

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Optimización univariada

Clase 7

INTRODUCCIÓN

Los principios de optimización en Administración y Economía permiten encontrar soluciones eficientes para la toma de decisiones, al buscar la mejor alternativa posible dentro de recursos limitados. Su aplicación ayuda a maximizar beneficios, minimizar costos y asignar de forma racional los recursos disponibles, convirtiéndose en una herramienta esencial para el análisis y la planificación estratégica.

Mediante el uso de modelos matemáticos y analíticos, la optimización traduce problemas reales en expresiones que facilitan la evaluación de distintas opciones. Estos principios se aplican en áreas como la gestión financiera, la producción, la logística y el marketing, fortaleciendo la capacidad del estudiante para analizar escenarios, comparar alternativas y proponer estrategias óptimas que mejoren la eficiencia organizacional y económica.

Clase: 7

RDA 2: Identificar los principios de optimización en los distintos problemas que surgen en las ciencias administrativas y económicas.

1.1 Optimización univariada

La optimización univariada estudia la búsqueda de extremos (mínimos o máximos) de una función de una sola variable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En contextos administrativos y económicos, estos problemas aparecen continuamente: maximizar beneficios respecto a la cantidad producida, minimizar costos unitarios respecto al nivel de insumos o encontrar la tasa de descuento que optimiza el valor presente de un proyecto. Conceptualmente, la optimización univariada es la base de muchas técnicas más complejas (búsquedas en línea para algoritmos multivariados, búsquedas de paso en métodos de descenso, etc.), y por ello se estudian tanto métodos analíticos (derivadas) como numéricos.

En la figura detallada a continuación se pueden visualizar gráficos financieros en el contexto de optimización.

Figura 1. Optimización

Nota. La figura presenta gráficos financieros vinculados a procesos de optimización de



resultados en contextos empresariales. Tomado de *Optimización*, de Freepik, s. f., Freepik (<https://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/optimizaci%C3%B3n>). [Licencia Freepik].

Fundamentos teóricos

Si f es diferenciable, las condiciones necesarias y suficientes clásicas son el uso de derivadas: un punto x^* es candidato a extremo si $f'(x^*) = 0$ (condición necesaria); si además $f''(x^*) > 0$ se tiene un mínimo local (condición suficiente). Para funciones no diferenciables o en presencia de restricciones, se emplean herramientas alternativas (subderivadas, unimodalidad o análisis directo de la función-valor). En economía, teoremas como el envelope theorem y el teorema del máximo establecen condiciones para derivar el valor óptimo respecto a parámetros (útiles para análisis comparativo de políticas). (Milgrom & Segal, 2002).

Métodos numéricos principales

1. Métodos basados en derivadas

- Newton / Newton-Raphson: usa $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$. Convergencia cuadrática cerca de la raíz si f'' no se anula; sensible a malas aproximaciones iniciales.

2. Métodos sin derivadas (derivative-free) útiles cuando la función es ruidosa, discontinua o costosa de evaluar:

- Búsqueda por bisección (para problema de raíz/derivada): robusta, reduce el intervalo por dos cada iteración cuando se conoce un cambio de signo.
- Método clásico para hallar el mínimo de funciones unimodales usando solo evaluaciones de f .
- Combina interpolación cuadrática inversa, la secante y la bisección; es robusto y normalmente más eficiente que la búsqueda dorada en práctica —por eso es muy utilizado en bibliotecas numéricas y en búsquedas de línea.

3. Métodos híbridos y variantes modernas

- Secant / Método de la falsa posición: aproxima derivadas por diferencias finitas.
- Búsquedas de línea modernas: Se usan como subrutina en algoritmos multivariados. Investigaciones recientes proponen variantes que explotan convexidad o toleran ruido en la función para mejorar eficiencia y robustez.

Propiedades prácticas y criterios de paro

- Unimodalidad/convexidad: muchos métodos garantizan convergencia rápida si la función es unimodal o convexa en el intervalo de interés.
- Ruido y evaluación cara: Cuando la función tiene ruido estadístico o la evaluación es costosa (simulaciones, experimentos), conviene usar métodos tolerantes al ruido o reducir el número de evaluaciones (métodos cuasi-exactos, búsqueda adaptativa).
- Criterios de paro: tamaño del intervalo, cambio en el valor objetivo $|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ o norma de la derivada estimada. Seleccionar tolerancias dependientes

del problema (p. ej., impacto económico mínimo relevante) mejora la interpretabilidad.

Aplicaciones en Administración y Economía (ejemplos)

- Maximización de beneficios: hallar q^* que maximiza $\pi(q) = p(q)q - c(q)$ si p y c son diferenciables, resolver $\pi'(q) = 0$. Si la función de beneficio proviene de simulación o datos discretos, usar búsqueda univariada numérica.
- Determinación del precio óptimo: optimizar ingreso o excedente en función del precio en modelos de demanda.
- Optimización de políticas y análisis comparativo: calcular el valor óptimo de una variable de política (inversión, tasa impositiva) y estudiar su sensibilidad ante parámetros; aquí intervienen el envelope theorem y análisis basado en derivadas del valor óptimo.

A continuación, se presenta un video en el que se explica la resolución de ejemplos con el cálculo de optimización univariable.

Briant A. Gauna. Recuperado 2025. “Optimización”. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=zs36ozmsA38>

1.1.1 Tipos de optimización

La optimización es el proceso de identificar la mejor alternativa posible dentro de un conjunto de opciones factibles, de acuerdo con un objetivo definido, como maximizar beneficios o minimizar costos. En el contexto de la Administración y la Economía, los distintos tipos de optimización permiten modelar problemas de decisión adaptados a las características de los sistemas empresariales, financieros o productivos. La clasificación puede hacerse según la naturaleza de la función objetivo, las variables, las restricciones o la información disponible.

En la figura detallada a continuación se pueden visualizar gráficos relacionados con el aumento del crecimiento de su negocio en línea, estrategias creativas en el contexto de optimización.

Figura 2. *Optimización de un negocio*



Nota. La figura presenta gráficos asociados al crecimiento de un negocio en línea y a estrategias creativas de optimización en entornos digitales. Tomado de Freepik, s. f., Freepik (<https://www.freepik.es/fotos-premium/comienzo-tecnologia-png-collage-remix-elemento-fondo->). [Licencia Freepik].

1. Según la naturaleza de la función

- Optimización lineal: La función objetivo y las restricciones son lineales. Se aplica en problemas de asignación de recursos, mezcla de productos, planeación de la producción y distribución. Herramientas como el método simplex o la programación lineal entera son comunes en la gestión empresarial (Winston, 2022).

En la figura detallada a continuación se pueden visualizar gráficos relacionados con la optimización lineal.

Figura 3. Optimización lineal

Nota. La figura representa el concepto de optimización lineal aplicado al



posicionamiento y mejora de resultados en motores de búsqueda, mediante recursos gráficos asociados a él.

SEO. Tomado de f., Freepik (https://www.freepik.es/vector-gratis/seo-concepto-optimizacion-motores-busqueda_22069291.htm). [Licencia Freepik].

- Optimización no lineal: Involucra funciones con términos cuadráticos, exponenciales o logarítmicos. Se usa en decisiones de precios, modelos de riesgo financiero y análisis de eficiencia. Los métodos de Newton, gradiente o algoritmos de búsqueda son esenciales para resolverlos.

2. Según el número de variables

- Optimización univariada: Analiza una sola variable de decisión, buscando el punto que maximiza o minimiza la función (por ejemplo, el nivel óptimo de producción).
- Optimización multivariada: Involucra varias variables interrelacionadas. Es típica en modelos de portafolio, análisis de costos conjuntos o problemas de logística donde intervienen múltiples factores simultáneos.

3. Según la existencia de restricciones

- Optimización sin restricciones: Se busca el valor óptimo considerando únicamente la función objetivo, sin limitaciones externas.
- Optimización con restricciones: Incluye limitaciones de recursos, presupuesto, tiempo o capacidad. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) proporcionan criterios matemáticos para resolver este tipo de problemas.

4. Según la disponibilidad de información

- Optimización determinista: Se asume que todos los parámetros del modelo son conocidos y constantes; se aplica en contextos estables o controlados.
- Optimización estocástica: Los parámetros se modelan como variables aleatorias. Es fundamental en decisiones bajo incertidumbre, como pronósticos de demanda o inversiones financieras.

5. Según la naturaleza de las variables

- Optimización continua: Las variables pueden tomar cualquier valor dentro de un rango. Se usa en análisis marginal, producción y asignación de recursos.
- Optimización discreta o combinatoria: Las variables solo pueden asumir valores enteros o específicos (por ejemplo, número de empleados, rutas o unidades). Es común en planificación y logística empresarial.

En la figura detallada a continuación se puede visualizar un gráfico relacionado con el proceso de optimización, ilustración vectorial.

Figura 4. *Proceso de optimización de un negocio*



Nota. La figura presenta un gráfico vectorial relacionado con el proceso de optimización de un negocio, mostrando etapas de madurez en el ciclo de vida de un proyecto o servicio en línea. Tomado de Freepik, s. f., Freepik (<https://www.freepik.es/vector-gratis/plataforma-o-servicio-linea-etapa-madurez-periodo-ciclo-vida-proyecto-implementacion-desarrollo-proyectos-comerciales>). [Licencia Freepik].

Comprender los tipos de optimización permite seleccionar el método más adecuado según la naturaleza del problema. En la práctica, los economistas y administradores enfrentan decisiones complejas donde deben balancear recursos escasos, riesgos y objetivos múltiples. Aplicar correctamente los modelos de optimización mejora la eficiencia operativa, fortalece la rentabilidad y apoya una gestión estratégica basada en evidencia cuantitativa (Hillier & Lieberman, 2021).

1.2 Caso básico sin restricciones

La optimización sin restricciones se refiere a los problemas en los que la variable o conjunto de variables pueden asumir cualquier valor dentro de su dominio, sin estar limitadas por condiciones externas o restricciones explícitas. El objetivo es maximizar o minimizar una función objetivo que representa una medida de desempeño, utilidad, beneficio o costo.

En este tipo de problemas, la búsqueda del óptimo depende exclusivamente de las propiedades internas de la función, es decir, de su comportamiento y de las relaciones entre sus derivadas. Por ejemplo, una empresa que desea determinar el nivel de producción q que maximiza sus beneficios $\pi(q) = I(q) - C(q)$, sin restricciones de capacidad o recursos, enfrenta un caso de optimización sin restricciones.

a. Condiciones necesarias de primer orden

Si la función $f(x)$ es continua y derivable, un punto crítico x^* es candidato a máximo o mínimo si cumple:

$$f'(x^*) = 0$$

Esta condición significa que la pendiente de la función es cero, es decir, no hay cambio en la dirección de crecimiento o decrecimiento.

En términos económicos, equivale al punto donde el ingreso marginal es igual al costo marginal, o donde la utilidad marginal se anula, lo que indica equilibrio.

b. Condiciones suficientes de segundo orden

Una vez identificado el punto crítico x^* , es decir, aquel en el que la primera derivada se anula $f'(x^*) = 0$, se requiere verificar la naturaleza de dicho punto para determinar si corresponde a un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión. Esta evaluación se realiza mediante la segunda derivada de la función, la cual indica la curvatura del gráfico en el entorno del punto analizado.

De acuerdo con las condiciones suficientes de segundo orden, se tiene que:

$$\begin{aligned} f''(x^*) > 0 &\Rightarrow \text{Mínimo local (la función es convexa en ese punto)} \\ f''(x^*) < 0 &\Rightarrow \text{Máximo local (la función es cóncava en ese punto)} \\ f''(x^*) = 0 &\Rightarrow \text{Punto de inflexión o se requiere análisis adicional} \end{aligned}$$

En términos económicos, estas condiciones son fundamentales para determinar, por ejemplo, si una combinación de insumos minimiza los costos de producción o si un nivel de precios maximiza los ingresos. La segunda derivada, por tanto, proporciona información sobre la tasa de cambio de la pendiente y sobre la forma de la función, aspectos esenciales para la toma de decisiones óptimas. Cuando la función es convexa, presenta una “curva hacia arriba”, indicando que el punto crítico corresponde a un mínimo; cuando es cóncava, presenta una “curva hacia abajo”, señalando un máximo.

En casos donde $f''(x^*) = 0$ el análisis debe complementarse con derivadas de orden superior o con una inspección gráfica y contextual del problema, ya que el punto podría ser de inflexión o tener un comportamiento indeterminado.

c. Interpretación económica

En Economía y Administración, los problemas sin restricciones son muy comunes y se asocian a situaciones donde las decisiones no están limitadas por recursos externos. Algunos ejemplos incluyen:

- **Maximización del beneficio:**

$$\pi(q) = I(q) - C(q)$$

¿Dónde $I(q)$ es el ingreso y $C(q)$ el costo? El óptimo ocurre cuando $I'(q) = C'(q)$

- **Minimización del costo medio:**

$C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$; el punto óptimo se encuentra donde $C'_m(q) = 0$.

- **Maximización de la utilidad del consumidor:**

Cuando las preferencias se modelan con una sola variable (por ejemplo, consumo de un bien en función del ingreso disponible).

En la figura detallada a continuación se puede visualizar un gráfico relacionado con la maximización de la utilidad del consumidor.

Figura 5. *Maximización de la utilidad del consumidor*



Nota. La figura muestra un gráfico de crecimiento de ventas mediante una flecha ascendente, asociado a la maximización de la utilidad del consumidor. Tomado de Freepik, s. f., Freepik (<https://www.freepik.es/imagen-ia-premium/crecimiento-ventas-negocio-aumento-volumen-ventas-grafico-flecha-apuntante-plan-crecimiento-futuro-corporativo>). [Licencia Freepik].

A continuación, se presenta un video en el que se explica la maximización de la utilidad del consumidor

Joel Vaisan. Recuperado 2025. “MICROECONOMÍA I - Teoría del Consumidor”
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=4YdRQ7FxmM4>

d. Visualización del caso sin restricciones

La representación gráfica del caso sin restricciones permite comprender intuitivamente cómo se identifican los puntos óptimos de una función. En este contexto, el punto óptimo (máximo o mínimo) se visualiza como el vértice de una parábola o el punto más alto o debajo de una curva continua y suave. Este punto marca el cambio en

el comportamiento de la pendiente de la función, que es precisamente lo que las derivadas matemáticas permiten detectar.

En términos de pendiente:

- En un máximo local, la pendiente de la función pasa de positiva a negativa, es decir, la curva asciende hasta el punto óptimo y luego comienza a descender.
- En un mínimo local, la pendiente cambia de negativa a positiva, la curva descende hasta alcanzar su valor más bajo y luego vuelve a subir.

Estas transiciones reflejan el cambio en el signo de la primera derivada $f'(x)$, que es cero en el punto crítico x^* , mientras que la segunda derivada $f''(x)$ indica la curvatura de la función: positiva en los mínimos (curva convexa) y negativa en los máximos (curva cóncava).

Desde una perspectiva económica, esta visualización es fundamental para interpretar fenómenos como:

- La maximización del beneficio, donde el ingreso total alcanza su punto más alto antes de disminuir con la producción adicional.
- La minimización del costo, donde los gastos totales alcanzan su punto más bajo antes de aumentar nuevamente.

Gráficamente, estas situaciones se pueden representar mediante curvas continuas y suaves, donde el punto de tangencia horizontal (pendiente cero) indica el equilibrio óptimo. Esta interpretación visual refuerza la comprensión del análisis derivado y su utilidad práctica en la toma de decisiones económicas y administrativas.

e. Métodos numéricos aplicables

Cuando no es posible derivar analíticamente la función, se pueden aplicar métodos numéricos como:

- Método de Newton-Raphson: utiliza derivadas para refinar el punto crítico.

- Búsqueda de gradiente (gradient descent/ascent): iteraciones sucesivas para encontrar el mínimo o máximo.
- Métodos sin derivadas (Brent o búsqueda dorada): útiles si la función no es diferenciable o contiene ruido.

Estos métodos se implementan fácilmente en programas como Excel, MATLAB, Python o R para aplicaciones administrativas y económicas.

Aplicación práctica

Ejemplo:

Una empresa tiene la función de beneficios:

$$\pi(q) = -2q^2 + 40q - 150$$

Para encontrar el nivel de producción que maximiza la ganancia:

1. Derivamos: $\pi'(q) = -4q + 40$.
2. Igualamos a cero: $-4q + 40 = 0 \Rightarrow q^* = 10$.
3. Evaluamos la segunda derivada: $\pi''(q) = -4 < 0$, por tanto, $q^* = 10$ es un máximo local.

Interpretación: La producción óptima sin restricciones es de 10 unidades, donde la empresa maximiza su beneficio.

En resumen, el caso básico sin restricciones constituye la forma más elemental y didáctica de la optimización. Permite comprender cómo las decisiones económicas y administrativas se fundamentan en la búsqueda de equilibrios internos del sistema, sin considerar aún limitaciones reales como presupuestos o recursos finitos. Este enfoque prepara el terreno para abordar los problemas con restricciones, más representativos del entorno empresarial y macroeconómico.

Conclusión

En síntesis, la visualización del caso sin restricciones constituye una herramienta esencial para comprender el comportamiento de las funciones y su relación con los procesos de optimización en la administración y la economía. A través del análisis gráfico y del uso de derivadas, es posible identificar de manera precisa los puntos de máximo y mínimo, interpretando cómo los cambios en la pendiente reflejan variaciones en la eficiencia o rentabilidad de una decisión.

Este enfoque no solo facilita la comprensión teórica del concepto de óptimo, sino que también ofrece un soporte práctico para la toma de decisiones estratégicas, como la determinación del nivel óptimo de producción, precios o costos. En consecuencia, la combinación del análisis matemático y la representación gráfica fortalece la capacidad analítica del estudiante y del profesional para evaluar y optimizar resultados dentro de contextos reales de gestión económica y empresarial.

Referencias citadas en la Clase 7

- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2013). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (3rd ed.). Wiley.
- Berahas, A. S., Byrd, R. H., & Nocedal, J. (2018). *Derivative-Free Optimization of Noisy Functions via Quasi-Newton Methods* (preprint). arXiv. <https://arxiv.org/abs/1803.10173>.
- Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to Stochastic Programming* (2nd ed.). Springer.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press
- Brent, R. P. (1973). *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Prentice-Hall. (Reimpreso por Dover).
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research* (11th ed.). McGraw-Hill Education.

- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer.
- Milgrom, P., & Segal, I. (2002). Envelope theorems for arbitrary choice sets. *Econometrica*, 70(2), 583–601. (Véase para aplicaciones económicas del teorema del sobre).
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Springer. (Capítulos sobre métodos univariados, búsquedas de línea y Newton).
- Orseau, L., & Hutter, M. (2023). Line Search for Convex Minimization (preprint). <https://arxiv.org/abs/2307.16560> (Propuestas modernas de búsquedas de línea que explotan convexidad).
- Papadimitriou, C. H., & Steiglitz, K. (1998). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Publications.
- Varian, H. R. (2019). Microeconomía intermedia: Un enfoque actual (9.^a ed.). Antoni Bosch, editor.
- Winston, W. L. (2022). *Operations Research: Applications and Algorithms* (5th ed.). Cengage Learning.

Definición de los términos citados en la Clase 7

Optimización. Es el proceso mediante el cual se busca encontrar la mejor solución posible a un problema, maximizando o minimizando una función objetivo dentro de un conjunto de alternativas viables. En administración y economía, se aplica para maximizar utilidades, minimizar costos y asignar eficientemente los recursos, permitiendo tomar decisiones racionales y fundamentadas. En esencia, optimizar implica elegir la opción que genera el mayor beneficio o la menor pérdida, convirtiéndose en una herramienta clave para la eficiencia y competitividad organizacional.

Precio óptimo. Es aquel que maximiza el beneficio de una empresa, equilibrando el precio de venta, la demanda y los costos de producción. Se determina mediante técnicas de optimización matemática, analizando la elasticidad de la demanda y el comportamiento del mercado. Representa el punto en el que cualquier variación

del precio reduciría las utilidades, por lo que constituye una herramienta esencial para la toma de decisiones empresariales y de marketing, al permitir establecer precios rentables y competitivos.

Profundización Clase 7

Métodos numéricos aplicables

En muchos casos prácticos dentro de la administración y la economía, las funciones que se desean optimizar no tienen una forma analítica sencilla o sus derivadas son difíciles o imposibles de calcular. En tales situaciones, se recurre a métodos numéricos de optimización, los cuales permiten aproximar el punto óptimo mediante iteraciones sucesivas y el uso de algoritmos computacionales. Estos métodos son esenciales para resolver problemas reales en los que las funciones provienen de datos empíricos, simulaciones o modelos complejos.

Entre los métodos más utilizados se destacan:

- **Método de Newton-Raphson:** Consiste en un procedimiento iterativo que utiliza la primera y segunda derivada de la función para aproximar el punto crítico con alta precisión. Es muy eficiente cuando se conoce una buena estimación inicial, aunque puede fallar si la función es muy irregular. En economía, se aplica para hallar precios de equilibrio o tasas de rendimiento interno.
- **Método de búsqueda de gradiente (Gradient Descent / Ascent):** Este método ajusta progresivamente los valores de la variable en la dirección opuesta al gradiente (para minimizar) o en su misma dirección (para maximizar). Es ampliamente utilizado en modelos de predicción, análisis de costos y aprendizaje automático, debido a su capacidad para trabajar con grandes volúmenes de datos y múltiples variables.
- **Métodos sin derivadas:** como el método de Brent o la búsqueda dorada, que resultan muy útiles cuando la función no es diferenciable, presenta discontinuidades o contiene ruido en los datos. Estos procedimientos se basan en la comparación de valores de la función y en reglas geométricas que garantizan convergencia hacia el óptimo.



Gracias a su versatilidad, estos métodos pueden implementarse fácilmente en entornos computacionales como Excel, MATLAB, Python o R, que disponen de funciones integradas para la optimización numérica. En el campo administrativo y económico, su aplicación permite resolver problemas complejos como la determinación de precios óptimos, la asignación eficiente de recursos o la minimización de costos de producción, contribuyendo a una toma de decisiones más precisa y basada en evidencia (Nocedal & Wright, 2006; Hillier & Lieberman, 2021).



La excelencia no se improvisa

síguenos

