

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Cálculo Multivariado

Clase 5

Introducción

En la administración y la economía, la mayoría de las decisiones involucran más de una variable: precios, costos, producción o demanda dependen de múltiples factores interrelacionados. El cálculo multivariado permite analizar estas relaciones mediante el estudio de funciones con varias variables, utilizando herramientas como las derivadas parciales y el gradiente para comprender cómo los cambios simultáneos en distintos factores afectan los resultados de una organización o sistema económico.

El dominio de este enfoque es fundamental para aplicar modelos de optimización económica, análisis de productividad y asignación eficiente de recursos. Gracias al cálculo multivariado, es posible identificar puntos óptimos de beneficio o costo y tomar decisiones estratégicas basadas en evidencia cuantitativa, fortaleciendo la capacidad analítica de los profesionales en administración y economía.

Clase: 5

RDA 1: Emplear las herramientas matemáticas en funciones univariadas y multivariadas en la administración y la economía.

1.1 Cálculo Multivariado

El cálculo multivariado es una extensión del cálculo diferencial e integral que estudia funciones dependientes de dos o más variables independientes. Su propósito es comprender cómo los cambios simultáneos en varios factores influyen en un resultado o fenómeno determinado. A diferencia del cálculo de una sola variable, esta rama permite analizar sistemas más complejos en los que las variables interactúan entre sí, ofreciendo una visión integral del comportamiento de los procesos económicos, administrativos o productivos.

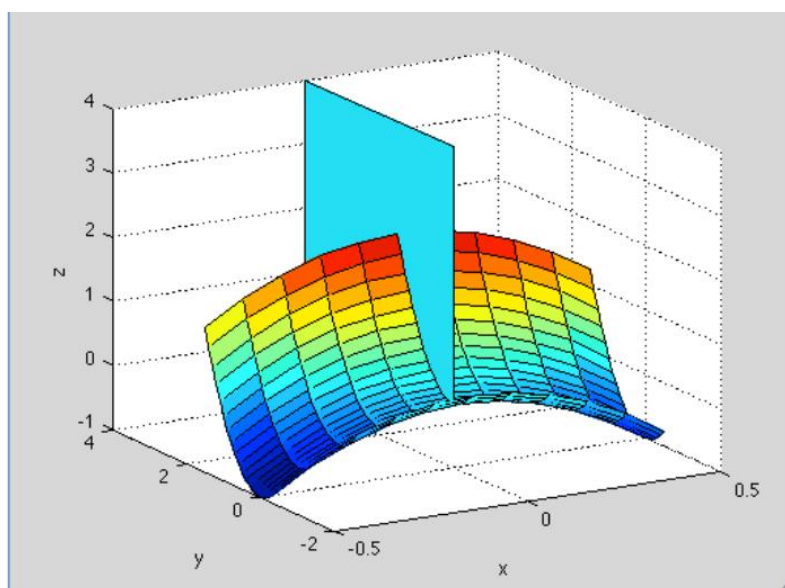
En el campo de la administración y la economía, el cálculo multivariado resulta esencial porque la mayoría de los fenómenos reales —como la producción, los precios, los costos o la demanda— dependen de múltiples variables interrelacionadas. A través del uso de derivadas parciales, gradientes, diferenciales totales y análisis de optimización con restricciones, los administradores y economistas pueden determinar

cómo pequeñas variaciones en los insumos o en las condiciones del entorno afectan los resultados finales.

Además, el análisis multivariable proporciona herramientas matemáticas para modelar fenómenos reales, evaluar escenarios y optimizar decisiones en contextos donde existen incertidumbre, escasez de recursos y múltiples objetivos en conflicto. Estas técnicas permiten identificar combinaciones óptimas de recursos, maximizar beneficios o minimizar costos, fortaleciendo la capacidad de planificación y gestión estratégica de las organizaciones.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de una función cortada por el plano $x = b = 0$

Figura 1. *Gráfica de una función*



Nota. La figura muestra la representación gráfica de una función real en el plano cartesiano, útil para ilustrar la relación entre la variable independiente y la variable dependiente. Tomado de Universidad Abierta y a Distancia de México (s. f.)

https://dmd.unadmexico.mx/contenidos/DCSBA/BLOQUE2/BI/04/BCMV/unidad_02/descargables/BCMV_U2_Contenido.pdf. [Licencia según el recurso original].

A continuación, se presenta un video en el que se detallan las características del cálculo multivariable.

Yordan, recuperado en 2025, “Cálculo Multivariable”.

<https://www.youtube.com/watch?v=lrs6sGaXxIc>

1.1.1 Herramientas de cálculo Multivariado

a. Funciones de varias variables

Una función multivariable puede representarse como $z = f(x, y)$, donde z depende de dos o más variables. Por ejemplo, el beneficio de una empresa puede expresarse como:

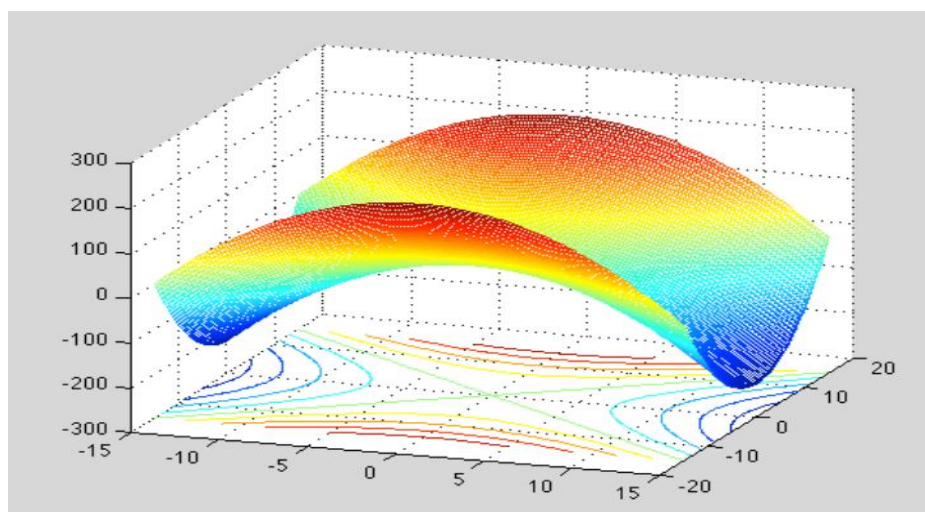
$$B = 100x - 4x^2 - 2y^2$$

Donde x representa la cantidad producida y y el gasto en publicidad.

Analizar este tipo de funciones permite entender el impacto de cada variable sobre los resultados globales, lo que facilita una gestión más eficiente de los recursos.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de una función de dos variables en el espacio y sus curvas de nivel proyectadas en el plano $X - Y$. La superficie es conocida como la silla de montar.

Figura 2. *Función de dos variables*



Nota. La figura muestra la representación de una función de dos variables, destacando cómo cada par ordenado del plano se asocia con un valor de salida para apoyar el estudio de funciones de varias variables. Tomado de Universidad Abierta y a Distancia de México (s. f.),

https://dmd.unadmexico.mx/contenidos/DCSBA/BLOQUE2/BI/04/BCMV/unidad_02/descargables/BCMV_U2_Contenido.pdf. [Licencia según el recurso original].

b. Derivadas parciales

Las derivadas parciales permiten determinar cómo varía una función al modificar una sola variable, manteniendo las demás constantes. En economía, esta herramienta mide los efectos marginales, como el cambio en el beneficio ante un pequeño incremento en la producción o el gasto.

Por ejemplo:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 100 - 8x$$

Indica cómo se modifica el beneficio ante cambios en la cantidad producida.

c. Gradiente y dirección de máximo crecimiento

El gradiente combina las derivadas parciales y señala la dirección de mayor aumento de la función:

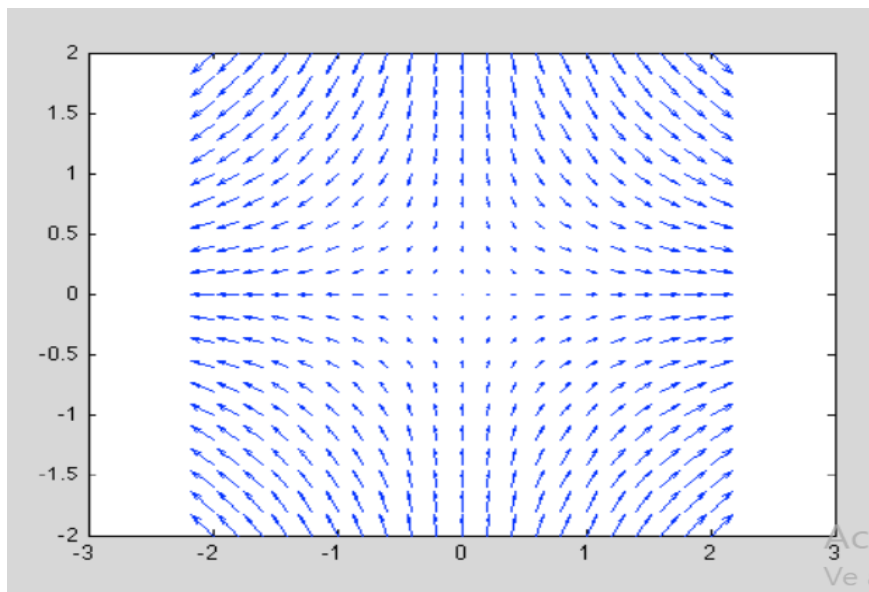
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Esta herramienta se usa ampliamente en modelos de optimización, ya que orienta hacia la combinación de variables que maximiza el beneficio o la utilidad.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de gradiente de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$

Figura 3

Gradiente



Nota. La figura representa el gradiente de una función de varias variables, ilustrando la dirección y el sentido de máximo cambio de la función en cada punto. Tomado de Universidad Abierta y a Distancia de México (s. f.),

https://dmd.unadmexico.mx/contenidos/DCSBA/BLOQUE2/BI/04/BCMV/unidad_02/descargables/BCMV_U2_Contenido.pdf. [Licencia según el recurso original].

El gradiente es una herramienta fundamental del cálculo multivariado que combina las derivadas parciales de una función y proporciona información sobre la dirección y la magnitud del cambio más rápido en el valor de dicha función.

Matemáticamente, el gradiente de una función $f(x, y)$ se expresa como:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Cada componente del gradiente representa cómo cambia la función al variar una de las variables independientes, manteniendo las demás constantes. En otras palabras, indica cuánto aumenta o disminuye el valor de la función al moverse en una dirección específica dentro del espacio de variables.

Geométricamente, el vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función, es decir, hacia el punto donde el incremento del valor de $f(x, y)$ es más pronunciado. La magnitud del gradiente, por su parte, refleja la rapidez con la que crece la función en esa dirección. En contextos de administración o economía, esto permite identificar combinaciones de variables (como capital, trabajo o inversión) que conducen a los mayores beneficios, productividad o rentabilidad.

Por ejemplo, en una función de beneficio $B(x, y)$, el gradiente permite conocer cómo pequeñas variaciones simultáneas en la producción y la inversión publicitaria afectan el beneficio total. Así, los administradores pueden orientar sus estrategias hacia los factores que generan el mayor impacto positivo en los resultados.

Además, en los modelos de optimización, el gradiente se utiliza junto con las condiciones de primer orden (derivadas iguales a cero) para localizar los puntos críticos de una función, es decir, los posibles máximos o mínimos. De este modo, el gradiente no solo describe la dirección de crecimiento, sino que también guía los procesos de toma de decisiones hacia soluciones eficientes y óptimas dentro de un entorno económico o empresarial complejo.

d. Puntos críticos y optimización

Para encontrar puntos de máximo o mínimo local, se igualan las derivadas parciales a cero y se analiza la naturaleza del punto mediante la matriz hessiana. Este procedimiento permite identificar niveles óptimos de producción o inversión.

En el estudio del cálculo multivariado, los puntos críticos son aquellos donde las derivadas parciales de una función se igualan a cero, es decir, donde la función deja momentáneamente de aumentar o disminuir respecto a sus variables. Estos puntos son de gran interés porque pueden representar máximos, mínimos o puntos de silla, los cuales son fundamentales para la **optimización** en administración, economía e ingeniería.

Matemáticamente, para una función $f(x, y)$, se buscan los puntos donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Una vez identificados estos puntos, es necesario determinar su naturaleza utilizando la matriz hessiana, que está compuesta por las segundas derivadas parciales de la función. La matriz hessiana permite evaluar la curvatura de la superficie en torno al punto crítico:

- Si el determinante de la hessiana es positivo y las segundas derivadas son positivas, se trata de un mínimo local.
- Si el determinante es positivo pero las segundas derivadas son negativas, se trata de un máximo local.
- Si el determinante es negativo, el punto es de silla, lo que significa que la función aumenta en una dirección y disminuye en otra.

En términos prácticos, este análisis tiene aplicaciones directas en la toma de decisiones empresariales. Por ejemplo, los administradores pueden determinar los niveles óptimos de producción, inversión o asignación de recursos que maximizan la rentabilidad o minimizan los costos.

Consideremos el ejemplo:

$$B = 100x - 4x^2 - 2y^2$$

Donde x representa la cantidad producida y y el gasto en publicidad. Al calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero, se encuentra el punto crítico que indica el nivel de producción y publicidad que maximiza el beneficio. Posteriormente, al aplicar la matriz hessiana, se confirma si dicho punto corresponde efectivamente a un máximo.

Este tipo de análisis es esencial en la optimización económica, ya que permite modelar situaciones reales de asignación eficiente de recursos, planificación estratégica y análisis de sensibilidad ante cambios en las variables. En definitiva, el estudio de los puntos críticos no solo es una herramienta matemática, sino también un

instrumento clave de gestión, que guía a los tomadores de decisiones hacia escenarios más rentables y sostenibles.

e. Optimización con restricciones

En la práctica, las empresas y los consumidores enfrentan restricciones de presupuesto, recursos o tecnología. Para resolver este tipo de problemas, se utiliza el método de multiplicadores de Lagrange, que permite maximizar o minimizar una función bajo una condición (Varian, 2019).

Ejemplo clásico: maximizar la utilidad del consumidor $U(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestaria $p_x x + p_y y = I$.

f. Matriz Hessiana

La matriz hessiana está formada por las segundas derivadas parciales de una función:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Permite determinar si un punto crítico es un máximo, mínimo o punto de silla (Sydsaeter & Hammond, 2016). En administración, esto se interpreta como identificar si una estrategia, combinación de precios o nivel de producción corresponde a una situación óptima o no.

En la figura a continuación se muestra un ejemplo de una matriz hessiana

Figura 4. *Matriz Hessiana*

$$H(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

Nota. La figura muestra la matriz hessiana asociada a una función de varias variables, empleada para analizar la curvatura y clasificar puntos críticos en problemas de optimización. Tomado de Slideshare (s. f.), <https://es.slideshare.net/slideshow/matriz-hessiana/21627099>. [Licencia según el recurso original].

g. Multiplicadores de Lagrange

El método de Lagrange se utiliza para optimizar una función sujeta a una o más restricciones. Es ampliamente empleado en problemas de asignación de recursos o decisiones bajo limitaciones presupuestarias (Khrushchev, 2025).

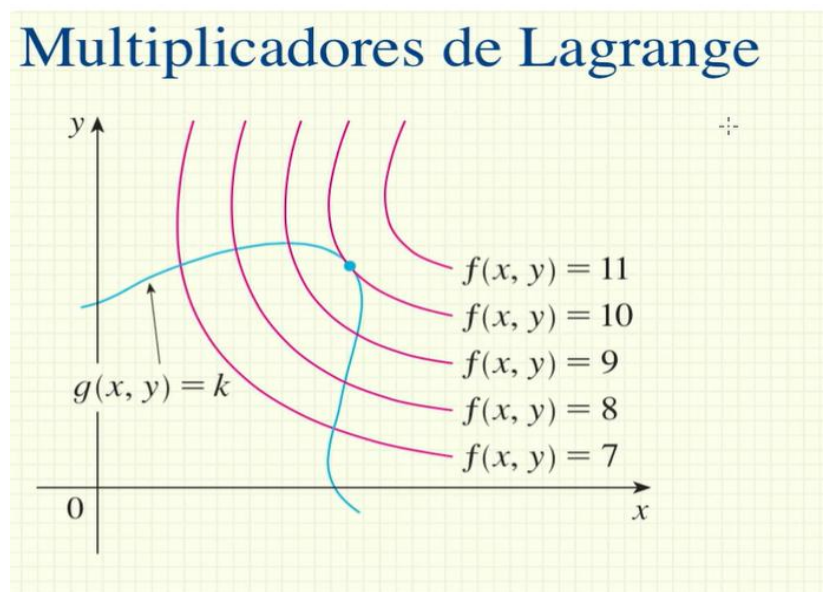
Por ejemplo:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$$

Donde λ representa el multiplicador de Lagrange, interpretado como el valor marginal de la restricción.

En la figura a continuación se muestran ejemplos de los Multiplicadores de Lagrange.

Figura 5. *Multiplicadores de Lagrange*



Nota. La figura ilustra el planteamiento de un problema de optimización con restricción mediante multiplicadores de Lagrange, resaltando la relación entre la función objetivo y la restricción. Tomado de YouTube (s. f.),

<https://www.youtube.com/watch?v=W0Gan9b1Fi8>. [Licencia según el recurso original].

En el siguiente video se presenta una explicación de cómo funcionan los Multiplicadores de Lagrange.

Académica. Recuperado en 2025. “Multiplicadores de Lagrange”.

<https://www.youtube.com/watch?v=W0Gan9b1Fi8>

h. Diferenciales totales

El diferencial total estima cómo cambia el valor de una función cuando todas sus variables varían ligeramente:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Esta herramienta es útil para llevar a cabo análisis de sensibilidad y escenarios, muy comunes en la planificación financiera y en la evaluación de riesgos (Simon & Blume, 1994).

En resumen, el `<button class="btn btn-link bg-transparent m-0 p-0 mi-glosario" data-toggle="modal" data-target="#g1c5" id="glossary1-c5" title="Glosario"><b>Cálculo multivariado</b></button>` constituye una herramienta esencial para comprender y optimizar fenómenos complejos en la economía y la administración. Su dominio permite tomar decisiones estratégicas basadas en análisis cuantitativo, fortaleciendo la eficiencia, la competitividad y la capacidad de planificación organizacional.

1.1.2 Aplicaciones en Administración y Economía.

El cálculo multivariado tiene amplias aplicaciones en la toma de decisiones empresariales y económicas, entre ellas:

- Determinar combinaciones óptimas de factores de producción.
- Evaluar el impacto de los precios y la publicidad sobre la demanda.
- Calcular niveles de producción que minimicen costos o maximicen beneficios.
- Analizar la respuesta del mercado ante variaciones simultáneas en varias variables económicas.

a. Aplicaciones en la administración

Optimización de procesos productivos

Las derivadas parciales y el gradiente permiten determinar cómo varía la productividad ante cambios simultáneos en factores como capital y trabajo. Las empresas pueden encontrar combinaciones óptimas de insumos que minimicen costos o maximicen la producción, aplicando modelos de funciones de producción tipo Cobb-Douglas, del tipo:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Donde Q es la producción, K el capital y L el trabajo. Al calcular las derivadas parciales de Q respecto a K y L , se obtiene la productividad marginal de cada factor. A es el factor de eficiencia o productividad total de los factores (PTF)

α Es la elasticidad de la producción respecto al capital.

β Es la elasticidad de la producción respecto al trabajo.

Esto permite a los administradores diseñar estrategias de eficiencia y de inversión en recursos humanos o tecnológicos.

Planeación y control financiero

El cálculo multivariado se aplica en la estimación de funciones de costos, beneficios y riesgo, donde las variables pueden ser el nivel de ventas, los costos operativos y la inversión en marketing. A través de las matrices hessianas y análisis de sensibilidad, los administradores pueden identificar condiciones de máximo

beneficio o mínimo costo (Porto, 2022).

Por ejemplo, al analizar cómo pequeñas variaciones en precios y gastos afectan las utilidades, se pueden tomar decisiones preventivas y estratégicas de control financiero.

En la figura a continuación se muestra una imagen de la planeación y presupuesto.

Figura 6

Planeación y control financiero



Nota. La figura representa elementos visuales asociados a la planeación y el control financiero, como documentos, gráficas y recursos de análisis económico, para ilustrar la gestión de las finanzas en una organización. Tomado de Freepik (s. f.), <https://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/planificacion-financiera>. [Licencia Freepik].

Análisis de riesgo y rentabilidad

El <button class="btn btn-link bg-transparent m-0 p-0 mi-glosario" data-

title="Glosario">Diferencial total</button> y las derivadas parciales permiten evaluar el impacto de cambios en múltiples variables financieras como tasas de interés, inflación y tipo de cambio sobre la rentabilidad esperada de un proyecto o portafolio. Estas técnicas se aplican en modelos de riesgo financiero y gestión de carteras, ayudando a reducir la incertidumbre y mejorar la estabilidad económica de las empresas.

b. Aplicaciones en la economía

Teoría del consumidor

En economía, el cálculo multivariado se utiliza para maximizar la utilidad del consumidor sujeta a una restricción presupuestaria. El método de Lagrange permite encontrar la combinación óptima de bienes que maximiza la satisfacción del consumidor dado su ingreso:

$$\mathcal{L} = U(x, y) + \lambda(I - p_x x - p_y y)$$

Donde $U(x, y)$ representa la función de utilidad y λ el multiplicador de Lagrange. Este enfoque se usa para derivar curvas de demanda y estudiar el comportamiento del consumidor frente a variaciones de precios o ingreso.

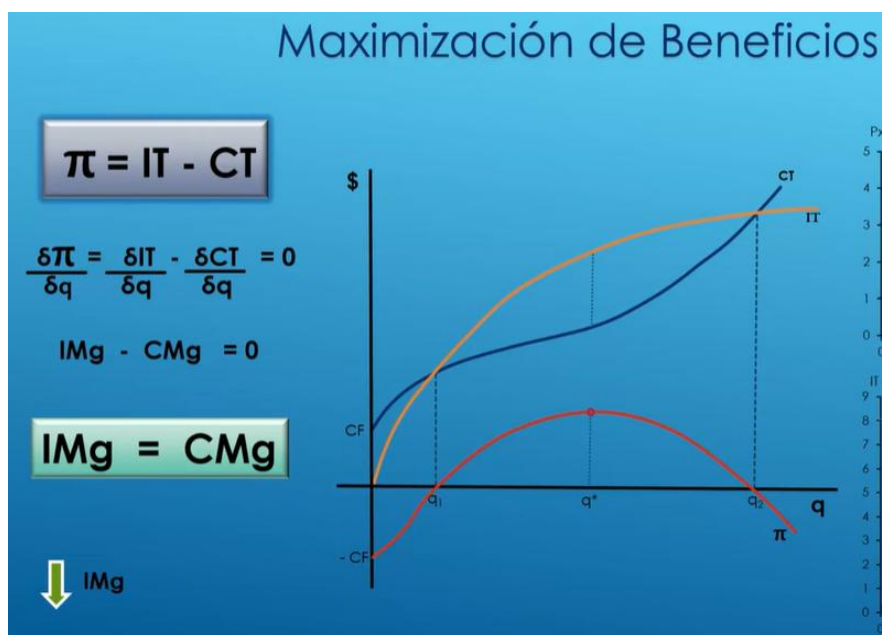
Teoría de la empresa

El cálculo multivariado también se aplica en la maximización de beneficios y la minimización de costos empresariales. Las empresas buscan niveles de producción donde las derivadas parciales de los costos o beneficios sean nulas, lo que indica un punto de equilibrio. Además, el análisis del hessiano permite verificar si la solución hallada corresponde a un máximo o mínimo real.

En la figura a continuación se muestra una imagen de la maximización de beneficios.

Figura 7

Maximización de beneficios



Nota. La figura representa un esquema de maximización de beneficios en un contexto económico, mostrando la relación entre costos, ingresos y nivel óptimo de producción para apoyar la toma de decisiones empresariales. Tomado de YouTube (s. f.), <https://www.youtube.com/watch?v=JgmRzWnw1lw>. [Licencia según el recurso original].

Modelos macroeconómicos y políticas públicas

A nivel macroeconómico, el cálculo multivariado ayuda a modelar las relaciones entre variables como inflación, desempleo, inversión y consumo. Estas relaciones se expresan en sistemas de ecuaciones no lineales donde las derivadas parciales muestran las elasticidades cruzadas entre sectores económicos (Khrushchev, 2025).

El cálculo multivariado proporciona un lenguaje matemático poderoso para la administración y la economía, permitiendo analizar la interacción de variables y optimizar decisiones estratégicas. Su aplicación práctica abarca desde la planificación operativa hasta el diseño de políticas públicas, convirtiéndose en una herramienta

esencial para mejorar la eficiencia, la competitividad y la sostenibilidad en los procesos de gestión y desarrollo económico.

Conclusión

El cálculo multivariado representa una herramienta fundamental para el análisis y la toma de decisiones en los campos de la administración y la economía. Su dominio permite comprender de manera más profunda las relaciones entre múltiples variables que influyen en los procesos productivos, financieros y organizacionales, ofreciendo una visión integral y cuantitativa de los fenómenos económicos.

Gracias a sus aplicaciones, los profesionales pueden identificar patrones, estimar impactos, optimizar recursos y diseñar estrategias basadas en evidencia, lo que fortalece la eficiencia y la competitividad en entornos altamente dinámicos. Además, el uso del cálculo multivariado fomenta una cultura de gestión basada en datos y en la anticipación de escenarios, aspectos clave para la innovación, la planificación estratégica y la sostenibilidad de las organizaciones en el largo plazo.

Referencias citadas en la Clase 5

- Bottazzi, G. (2023). *Advanced Calculus for Economics and Finance: Theory and Methods*. Springer.
- Khrushchev, S. (2025). *Calculus with Applications to Economics* (2.^a ed.). Springer.
- Porto, M. (2022). “Multivariable Calculus.” *An Introduction to Mathematics for Economics with R* (cap. 6, pp. 485-530). Springer.
- “Calculus in Economics – Important Features, Challenges, and Consequences.” (2025). *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. doi:10.1007/s40753-025-00276-4

Definición de los términos citados en la Clase 5

Cálculo multivariado. Es una rama del cálculo que analiza cómo varían las funciones que dependen de varias variables simultáneamente. Permite entender cómo los cambios en distintos factores influyen en un resultado global, siendo una

herramienta clave en la administración y la economía para optimizar recursos, evaluar costos, maximizar beneficios y tomar decisiones estratégicas basadas en datos cuantitativos.

Diferencial total. Es una herramienta del cálculo multivariado que permite estimar cómo cambia una función cuando varían simultáneamente todas sus variables. Sirve para analizar el efecto conjunto de pequeños cambios en distintos factores, siendo útil en economía y administración para evaluar cómo variaciones en recursos o precios afectan los resultados globales.

Profundización Clase 5

Cálculo Multivariado

El cálculo multivariado estudia funciones que dependen de más de una variable independiente y permite analizar cómo los cambios simultáneos en distintos factores influyen en un resultado determinado. En la administración y la economía, esto resulta esencial, pues variables como precios, costos, producción e ingresos interactúan constantemente (Chiang & Wainwright, 2006).

El análisis multivariable proporciona herramientas para modelar fenómenos reales, evaluar escenarios y optimizar decisiones en contextos de incertidumbre y limitaciones de recursos.

En el ámbito de la administración y la economía, esta rama del cálculo se convierte en una herramienta indispensable, ya que los fenómenos reales como la producción, los precios, los costos, los ingresos o la demanda dependen de múltiples variables interrelacionadas que no pueden analizarse de manera aislada. Mediante el uso de derivadas parciales, gradientes, matrices jacobianas, diferenciales totales y técnicas de optimización con o sin restricciones, los profesionales pueden evaluar cómo pequeñas variaciones en los insumos, los factores productivos o las condiciones del entorno impactan los resultados finales.



Estas herramientas matemáticas permiten identificar las relaciones funcionales entre las variables y, con ello, formular modelos predictivos y de optimización que guíen la toma de decisiones estratégicas. Por ejemplo, el análisis multivariado ayuda a determinar el nivel óptimo de producción, la asignación eficiente de recursos o las combinaciones de factores que maximizan la rentabilidad y minimizan los costos operativos.

Asimismo, el cálculo multivariado es clave en la gestión de riesgos y la planeación financiera, al facilitar la simulación de escenarios con múltiples variables que interactúan bajo condiciones de incertidumbre. Esto proporciona a los administradores y economistas una base científica para anticipar resultados, diseñar políticas de control y fortalecer la capacidad de respuesta organizacional ante cambios del mercado o del entorno macroeconómico.

En síntesis, el cálculo multivariado no solo amplía el horizonte del análisis matemático, sino que también se convierte en un soporte fundamental para la toma de decisiones racionales y basadas en evidencia dentro de contextos complejos, dinámicos y competitivos.



La excelencia no se improvisa

síguenos

