

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Integración y valor presente

Clase 6

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la administración y la economía, numerosas decisiones financieras e inversiones conllevan la distribución de los flujos de dinero a lo largo del tiempo. La integración permite sumar de manera continua cantidades variables, como ingresos, costos o producción, facilitando la evaluación global de procesos y proyectos.

Por su parte, el valor presente ajusta los flujos futuros a un momento inicial mediante tasas de descuento, permitiendo comparaciones consistentes y decisiones financieras eficientes. El dominio de estos conceptos es clave para evaluar inversiones, determinar la rentabilidad de proyectos y optimizar la asignación de recursos en contextos donde el tiempo y el dinero interactúan de manera crítica.

Clase: 6

RDA 1: Emplear las herramientas matemáticas en funciones univariadas y multivariadas en la administración y la economía.

1.1 Integración y valor presente

El análisis financiero y económico requiere evaluar flujos de dinero que ocurren en distintos momentos del tiempo. Para ello, los conceptos de integración y valor presente se convierten en herramientas fundamentales que permiten consolidar información y tomar decisiones estratégicas basadas en datos cuantitativos.

Integración

La integración es una técnica matemática que permite sumar de manera continua cantidades que cambian a lo largo del tiempo o de otra variable. En administración y economía, se aplica para calcular, por ejemplo, la producción acumulada, los costos totales o los ingresos acumulados de un proyecto:

$$\text{Valor acumulado} = \int_a^b f(t) dt$$

Donde $f(t)$ representa la función que describe el flujo de recursos en el tiempo y los límites a b corresponden al intervalo de análisis.

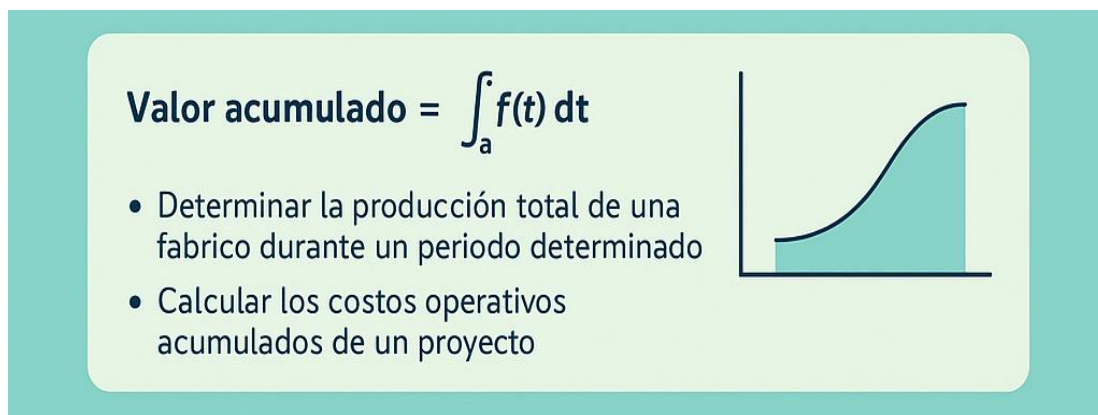
Aplicación práctica:

- Determinar la producción total de una fábrica durante un periodo determinado cuando la tasa de producción varía con el tiempo.
- Calcular los costos operativos acumulados de un proyecto cuando los gastos dependen de variables como cantidad producida o inversión en publicidad.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar el detalle del concepto de integración.

Figura 1

Integración



Nota. La figura representa de manera sintética el proceso de integración y los elementos clave que intervienen en su aplicación dentro del cálculo. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA.

Valor Presente

El valor presente (VP) permite trasladar todos los flujos futuros de dinero a un momento inicial, utilizando una tasa de descuento que refleja el valor del dinero en el tiempo. Esto facilita la comparación de alternativas de inversión, la evaluación de proyectos y la planificación financiera:

$$VP = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t} \text{ o en forma continua } VP = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt$$

donde:

- F_t = flujo de efectivo en el periodo t
- i o r = tasa de interés o descuento
- n o T = horizonte temporal del proyecto

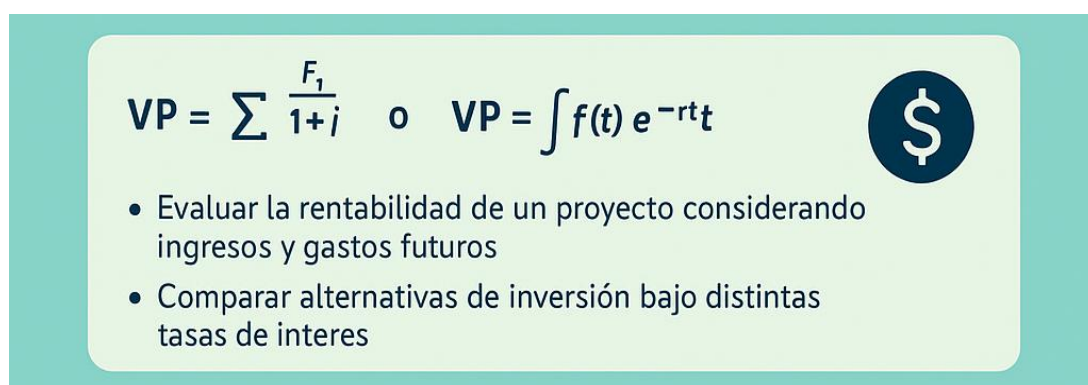
Aplicación práctica:

- Evaluar la rentabilidad de un proyecto considerando ingresos y gastos futuros.
- Comparar alternativas de inversión bajo distintas tasas de interés o inflación.
- Determinar el valor presente de un contrato de arrendamiento o préstamo que genera pagos periódicos.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar el detalle de la fórmula de valor presente.

Figura 2

Valor Presente



Nota. La figura representa el cálculo del valor presente de un monto o flujo futuro en función de la tasa de interés y del tiempo, mostrando cómo el valor actual disminuye

al aumentar el plazo o el rendimiento exigido. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA.

Integración y valor presente en conjunto

Cuando los flujos son continuos y variables, se combina la integración con el valor presente para calcular el VP de un flujo continuo:

$$VP = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt$$

Esto es especialmente útil en:

- Proyectos de inversión con ingresos y costos variables en el tiempo.
- Evaluación de activos financieros que generan intereses compuestos continuos.
- Planeación de políticas públicas y presupuestos de largo plazo.

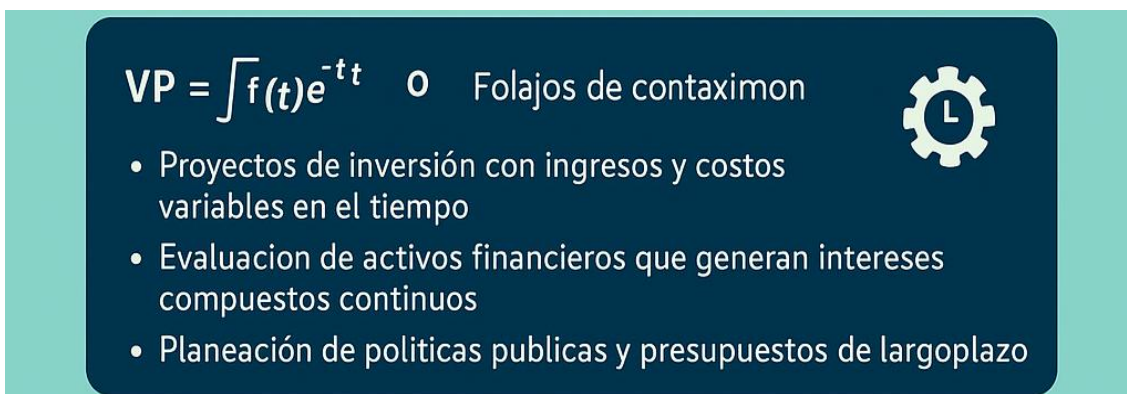
Beneficios en administración y economía

El uso de integración y valor presente permite:

- Analizar proyectos complejos con flujos variables y distribuidos en el tiempo.
- Comparar distintas alternativas de inversión o financiamiento.
- Optimizar la asignación de recursos y maximizar la rentabilidad bajo restricciones financieras.
- Tomar decisiones estratégicas basadas en evidencia cuantitativa y modelos matemáticos confiables.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar el detalle de la utilidad de los conceptos de integración y valor presente.

Figura 3. Integración y valor presente



The infographic features a dark blue background with a light blue border. At the top left, the formula $VP = \int f(t)e^{-t} dt$ is displayed. To its right is a small circle containing the letter 'O', followed by the text 'Folajos de contaximon'. On the right side of the infographic is a white gear icon with a lowercase 'l' inside. Below the formula, there is a bulleted list of three items: 'Proyectos de inversión con ingresos y costos variables en el tiempo', 'Evaluacion de activos financieros que generan intereses compuestos continuos', and 'Planeación de politicas publicas y presupuestos de largoplazo'.

$VP = \int f(t)e^{-t} dt$ O Folajos de contaximon

- Proyectos de inversión con ingresos y costos variables en el tiempo
- Evaluacion de activos financieros que generan intereses compuestos continuos
- Planeación de politicas publicas y presupuestos de largoplazo

Nota. La figura ilustra cómo la integración se aplica al cálculo del valor presente de flujos de caja distribuidos en el tiempo, permitiendo obtener el valor actual de ingresos o costos continuos o periódicos. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA.

1.1.1 Valor Presente

El valor presente (VP) es un concepto fundamental en finanzas, economía e ingeniería económica que permite determinar el valor actual de una suma de dinero o flujo de efectivo futuro, descontando los intereses o la rentabilidad que podría generar si se invirtiera hoy. Es decir, responde a la pregunta:

“¿Cuánto vale hoy un pago que recibiré en el futuro?”

Este concepto se basa en la premisa de que el dinero tiene un valor temporal, también conocido como el valor del dinero en el tiempo. Un dólar hoy vale más que un dólar mañana, porque el que se recibe hoy puede invertirse y generar rendimientos adicionales.

Fórmula del valor Presente

El valor presente se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Donde:

- VP = Valor presente
- VF = Valor futuro del dinero
- i = Tasa de interés o descuento por periodo
- n = Número de periodos

Esta fórmula se aplica cuando los pagos o flujos de efectivo son únicos. Para flujos múltiples o periódicos, se utiliza la sumatoria de los valores presentes de cada flujo.

Ejemplo práctico

Supongamos que se recibirá USD 1,000 dentro de 3 años y la tasa de interés anual es del 5 %.

$$VP = \frac{1,000}{(1 + 0.05)^3} = \frac{1,000}{1.157625} \approx 863.84$$

Esto significa que USD 863.84 invertidos hoy al 5 % anual equivalen a USD 1,000 dentro de 3 años.

Aplicaciones del valor Presente

El concepto de valor presente (VP) es una herramienta fundamental en economía, finanzas y administración, ya que permite expresar los flujos futuros de dinero en términos de su valor actual, considerando una tasa de descuento que refleja el costo de oportunidad o el rendimiento esperado. Su utilidad se extiende a múltiples ámbitos, desde la evaluación de inversiones empresariales hasta la planificación financiera personal.

1. Evaluación de proyectos de inversión

El valor presente permite comparar los ingresos y egresos futuros generados por un proyecto con la inversión inicial que se debe realizar hoy. A través de este análisis, se puede determinar si el proyecto es rentable o no.

Por ejemplo, una empresa puede analizar si conviene invertir en una nueva planta de producción comparando el valor presente de los beneficios futuros esperados con el costo inicial. Si el valor presente neto (VPN) es positivo, significa que el proyecto generará ganancias adicionales sobre el costo del capital invertido.

2. Determinación de precios financieros

En el ámbito financiero, el valor presente es la base para calcular el precio justo de bonos, préstamos y otros instrumentos financieros. En estos casos, se descuenta cada flujo de efectivo futuro como pagos de intereses o amortizaciones a la tasa de rendimiento del mercado.

Por ejemplo, el precio actual de un bono se obtiene sumando el valor presente de todos los cupones futuros y el valor nominal que se pagará al vencimiento. Del mismo modo, en los préstamos, el valor presente de las cuotas permite conocer cuánto vale hoy el dinero que se pagará en el futuro.

3. Planificación financiera personal

A nivel individual, el valor presente permite planificar metas financieras de manera racional. Con esta herramienta, una persona puede calcular cuánto necesita invertir hoy para alcanzar una cantidad específica de dinero en el futuro, considerando una tasa de interés o rendimiento.

Por ejemplo, si alguien desea tener USD 50.000 en 10 años y sabe que puede invertir a una tasa del 5 % anual, el valor presente le indicará cuánto debe invertir ahora para alcanzar esa meta. Esto facilita la toma de decisiones sobre ahorro, inversión y consumo a lo largo del tiempo.

En síntesis, el valor presente traduce el valor del dinero en el tiempo, permitiendo comparar cantidades monetarias en distintos momentos y tomar decisiones financieras más informadas, tanto en el ámbito empresarial como personal.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar una explicación del valor presente.

Figura 4

Valor Presente

El valor presente (VP) es el valor actual de una suma de dinero o flujo de efectivo futuro

¿Cuánto vale hoy un pago que recibiré en el futuro?

Se basa en el hecho de que el dinero tiene un valor temporal

FÓRMULA DEL VALOR PRESENTE

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Valor presente
Valor futuro del dinero
Tasa de interés o descuento por periodo
Número de periodos

Nota. La figura presenta de forma esquemática el concepto de valor presente, destacando la relación entre el tiempo, la tasa de descuento y la disminución del valor actual de los flujos futuros. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA.

El valor presente nos ayuda a tomar decisiones financieras racionales, considerando que el dinero de hoy puede generar rendimientos y que los compromisos futuros deben valorarse con base en el tiempo y el riesgo asociado.

A continuación, se presenta un video en el que se explica el valor presente y un ejemplo práctico.

Aula de Economía. Recuperado 2025. “¿Sabe usted qué es el valor presente? URL. <https://www.youtube.com/watch?v=22My0f0Q0jU>

1.1.2 Teorema Fundamental del Cálculo

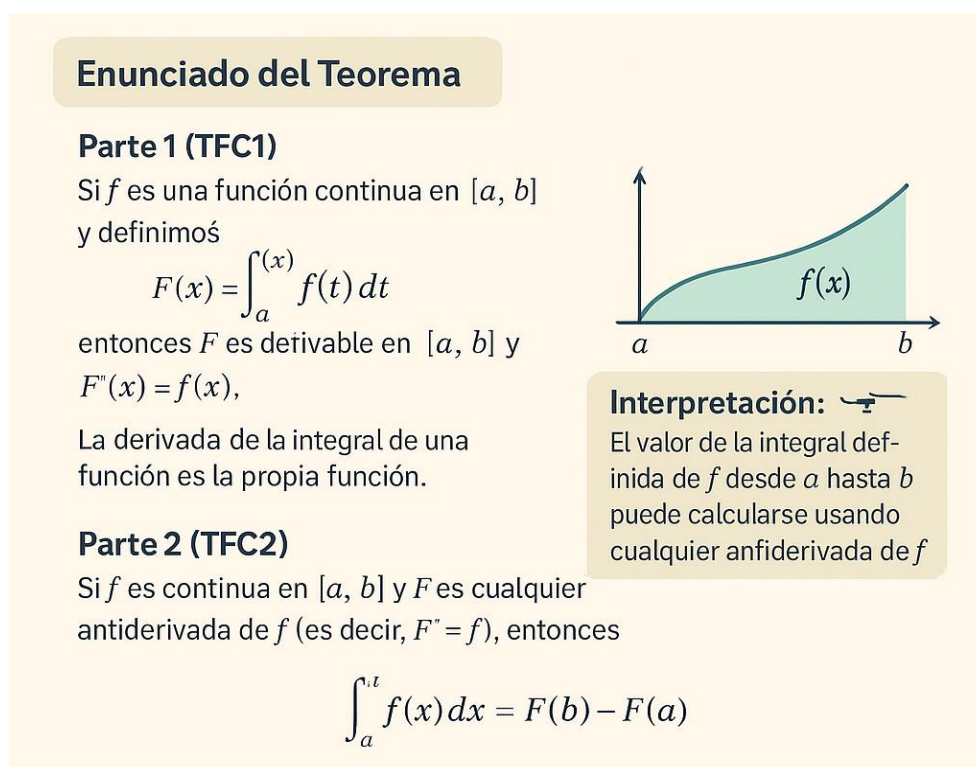
El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es un puente crucial entre dos áreas principales del cálculo: la derivación y la integración. Mientras que la derivada mide la tasa de cambio instantánea de una función, la integral calcula el acumulado total de esa función en un intervalo. El TFC demuestra que estas dos operaciones aparentemente distintas son, de hecho, inversas entre sí.

A continuación, se presenta un video en el que se explica el Teorema Fundamental del Cálculo. Julioprofe. Recuperado 2025. “Teorema fundamental del cálculo” URL: <https://www.youtube.com/watch?v=SCKpUCax5ss>.

Enunciado del Teorema

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar una explicación del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo.

Figura 5. *Teorema fundamental del cálculo*



Nota. La figura resume la relación entre derivación e integración, mostrando cómo el área acumulada bajo una curva se vincula con la función primitiva y permite pasar de tasas de cambio a cantidades totales. Elaboración propia: Alexandra Palacios, OpenIA.

El Teorema Fundamental del Cálculo tiene dos partes principales:

Parte 1 (TFC1):

Si f es una función continua en $[a, b]$ y definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

Entonces F es derivable en $[a, b]$.

$$F'(x) = f(x).$$

Interpretación:

La derivada de la integral de una función es la propia función. Es decir, la integral acumulada se puede “deshacer” tomando la derivada.

Parte 2 (TFC2):

Si f es continua en $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f (es decir, $F' = f$), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Interpretación:

El valor de la integral definida de f desde a hasta b puede calcularse usando cualquier antiderivada de f . Esto simplifica enormemente el cálculo de integrales definidas.

Explicación paso a paso

1. Acumulación de áreas:

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ representa el área bajo la curva $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$.

2. Relación con la derivada:

La función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ mide cuánto se ha acumulado desde a hasta x . Su derivada $F'(x)$ nos indica la velocidad instantánea de acumulación, que es simplemente $f(x)$.

3. Cálculo de integrales:

En la práctica, para calcular $\int_a^b f(x) dx$ no necesitamos aproximar sumas; basta encontrar una antiderivada $F(x)$ y evaluar la diferencia $F(b) - F(a)$.

En la gráfica detallada a continuación se puede visualizar una explicación paso a paso del Teorema Fundamental del Cálculo.

Figura 6

Explicación paso a paso del Teorema Fundamental del Cálculo

Explicación paso a paso

Acumulación de áreas

La integral definida $\int f(x) dx$ representa el área bajo la curva de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$

Relación con la derivada

La función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ mide cuánto se ha acumulado desde a hasta x : Su derivada $F'(x)$ nos indica la velocidad instantánea de acumulación, que es simplemente $f(x)$

↪ Cálculo de integrales

Para calcular $\int f(x) dx$, basta encontrar una antiderivada $F(x)$ y evaluar la diferencia $F(b) - F(a)$

Aplicación práctica: valor presente

En economía y finanzas, el TFC permite calcular el valor presente de flujos continuos de efectivo.

Elaboración: Alexandra Palacios, OpenIA

Ejemplo 1 (TFC1):

Tenemos la función $f(x) = 3x^2$.

Queremos construir una nueva función, llamada $F(x)$, que se define como el área bajo la curva de $f(t)$ desde 0 hasta x .

Esto se escribe así:

$$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt.$$

- Paso 1: Calculamos la integral

Para calcular esa integral, integramos $3t^2$:

$$\int 3t^2 dt = t^3 + C$$

Como estamos haciendo una integral definida (de 0 a x), reemplazamos los límites:

$$F(x) = [t^3]_0^x = x^3 - 0^3 = x^3$$

Por tanto, $F(x) = x^3$.

- Paso 2: Derivamos $F(x)$

Ahora derivamos $F(x)$ para ver qué obtenemos:

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

Pero $3x^2 = f(x)$, justo la función con la que empezamos.

Entonces,

$$F'(x) = 3x^2 = f(x),$$

Lo que confirma la primera parte del teorema.

Esto demuestra que la derivada de la integral de una función (desde un punto fijo hasta x) es la misma función original.

En otras palabras, este ejemplo confirma la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo, que conecta la integración y la derivación.

Ejemplo 2 (TFC2):

Queremos calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = 2x$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

Sea $f(x) = 2x$, queremos $\int_1^4 2x dx$

- Paso 1: Encontrar una antiderivada.

Buscamos una función $F(x)$ cuya derivada sea $2x$.

Sabemos que la derivada de x^2 es $2x$, por lo tanto, una antiderivada de $2x$ es $F(x) = x^2$.

- Paso 2: Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

El teorema dice que, para encontrar el valor de la integral definida, debemos restar los valores de la antiderivada en los extremos del intervalo:

$$\int_1^4 2x dx = F(4) - F(1)$$

- Paso 3: Sustituir los valores.

Calculamos:

$$F(4) = 4^2 = 16$$

$$F(1) = 1^2 = 1$$

Luego restamos:

$$16 - 1 = 15$$

- Interpretación.

El resultado, 15, representa el área bajo la recta $y = 2x$ desde $x = 1$ hasta $x = 4$.

Es decir, si dibujamos la línea $y = 2x$, el área comprendida entre esa línea y el eje x en ese intervalo es de 15 unidades cuadradas.

Aplicación práctica: valor presente

En el ámbito de la economía y las finanzas, el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) tiene una aplicación directa y muy relevante: permite calcular el valor presente de flujos continuos de ingresos y pagos.

Si $C(t)$ es la tasa de ingreso a lo largo del tiempo t , entonces el valor presente desde $t = 0$ hasta $t = T$ es:

$$VP = \int_0^T C(t)e^{-rt} dt,$$

Dónde r es la tasa de descuento.

Aquí, el TFC permite evaluar la integral usando antiderivadas, simplificando el cálculo de VP.

Este concepto es esencial para analizar la rentabilidad de proyectos, inversiones y cualquier decisión financiera que involucre flujos de dinero distribuidos a lo largo del tiempo.

El valor presente representa el monto equivalente en el momento actual de una serie de ingresos o egresos futuros, ajustados por una **tasa de descuento (r)** que refleja el costo de oportunidad del capital, la inflación o el riesgo asociado.

En la ecuación mencionada anteriormente, el término e^{-rt} actúa como factor de descuento exponencial, que reduce el valor de los ingresos futuros según su distancia temporal. Cuanto mayor sea el valor de r o más lejano sea el flujo en el tiempo, menor será su contribución al valor presente total.

El Teorema Fundamental del Cálculo permite evaluar esta integral mediante antiderivadas, facilitando la obtención del resultado exacto del valor presente sin necesidad de aproximaciones numéricas. De esta manera, el TFC conecta de forma elegante el proceso de acumulación de flujos (integración) con la dinámica del cambio instantáneo (derivación), proporcionando una base teórica sólida para los cálculos financieros.

Por ejemplo, si una empresa genera ingresos continuos de acuerdo con una función $C(t) = 5000e^{0.02t}$ y se aplica una tasa de descuento del 5 %, el TFC permite determinar, mediante integración, el valor presente real de esos ingresos en el período analizado.

En síntesis, el uso del TFC en el cálculo del valor presente permite tomar decisiones financieras más precisas y fundamentadas, ya que integra el paso del tiempo, la variación de los flujos y el efecto de la tasa de descuento en un solo modelo matemático. Esta aplicación no solo tiene valor teórico, sino que es una herramienta práctica indispensable para la evaluación de proyectos, la planificación financiera y la gestión de inversiones, pilares esenciales en la administración moderna. El Teorema Fundamental del Cálculo unifica derivadas e integrales y permite pasar de la acumulación de cantidades (áreas, flujos) a la tasa de cambio instantánea y viceversa. Es una herramienta esencial en matemáticas, física, ingeniería y economía.

Conclusión

El desarrollo de los conceptos de integración, valor presente y el Teorema Fundamental del Cálculo evidencia su papel central en la administración, la economía y las finanzas. La integración permite consolidar flujos variables a lo largo del

tiempo, mientras que el valor presente ajusta estos flujos al momento actual, facilitando decisiones de inversión y planificación estratégica.

El Teorema Fundamental del Cálculo, al mostrar la relación inversa entre derivadas e integrales, proporciona la base matemática que hace posible evaluar de manera eficiente acumulaciones continuas y sus tasas de cambio instantáneas. En conjunto, estas herramientas permiten analizar proyectos complejos, optimizar la asignación de recursos y tomar decisiones fundamentadas en datos cuantitativos, fortaleciendo la capacidad de gestionar de manera racional y estratégica los recursos económicos y financieros.

Referencias citadas en la Clase 6

Brealey, R., Myers, S., & Allen, F. (2022). *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill.

Nauenberg, M. (2011). Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of the calculus.

Ross, S., Westerfield, R., & Jaffe, J. (2021). *Corporate Finance*. McGraw-Hill Education.

Varian, H. (2019). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W.W. Norton & Company.

Stewart, J. (2015). *Calculus: Early Transcendentals* (8ª ed.). Brooks/Cole. Colorado Mountain College

“The Fundamental Theorem of Calculus” in Wolfram MathWorld. Apostol, T. M. “The Derivative of an Indefinite Integral.” §5.1 en *Calculus, 2nd ed.* Vol. 1.

Nauenberg, M. (2011). Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of the calculus.

Vickers, S. (2023). “The Fundamental Theorem of Calculus point-free, with applications to exponentials and logarithms.” Bár, F. (2024). “The Fundamental Theorem of Calculus in higher dimensions.”

Definición de los términos citados en la Clase 6

Integración. Es una operación del cálculo que permite acumular de manera continua cantidades **variables** a lo largo de un intervalo, transformando información local, como tasas de cambio, en medidas globales acumulativas.

Valor presente. Es un concepto financiero que permite determinar el valor actual de un flujo de dinero futuro, ajustándolo mediante una tasa de descuento que refleja el valor del dinero en el tiempo. Su objetivo es responder a la pregunta: “¿Cuánto vale hoy un pago o ingreso que se recibirá en el futuro?”

Profundización Clase 6

Valor Presente

Es un concepto central en finanzas, economía e ingeniería económica que permite determinar el valor actual de flujos de dinero que se recibirán o pagarán en el futuro, considerando el principio de que el dinero tiene un valor temporal: un dólar hoy vale más que un dólar mañana, porque el que se posee hoy puede invertirse y generar rendimientos adicionales.

Fundamento del valor presente

El valor presente se basa en la noción de descuento: trasladar un flujo futuro a su equivalente en el presente mediante una tasa que refleje el costo de oportunidad, el riesgo o la inflación. Esta tasa de descuento puede corresponder a:

- Tasa de interés de mercado, en inversiones financieras.
- Tasa de rendimiento mínima esperada para proyectos empresariales.

- Costo de capital o riesgo país en decisiones estratégicas de inversión internacional.

El VP permite comparar flujos de dinero en distintos momentos del tiempo de manera consistente, lo que es esencial para evaluar alternativas de inversión, determinar la rentabilidad de proyectos y planificar decisiones financieras a corto y largo plazo.

Fórmulas para calcular valor presente

1. Flujos discretos (pagos periódicos o únicos):

Para flujos F_t que ocurren en periodos $t = 1, 2, \dots, n$ y una tasa de interés i :

$$VP = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

2. Flujos continuos:

Cuando los flujos son variables de manera continua a lo largo del tiempo, se utiliza la integral:

$$VP = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt$$

Donde $f(t)$ representa el flujo de efectivo en el tiempo t y r es la tasa de descuento continua.

Aplicaciones del valor presente.

- Evaluación de proyectos de inversión: Permite comparar ingresos y costos futuros en términos de su valor actual.
- Determinación de precios financieros: Bonos, préstamos y otros instrumentos utilizan VP para fijar valores y tasas adecuadas.
- Planeación financiera personal: Facilita calcular cuánto invertir hoy para alcanzar objetivos futuros.
- Valoración de contratos y arrendamientos: Permite trasladar pagos futuros a su equivalente en el presente.



La excelencia no se improvisa

síguenos

