en la valoración de bonos, derivados financieros y crecimiento de inversiones a largo plazo. También se aplica en el análisis económico, para modelar procesos de crecimiento continuo como el aumento de la población, la expansión del capital o la evolución de precios en mercados competitivos (Chiang & Wainwright, 2017).

Desde el punto de vista económico, este tipo de crecimiento refleja el rendimiento compuesto en su forma más eficiente, pues los intereses se reinvierten sin interrupciones. Así, permite aproximarse a modelos más realistas de comportamiento del capital en el tiempo (Varian, 2019).

Un ejemplo práctico: si se invierten \$10,000 a una tasa del 5 % anual bajo capitalización continua durante 10 años, el monto final será:

$$A = 10,000 \times e^{0.05 \times 10} = 10,000 \times e^{0.5} \approx 16,487.21$$

Esto muestra que la capitalización continua genera un retorno ligeramente superior al de una capitalización discreta, debido al efecto acumulativo constante.

En administración financiera, la capitalización continua facilita la evaluación de proyectos de inversión, el cálculo del valor presente y futuro de flujos monetarios y la determinación de tasas efectivas en operaciones de corto plazo.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar la explicación de la capitalización continua.

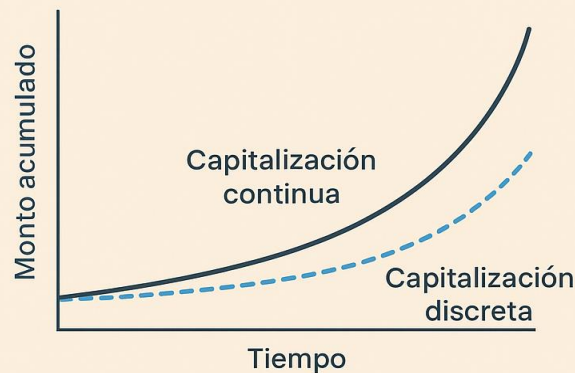
Figura 4. *Capitalización continua*

CAPITALIZACIÓN CONTINUA

La capitalización continua es un proceso financiero en el cual los intereses se reinvierten constantemente, lo que conduce a un crecimiento exponencial del capital

$$A = Pe^{rt}$$

A = monto final P = capital inicial
r = tasa de interés t = tiempo



La capitalización continua genera un crecimiento exponencial y generalmente produce un monto final ligeramente mayor en comparación con la capitalización discreta.

Nota. La figura ilustra el concepto de capitalización continua, mostrando la evolución del capital en función del tiempo bajo un crecimiento exponencial en contextos financieros. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA. [Derechos reservados].

En economía, se emplea para modelar crecimientos exponenciales del capital o del PIB, así como para representar procesos donde el cambio ocurre de forma constante a lo largo del tiempo (Mankiw, 2020; Sydsaeter et al., 2016).

1.1.2 Exponentes y logaritmos

Los exponentes y logaritmos son conceptos matemáticos fundamentales que permiten analizar y representar procesos de crecimiento, decrecimiento y transformación de variables en economía, finanzas y administración. Un exponente expresa cuántas veces una cantidad base se multiplica por sí misma, siendo esencial para describir fenómenos de crecimiento acelerado, como la acumulación de capital, el interés compuesto o la expansión de mercados.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar la diferencia entre exponentes y logaritmos.

Figura 5

Exponentes y logaritmos

EXPONENTES	LOGARITMOS
El exponente indica cuántas veces se multiplica una cantidad base por sí misma	El logaritmo es la función inversa de la exponencial
a^x	$\log_a b = x$
Ejemplo $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$	Ennplo: $\ln e^4 = 4$

Nota. La figura sintetiza la relación entre exponentes y logaritmos, destacando cómo se articulan sus propiedades para facilitar el estudio y la resolución de expresiones matemáticas. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA. [Derechos reservados].

Por su parte, los logaritmos son la operación inversa de las funciones exponenciales y permiten calcular el exponente necesario para obtener un número determinado. En el ámbito financiero, los logaritmos naturales (base e) son especialmente útiles porque simplifican el estudio del crecimiento continuo y de la capitalización compuesta, representada por la fórmula $A = Pe^{rt}$. Además, al aplicar

logaritmos a modelos económicos, es posible linealizar relaciones no lineales, facilitando el uso de técnicas econométricas.

Un ejemplo clásico es el modelo de producción Cobb-Douglas, que al expresarse en logaritmos se convierte en una relación lineal entre producción, capital y trabajo.

A continuación, se evidencia un video en el que se detalla el crecimiento exponencial y logarítmico. Recuperado en 2025. “Crecimiento exponencial y logarítmico” <https://www.youtube.com/watch?v=sWMInsMte6I>

A. Exponentes

Los exponentes expresan el número de veces que una cantidad (la base) se multiplica por sí misma. Matemáticamente, si a es una base y n un exponente, se define:

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a (n \text{ veces})$$

Cuando el exponente n es positivo, la función representa un crecimiento exponencial; cuando es negativo, representa una disminución o decaimiento exponencial.

En economía y finanzas, este principio se aplica para describir el crecimiento compuesto del capital o la expansión de mercados. Por ejemplo, el valor futuro $V(t)$ de una inversión con una tasa de crecimiento r se expresa como:

$$V(t) = V_0(1 + r)^t$$

Donde V_0 es el valor inicial, r la tasa de crecimiento y t el tiempo.

Según Chiang y Wainwright (2021), las funciones exponenciales son esenciales para representar tasas de cambio proporcionales al valor de la variable, lo que refleja fenómenos económicos de crecimiento acelerado o decreciente.

En el siguiente video se aborda con más detalle la función exponencial. Año recuperado, 2025 “Función Exponencial”.

<https://www.youtube.com/watch?v=IhsZKreUPE0>

B. Logaritmos

El logaritmo es la función inversa de la exponencial. Si $a^x = y$, entonces $\log_a(y) = x$. En otras palabras, el logaritmo indica el exponente al que debe elevarse una base a para obtener un número dado y .

El logaritmo natural, con base e (donde $e \approx 2.71828$), se denota como $\ln(x)$ y se utiliza ampliamente en análisis financiero y económico debido a su relación con el crecimiento continuo.

$$\ln(e^x) = x \text{ y } e^{\ln(x)} = x$$

En economía, los logaritmos son útiles para linealizar relaciones no lineales, permitiendo que los modelos se analicen mediante regresiones lineales. Por ejemplo, si la producción Q depende del capital K y del trabajo L , el modelo Cobb-Douglas se expresa como:

$$Q = AK^\alpha L^\beta$$

Aplicando logaritmos, se transforma en una forma lineal:

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

Esto facilita la estimación de los parámetros mediante técnicas econométricas (Romer, 2019).

Aplicaciones en Administración y Economía

1. Crecimiento poblacional y empresarial: Los modelos exponenciales permiten estimar la expansión de una población o el número de clientes en una empresa que crece a una tasa constante.

2. Interés compuesto y capitalización continua: El uso de funciones exponenciales y logarítmicas facilita el cálculo de intereses acumulados en el tiempo.
3. Elasticidades económicas: El logaritmo se utiliza para calcular la elasticidad, que mide la sensibilidad porcentual de una variable respecto a otra:

$$E = \frac{d \ln Q}{d \ln P}$$

4. Depreciación de activos: La disminución del valor de los activos puede modelarse mediante funciones exponenciales decrecientes.

D. Interpretación gráfica

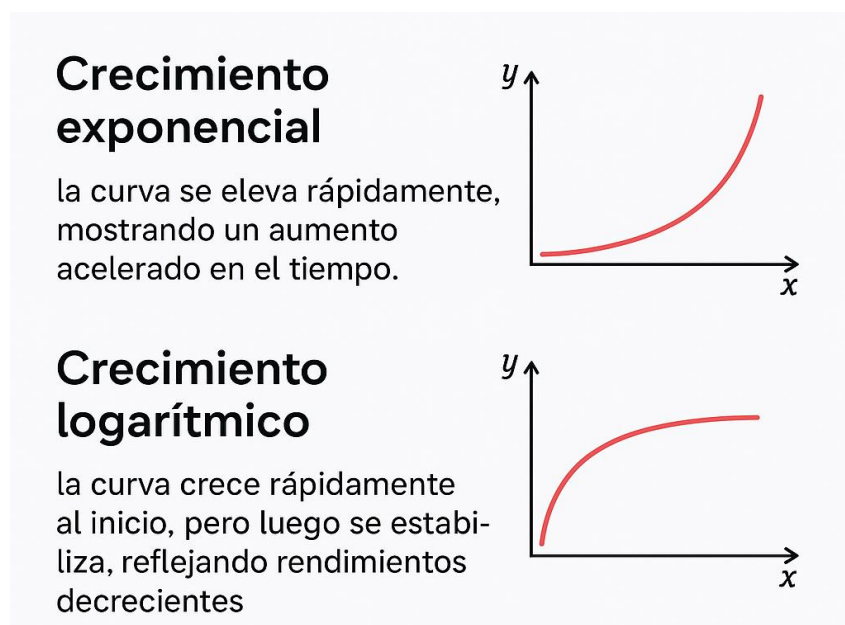
El análisis gráfico de los modelos exponencial y logarítmico permite comprender el comportamiento dinámico de distintos fenómenos económicos y administrativos.

- Crecimiento exponencial: La curva se eleva rápidamente a medida que pasa el tiempo, mostrando un aumento acelerado y constante en la tasa de cambio. Este tipo de crecimiento es típico en procesos de expansión económica, acumulación de capital, incremento de inversiones o crecimiento poblacional, donde pequeñas variaciones iniciales generan grandes resultados en el largo plazo. Matemáticamente, el crecimiento exponencial se representa como $y = ae^{bx}$, donde la variable dependiente aumenta de manera proporcional a su valor actual.
- Crecimiento logarítmico: La curva crece de forma rápida al inicio, pero luego su pendiente disminuye gradualmente hasta estabilizarse, reflejando rendimientos decrecientes o saturación del crecimiento. Este comportamiento se observa en procesos como la madurez de un mercado, el aprendizaje organizacional o la difusión de innovaciones, donde los beneficios marginales tienden a reducirse con el tiempo. Su forma general es $y = a + b \ln(x)$, donde el crecimiento es cada vez menor conforme aumenta x .

En la gráfica detallada a continuación se pueden visualizar ejemplos del crecimiento exponencial y logarítmicos.

Figura 6

Interpretación gráfica del crecimiento exponencial y logarítmico



Nota. La figura muestra de manera comparativa la representación gráfica de un crecimiento exponencial y uno logarítmico, con el fin de facilitar su interpretación en el estudio de funciones. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA. [Derechos reservados].

En conjunto, estas dos funciones ilustran etapas complementarias de los ciclos económicos y empresariales: la fase de expansión acelerada (modelo exponencial) y la fase de madurez o estabilización (modelo logarítmico). Comprender ambas curvas permite a los administradores y economistas anticipar tendencias, optimizar estrategias de crecimiento y evaluar la sostenibilidad de los procesos a lo largo del tiempo.

Las funciones exponenciales y logarítmicas son herramientas poderosas para comprender y modelar procesos dinámicos en la administración y la economía. Permiten analizar el crecimiento de las inversiones, la productividad, la demanda o los precios a lo largo del tiempo, facilitando una toma de decisiones fundamentada en análisis cuantitativos precisos.

Conclusión

Los modelos exponenciales y logarítmicos, junto con la capitalización continua y el manejo de exponentes y logaritmos, representan herramientas matemáticas fundamentales para la economía, la administración y las finanzas. Estos modelos permiten describir y analizar fenómenos de crecimiento y decrecimiento no lineal, donde las variables cambian de manera acelerada o se estabilizan con el tiempo, como ocurre en la evolución de inversiones, ventas, productividad laboral o expansión de mercados. La capitalización continua, al reinvertir intereses de manera constante, refleja un crecimiento exponencial del capital que aproxima de forma más realista el comportamiento financiero a lo largo del tiempo.

Por su parte, los exponentes y logaritmos facilitan tanto la resolución de ecuaciones exponenciales como la linealización de relaciones no lineales, lo que permite aplicar técnicas econométricas y estadísticas para estimar elasticidades, rendimientos y tasas de crecimiento continuo. En la práctica, estas herramientas son útiles para proyectar la expansión de empresas, calcular intereses compuestos, modelar la depreciación de activos y comprender procesos económicos de saturación o madurez de mercados.

En síntesis, el dominio de los modelos exponenciales y logarítmicos proporciona a los profesionales la capacidad de interpretar datos complejos, realizar proyecciones precisas y tomar decisiones estratégicas basadas en evidencia cuantitativa. Su uso permite anticipar comportamientos dinámicos de variables económicas y financieras, facilitando la planificación, gestión y optimización de recursos en contextos empresariales y económicos.

Referencias citadas en la Clase 4

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2017). *Métodos fundamentales de economía matemática* (4.^a ed.). McGraw-Hill.

Frank, R., & Bernanke, B. (2020). *Principios de economía* (7.^a ed.). McGraw-Hill Education.

- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2021). *Econometría* (6.^a ed.). McGraw-Hill Education.
- Larson, R., & Hodgkins, G. (2022). *Precalculus with Limits* (5th ed.). Cengage Learning.
- Mankiw, N. G. (2020). *Principios de economía* (9.^a ed.). Cengage Learning.
- Stewart, J. (2019). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.^a ed.). Cengage Learning.
- Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A., & Strom, A. (2016). *Further Mathematics for Economic Analysis* (3rd ed.). Pearson Education.
- Varian, H. R. (2019). *Microeconomía intermedia: Un enfoque moderno* (9.^a ed.). Antoni Bosch, editor.

Definición de los términos citados en la Clase 4

Capitalización continua. Es un método financiero en el que los intereses se calculan y se reinvierten de manera constante, sin intervalos definidos, lo que genera un crecimiento exponencial del capital. A diferencia de la capitalización discreta, en la continua los intereses se suman de forma ininterrumpida, representando el límite teórico del interés compuesto. Se expresa mediante la fórmula $A = Pe^{rt}$, donde el capital crece de manera infinitamente fraccionada en el tiempo, reflejando un rendimiento máximo posible bajo una tasa constante.

Logaritmo. Es una operación matemática que permite determinar el exponente al cual debe elevarse una base para obtener un número determinado. En otras palabras, el logaritmo responde a la pregunta: ¿a qué potencia debo elevar una base para obtener cierto resultado? Por ejemplo, en el logaritmo $\log_{10}(100) = 2$, significa que 10 elevado a la 2 da 100. Los logaritmos son fundamentales en el análisis financiero, científico y económico, ya que facilitan el manejo de crecimientos exponenciales, tasas de cambio y procesos de capitalización continua.

Profundización Clase 4

Exponentes y logaritmos

Los exponentes y logaritmos son conceptos fundamentales en matemáticas que permiten modelar fenómenos de crecimiento, decrecimiento y transformación de variables en administración y economía. Un exponente indica cuántas veces un número (la base) se multiplica por sí mismo. Por ejemplo, en la expresión a^x , el número a es la base y x el exponente, lo que representa una función de crecimiento o decrecimiento según si a es mayor o menor que 1 (Larson & Hodgkins, 2022).

Por otro lado, los logaritmos son las operaciones inversas de las exponenciales. El logaritmo de un número b en base a , escrito como $\log_a(b)$, representa el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener el número b . Es decir, si $a^x = b$, entonces $\log_a(b) = x$ (Stewart, 2019). Esta relación inversa es esencial para resolver ecuaciones exponenciales y para interpretar tasas de crecimiento continuo, como en finanzas, biología o economía.

En el ámbito financiero y económico, los logaritmos naturales (base e) se utilizan con frecuencia, ya que facilitan el cálculo de tasas de crecimiento continuo y la capitalización compuesta. Por ejemplo, el crecimiento continuo de una inversión se expresa como $A = Pe^{rt}$, y al aplicar logaritmos naturales, es posible despejar el tiempo o la tasa de interés (Frank & Bernanke, 2020).

Además, los logaritmos son útiles para linealizar relaciones no lineales, lo que permite aplicar modelos de regresión y análisis estadístico. En economía, transformar variables mediante logaritmos ayuda a estabilizar la varianza y a interpretar los coeficientes como elasticidades, es decir, como medidas porcentuales de respuesta de una variable ante cambios en otra (Gujarati & Porter, 2021).

En la práctica, estas funciones se aplican para analizar el crecimiento poblacional y empresarial, calcular intereses y tasas de rentabilidad, estimar elasticidades económicas y modelar la depreciación de activos. Gráficamente, las funciones exponenciales muestran un crecimiento acelerado en el tiempo, mientras que las logarítmicas reflejan un crecimiento rápido al inicio y luego una fase de



estabilización, características que representan fases típicas de expansión y madurez en los mercados.

En síntesis, los exponentes y logaritmos constituyen herramientas esenciales para comprender cómo evolucionan las variables económicas a lo largo del tiempo y para fundamentar decisiones estratégicas basadas en análisis cuantitativos rigurosos.



La excelencia no se improvisa

síguenos

