

Optimización Aplicada a la Administración y Economía

Preparación para
optimización multivariada

Clase 9

Introducción

La optimización multivariada constituye una de las herramientas analíticas más potentes para la toma de decisiones en administración y economía, ya que permite estudiar sistemas donde el resultado depende simultáneamente de varias variables. En contraposición a la optimización univariada que examina funciones con un único argumento, los problemas reales frecuentemente implican la interacción de diversos factores, tales como precios, cantidades, insumos, niveles de inversión, o variables macroeconómicas.

Prepararse para abordar la optimización multivariada implica comprender conceptos fundamentales como funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes, superficies de nivel y condiciones de primer y segundo orden. Esta base teórica es indispensable para analizar decisiones en entornos complejos, donde los agentes económicos y las organizaciones deben identificar combinaciones óptimas de recursos bajo restricciones técnicas, financieras o institucionales.

Clase: 9

RDA 2: Identificar los principios de optimización en los distintos problemas que surgen en las Ciencias Administrativas y Económicas.

9. Preparación para optimización multivariada

La optimización multivariada estudia problemas en los que el objetivo depende de varias variables, comunes en campos como economía, administración y finanzas. Esta preparación es esencial porque, a diferencia de la optimización univariada, las funciones multivariadas presentan comportamientos más complejos, con interacciones entre variables, distintas curvaturas y múltiples restricciones que definen regiones factibles no lineales.

En la figura a continuación se muestra la preparación para la optimización multivariada.

Figura 1. *Preparación para optimización multivariada*

Nota. Esquema que sintetiza los conocimientos y pasos previos necesarios para abordar



problemas de optimización multivariada. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Stewart (2016) y de Thomas, G., Weir, M. y Hass, J. (2014), *Cálculo multivariable*.

a. Comprender la estructura de las funciones en varias variables

Las funciones multivariadas, como $f(x, y)$ o $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ describen superficies o hipersuperficies donde el valor de la función depende simultáneamente de todas las variables. Es fundamental entender:

- cómo la variación en una variable afecta la función cuando las demás se mantienen constantes;
- cómo interactúan dos o más variables en conjunto;
- cómo se representan curvas de nivel, gradientes, superficies 3D y regiones factibles.

Esta base geométrica permite visualizar intuitivamente máximos, mínimos y puntos silla, que no tienen equivalentes simples en una dimensión.

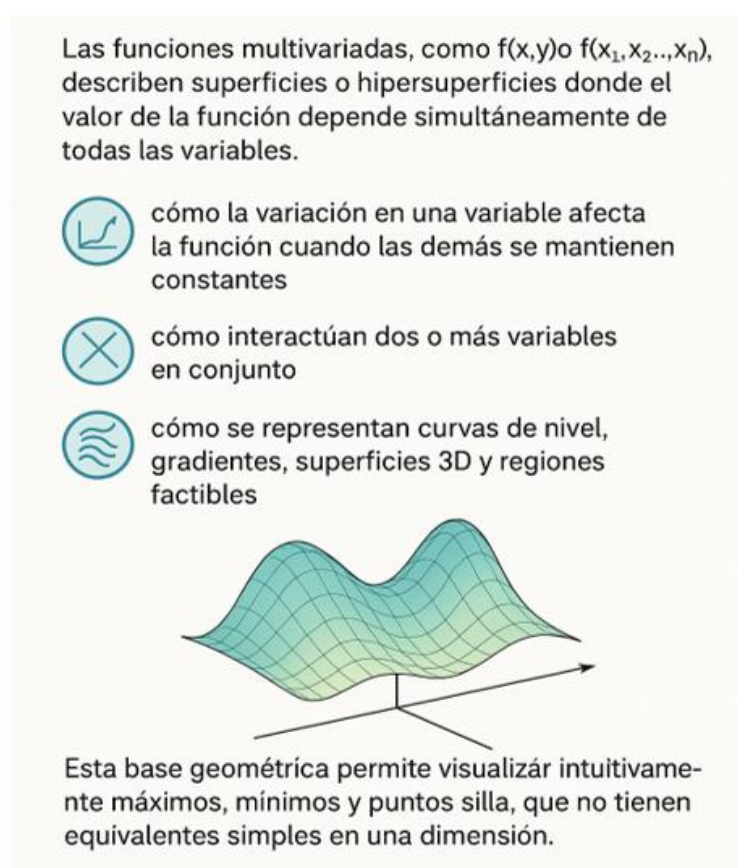
Conjunto de puntos donde la función toma un valor constante k

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$$

Representan superficies planas (2 variables) o hipersuperficies (n variables).

En la figura a continuación se muestra la estructura de las funciones en varias variables.

Figura 2. Estructura de las funciones en varias variables



Nota. Esquema que organiza la estructura y los componentes principales de las funciones en varias variables. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Marsden, J. y Tromba, A. (2003), *Cálculo vectorial* (Addison-Wesley).

b. Derivadas parciales como herramienta de análisis local

La derivada parcial mide cómo cambia la función al variar solo una de sus variables, manteniendo las demás fijas. En problemas multivariados, estas derivadas permiten:

- identificar puntos críticos donde el gradiente se hace cero;
- analizar sensibilidad (qué variable impacta más el objetivo);
- descomponer efectos marginales en modelos económicos como Cobb-Douglas, CES o funciones de costos.

Para una función: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Derivada parcial respecto a la variable x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Para dos variables:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

En administración, esto se traduce en conocer cómo una decisión afecta directamente el desempeño, sin considerar aún las interacciones complejas.

c. El gradiente como vector de dirección de mayor cambio

El gradiente reúne ∇f todas las derivadas parciales en un solo objeto matemático y señala la dirección de mayor incremento de la función. Prepararse para usar esta herramienta implica comprender que:

- Si el gradiente es cero, existe un punto crítico.
- Su magnitud indica la intensidad del cambio.
- En algoritmos numéricos, el gradiente es la base del método de descenso o ascenso.

Para dos variables

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Para n variables

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Condición de punto crítico

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$$

En términos prácticos, el gradiente es la brújula que guía hacia mínimos o máximos.

d. La matriz Hessiana y el análisis de curvatura

Para clasificar los puntos críticos en máximos, mínimos o puntos silla, es necesario evaluar la curvatura mediante la matriz Hessiana, que contiene las segundas derivadas. Su interpretación requiere comprender conceptos como:

- convexidad y concavidad en varias dimensiones.
- Definitud positiva, negativa e indefinida.
- Cómo distinguir si un punto estacionario es estable, inestable o neutro.

Para dos variables

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Para n variables

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Clasificación de un punto crítico usando la Hessiana

Se analiza la *definiteness* de: $H(\mathbf{x}^*)$

- Definida positiva $\rightarrow$ mínimo local

$$H(\mathbf{x}^*) > 0$$

- Definida negativa $\rightarrow$ máximo local

$$H(\mathbf{x}^*) < 0$$

- Indefinida $\rightarrow$ punto silla

$$H(\mathbf{x}^*) \text{ indefinida}$$

Esto es esencial en modelos de costos, utilidad, producción y bienestar social.

e. La incorporación de restricciones

En la práctica, casi todos los problemas administrativos y económicos incluyen restricciones: presupuestos, capacidades, límites normativos, asignación de recursos, etc. Antes de resolver un problema multivariado, es necesario dominar:

- El método de multiplicadores de Lagrange para restricciones de igualdad.
- La programación lineal y no lineal para restricciones más complejas.
- La interpretación económica de los multiplicadores (valores sombra).

Maximizar/minimizar $f(x_1, \dots, x_n)$ sujeto a:

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Construimos la función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

Condición necesaria:

$$\nabla_{x,\lambda} \mathcal{L} = 0$$

Así se pueden modelar políticas públicas, estrategias de precios, producción optimizada o asignación de recursos limitada.

f. Desarrollo de intuición numérica y uso de herramientas computacionales

Los problemas con múltiples variables suelen ser difíciles o imposibles de resolver analíticamente. Por ello, la preparación incluye:

- manejo de herramientas como Excel, Solver, Python, MATLAB, Julia, GAMS o R;
- criterio para interpretar convergencia, soluciones locales y escenarios alternativos,
- sensibilidad a parámetros, incertidumbre y análisis de escenarios.

Paso del método de descenso de gradiente

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

En instituciones o empresas, esta capacidad es esencial para transformar modelos en decisiones implementables.

g. Conexión con problemas reales

La preparación también implica saber traducir una situación real a un modelo matemático multivariado. Esto implica definir:

- variables de decisión.
- función objetiva.
- restricciones.
- interpretación de resultados cuantitativos.

Ejemplos típicos incluyen portafolios financieros, producción multifactorial, asignación óptima de personal, logística, tarificación dinámica o políticas públicas para maximizar el bienestar social.

A continuación, se presenta un video en el que se explica la optimización multivariada.

CESA. 2021. “Optimización multivariable sin restricciones”. YouTube URL. Recuperado 10/11/2025: <https://www.youtube.com/watch?v=8acCHSLj6CA>

2.3.1 Portafolios Óptimos

El concepto de portafolio óptimo se refiere a la combinación específica de activos financieros que maximiza el rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o que minimiza el riesgo para un nivel objetivo de rendimiento.

Ejemplo.

Supongamos que un inversionista quiere distribuir su dinero entre tres activos financieros: A, B y C. Desea minimizar el riesgo (varianza) del portafolio manteniendo un rendimiento esperado mínimo.

a. Variables del modelo

- w_A, w_B, w_C : proporción del portafolio invertida en los activos A, B y C.
- μ_A, μ_B, μ_C : rendimientos esperados de cada activo
- Σ : matriz de covarianzas entre los activos
- R_0 : rendimiento mínimo deseado por el inversionista

b. Función objetiva (minimizar el riesgo total)

$$\min_w w^T \Sigma w$$

c. Restricciones

— Rendimiento mínimo del portafolio

$$w_A \mu_A + w_B \mu_B + w_C \mu_C \geq R_0$$

— La suma de las proporciones debe ser 1

$$w_A + w_B + w_C = 1$$

— Los pesos no pueden ser negativos (sin ventas en corto)

$$w_A, w_B, w_C \geq 0$$

Supongamos:

Activo	Rend. Esperado μ	Desv. estándar	Covarianzas
A	8%	10%	—
B	12%	15%	cov(A,B)=0.012
C	6%	7%	cov(A,C)=0.005, cov(B,C)=0.009

Matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.10^2 & 0.012 & 0.005 \\ 0.012 & 0.15^2 & 0.009 \\ 0.005 & 0.009 & 0.07^2 \end{pmatrix}$$

El inversionista exige un rendimiento mínimo.

$$R_0 = 0.09(9\%)$$

Resultado

$$w_A = 0.40, \quad w_B = 0.45, \quad w_C = 0.15$$

Interpretación:

El portafolio óptimo usa un 40 % en A, un 45 % en B y un 15 % en C para lograr al menos un 9 % de rendimiento con el menor riesgo posible.

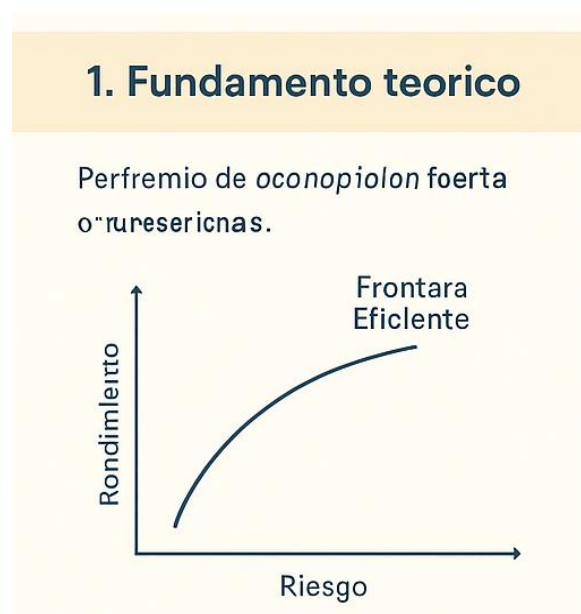
a. Fundamento teórico

El rendimiento esperado de un portafolio es una combinación ponderada de los rendimientos de los activos individuales; sin embargo, el riesgo no depende solo de la volatilidad de cada activo, sino también de las covarianzas entre ellos.

Existe un conjunto de portafolios denominados portafolios eficientes, los cuales conforman la llamada frontera eficiente. Esta frontera representa todas las combinaciones posibles que logran la mejor relación riesgo–rendimiento disponible en el mercado.

En la figura a continuación se muestra el fundamento teórico de los portafolios óptimos.

Figura 3. *Fundamento teórico*



Nota. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Boyd, S. y Vandenberghe, L. (2004), *Convex optimization* (Cambridge University Press).

b. Definición de portafolio óptimo

Un portafolio óptimo es aquel que, dentro de la frontera eficiente, satisface las preferencias específicas de un inversionista en términos de aversión al riesgo. Bajo un criterio clásico, el portafolio óptimo se elige maximizando la función de utilidad esperada del inversionista, que suele tomar la forma cuadrática:

$$U = E(R_p) - \frac{1}{2} A \sigma_p^2$$

donde:

- $E(R_p)$: rendimiento esperado del portafolio,
- σ_p^2 : varianza del portafolio (riesgo),
- A : coeficiente de aversión al riesgo del inversionista.

Este planteamiento implica que cada inversionista tendrá un portafolio óptimo diferente dependiendo de su tolerancia al riesgo. Los inversionistas más adversos seleccionarán portafolios con bajo riesgo, mientras que los menos adversos preferirán portafolios con mayor exposición a activos volátiles, pero con mayor potencial de retorno (Elton et al., 2014).

c. Aplicación práctica

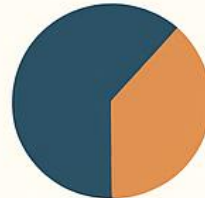
En la práctica, los administradores de inversión utilizan métodos numéricos para estimar portafolios óptimos, dado que la varianza, covarianzas y rendimientos esperados pueden cambiar con el tiempo. Herramientas como programación cuadrática, simulaciones de Monte Carlo y optimización robusta permiten encontrar soluciones estables ante incertidumbre (Boyd & Vandenberghe, 2004).

En la figura a continuación se muestra la aplicación práctica de un portafolio óptimo.

Figura 4. *Aplicación práctica de un portafolio óptimo*

- Ferramientas cuadráticas
- Simulaciones de monte
- Optimización robusta

Evolución tradicional
en apro complejo
de estraciones
multiobjetivos
y modelos ESG



Nota. Representación esquemática de la construcción y análisis de un portafolio óptimo bajo criterios de optimización convexa. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Boyd, S. y Vandenberghe, L. (2004), *Convex optimization* (Cambridge University Press).

9.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen una de las herramientas matemáticas más relevantes en economía, administración, finanzas, ingeniería y ciencias sociales, debido a su capacidad para representar relaciones entre variables que interactúan de manera simultánea (Anton & Rorres, 2022).

En economía, los sistemas lineales son esenciales para analizar modelos de equilibrio general, multiplicadores macroeconómicos, funciones de producción, modelos input–output y optimizaciones con restricciones. Por ejemplo, la matriz de Leontief permite estudiar cómo sectores productivos se abastecen entre sí, representando la estructura interindustrial mediante ecuaciones lineales (Miller & Blair, 2022). En administración, estos sistemas se utilizan para la asignación eficiente de recursos, programación de inventarios, análisis de costos conjuntos y planificación de operaciones bajo condiciones de capacidad fija (Hillier & Lieberman, 2021).

Matemáticamente, un sistema lineal puede expresarse en forma matricial como:

$$Ax = b$$

donde **A** es una matriz de coeficientes, **x** es el vector de incógnitas y **b** es el vector de constantes.

La resolución puede lograrse mediante métodos numéricos iterativos como Jacobi o Gauss-Seidel, que resultan especialmente útiles para matrices grandes o dispersas (Burden, Faires & Burden, 2023). En finanzas, los sistemas lineales permiten obtener portafolios óptimos, ya que los problemas de media-varianza del modelo de Markowitz se transforman en ecuaciones lineales al aplicar condiciones de primer orden (Elton, Gruber, Brown & Goetzmann, 2020).

En la figura a continuación se muestra el sistema de ecuaciones lineales

Figura 5. Sistema de ecuaciones lineales

ECONOMÍA

Un economía los matira con enpèxtter ontelacraleios que estudian como sectores productivos, multiplicadores macroeconómicos, funciones de producción, teontou t prluct econ ebrneiótules.

ADMINISTRACIÓN

Las matriz de Leontief presJltería en matriz sectore ece programación de inventarios, anallisis de costos conjuntos y regiones

$$Ax =$$

A = matriz de coeficientes, k eelizan

x = vector de incogrinitas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Nota. Esquema que ilustra la formulación de un sistema de ecuaciones lineales aplicado al análisis de portafolios de inversión. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J. y Goetzmann, W. N. (2020), *Modern portfolio theory and investment analysis*.

En síntesis, los sistemas de ecuaciones lineales funcionan como una base algebraica para representar estructuras complejas y resolver problemas reales de optimización, planeamiento y equilibrio.

9.3 Álgebra lineal

El álgebra lineal es una rama fundamental de las matemáticas que estudia los vectores, los espacios vectoriales, las matrices y las transformaciones lineales. Su importancia en las ciencias administrativas y económicas es enorme, porque permite modelar y resolver problemas donde intervienen múltiples variables que mantienen relaciones lineales entre sí. En contextos reales, esto se traduce en la posibilidad de analizar sistemas de precios, balances contables, flujos interindustriales, rendimientos de portafolios financieros, programación de recursos y modelos macroeconómicos estructurales.

A continuación, se presenta un video en el que se explica qué es el álgebra lineal. Madrid, F. 2018. “Álgebra lineal”. YouTube URL. Recuperado 10/11/2025.
https://www.youtube.com/watch?v=_HidALqmZe0

En la figura a continuación se muestra la relevancia del álgebra lineal en la optimización.

Figura 6. Relevancia del álgebra lineal

Relevancia del álgebra lineal en la optimización

En optimización, especialmente a multivariada, estiens la mayòra empenen de mlastronous escampames como modelos

a. Vectores y espacios vectoriales

- Un vector representa un conjunto ordenado de valores. En economía e administración, por perloe
- Un vector de precios, un vector de cantidades a demandadas, en generar parase conocer para entenercias



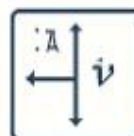
b. Matrices

- Matrices perpcenentan sistemás con múltiples variables y ecuaciones, mejores en coaciones
- Modelos insumo-producto de Leontief, usados para estudiar el efecto de un cambio en el comportamiento en la producción total de la economía
- Estimación de modelos econométricos mediante matrices para analizar las relaciones económicas



c. Determinantes e inversas

- Determinantes e inversas en acción sistemas que analizan las estructuras de dinámicas de ecircuitos
- Modelos de crecimiento económico estructural deta



Nota. Esquema que destaca el papel del álgebra lineal en la modelización económica y en el análisis insumo-producto. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Miller, R. E. y Blair, P. D. (2022), *Input-output analysis: Foundations and extensions* (Cambridge University Press).

Sistema de precios en equilibrio (modelo input-output de Leontief)

Supongamos una economía con dos sectores:

1. Agricultura (A)
2. Manufactura (M)

Cada sector utiliza productos del otro para producir. Estas relaciones pueden expresarse como un sistema lineal:

$$\begin{aligned} p_A &= 0.4 p_A + 0.2 p_M + v_A \\ p_M &= 0.3 p_A + 0.3 p_M + v_M \end{aligned}$$

Donde:

- p_A : precio del producto agrícola
- p_M : precio del manufacturado
- Los coeficientes (0.4, 0.2, etc.) son los insumos requeridos por unidad producida
- v_A y v_M son los valores agregados (salarios, capital, etc.)

Forma matricial (álgebra lineal pura)

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_A \\ p_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_A \\ v_M \end{pmatrix}$$

Llevando todo a un solo lado:

$$(I - A)p = v$$

Con:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ I - A &= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resolución del sistema

Si:

$$v = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Buscamos:

$$p = (I - A)^{-1}v$$

El álgebra lineal nos permite:

- Calcular $(I - A)^{-1}$ (matriz inversa)
- Obtener los precios en equilibrio
- Analizar impactos si cambian los coeficientes o el valor agregado

Resultado aproximado:

$$p \approx \begin{pmatrix} 68.75 \\ 92.5 \end{pmatrix}$$

Interpretación:

El precio de equilibrio agrícola es 68.75

El precio manufacturero es 92.5

Relevancia del álgebra lineal en la optimización

El álgebra lineal es fundamental en la optimización multivariada porque proporciona el marco matemático para representar y resolver modelos económicos y administrativos que involucran múltiples variables y relaciones lineales. A través de vectores, matrices y espacios vectoriales, es posible describir sistemas complejos como precios, producción, demanda o portafolios.

Las matrices permiten estructurar restricciones, modelar sistemas insumo-producto y resolver ecuaciones mediante determinantes e inversas, mientras que las transformaciones lineales explican cambios en estados económicos y financieros. Además, los autovalores y autovectores permiten analizar estabilidad, crecimiento y reducción de dimensiones en grandes conjuntos de datos, lo que convierte al álgebra lineal en una herramienta esencial para la optimización, la economía aplicada y la toma de decisiones.

Aplicaciones directas en administración y economía

En la figura a continuación se muestran las aplicaciones directas en administración y economía.

Figura 7. *Aplicaciones en administración y economía*



Nota. Esquema que reúne aplicaciones del análisis insumo–producto y de modelos cuantitativos. Elaboración propia (2025), con apoyo de OpenAI, a partir de Miller, R. E. y Blair, P. D. (2022), *Input–output analysis: Foundations and extensions* (Cambridge University Press).

a. Optimización

La programación lineal depende completamente del álgebra lineal:

- Maximización de utilidades,
- Minimización de costos,
- Asignación óptima de recursos,
- Optimización de portafolios (varianzas y covarianzas).

b. Econometría

La forma matricial del modelo clásico:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Usa operaciones matriciales básicas.

c. Finanzas

El cálculo de riesgo y retornos en portafolios usa:

- Matrices de covarianza.
- Vectores de pesos.
- Optimización cuadrática.

d. Gestión operativa

- Modelación de redes de transporte.
- Balance de líneas de producción.
- Inventarios en cadena de suministro.

Conclusión

La preparación para la optimización multivariada constituye un pilar esencial para el análisis riguroso de problemas en economía, administración, finanzas y ciencias sociales. El dominio de conceptos como funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes, matrices Hessianas y métodos de optimización con restricciones permite comprender fenómenos complejos donde múltiples decisiones interactúan simultáneamente. Esta base matemática se complementa con herramientas computacionales y una adecuada interpretación económica, lo que facilita traducir situaciones reales como la asignación de recursos, la gestión de portafolios o el análisis de sistemas productivos a modelos cuantitativos sólidos y resolubles.

Asimismo, el uso de álgebra lineal y sistemas de ecuaciones refuerza la estructura analítica necesaria para representar relaciones tecnológicas, restricciones y flujos económicos de manera clara y consistente. Tanto vectores como matrices y transformaciones lineales constituyen el lenguaje natural de la optimización moderna y permiten desarrollar modelos más precisos, eficientes y adaptados a entornos dinámicos. En conjunto, esta preparación no solo facilita la resolución de problemas multivariados, sino que potencia la capacidad de los profesionales para tomar decisiones fundamentadas, evaluar escenarios alternativos y diseñar estrategias óptimas en contextos altamente interdependientes y competitivos.

Referencias citadas en la clase 9

Anton, H., & Rorres, C. (2022). *Elementary Linear Algebra with Applications* (13th ed.). Wiley.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley-Interscience.

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Burden, R., Faires, D., & Burden, A. (2023). *Numerical Analysis* (11th ed.). Cengage Learning

Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2020). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (10th ed.). Wiley.

Hillier, F., & Lieberman, G. (2021). *Introduction to Operations Research* (11th ed.). McGraw-Hill.

Miller, R. E., & Blair, P. D. (2022). *Input–Output Analysis: Foundations and Extensions* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Marsden, J., & Tromba, A. (2003). *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley.

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Nocedal, J., & Wright, S. (2006). Numerical Optimization. Springer.
- Stewart, J. (2016). Cálculo de varias variables. Cengage Learning.
- Strang, G. (2023). *Linear Algebra and Learning from Data*. Wellesley-Cambridge Press
- Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2014). Cálculo multivariable. Pearson.

Definición de los términos citados en la clase 9

Optimización multivariada. Es la rama de la optimización matemática que busca encontrar los valores máximos o mínimos de una función que depende de múltiples variables, analizando cómo sus cambios simultáneos afectan la función objetiva. Puede incluir restricciones expresadas como ecuaciones o inecuaciones, y se resuelve mediante herramientas como gradientes, matrices Hessianas, multiplicadores de Lagrange o algoritmos numéricos. Es fundamental en economía, ingeniería, finanzas, estadística y ciencias de datos, donde los problemas reales requieren tomar decisiones óptimas considerando varias dimensiones al mismo tiempo.

Portafolio óptimo. Es la combinación de activos financieros que maximiza el rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o que minimiza el riesgo para un nivel objetivo de rendimiento, según los criterios de la teoría de portafolios moderna. Se determina analizando las varianzas, covarianzas y pesos de los activos, de modo que la cartera resultante logre el mejor equilibrio, riesgo–retorno posible. Este portafolio pertenece a la llamada frontera eficiente de Markowitz, donde ninguna otra combinación de activos ofrece un mejor desempeño bajo los mismos niveles de riesgo o retorno.

Profundización de la clase 9

Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen una de las herramientas matemáticas más relevantes en economía, administración, finanzas, ingeniería y ciencias sociales, debido a su capacidad para representar relaciones entre variables que interactúan de manera simultánea. A través de ellos es posible modelar situaciones donde múltiples ecuaciones expresan restricciones, equilibrios, asignaciones o relaciones tecnológicas entre variables. Su resolución permite identificar combinaciones de valores que cumplen simultáneamente todas las restricciones planteadas, lo que resulta esencial para comprender el comportamiento de sistemas complejos (Anton & Rorres, 2022).

En economía, los sistemas lineales permiten analizar modelos estructurales y de equilibrio general, capturando cómo distintos mercados o sectores interactúan entre sí. Por ejemplo, se utilizan para estudiar la relación entre producción, consumo intermedio y demanda final en modelos tipo input–output. La matriz de Leontief, ampliamente utilizada en análisis económico y planificación sectorial, representa la estructura interindustrial bajo el supuesto de coeficientes técnicos fijos, lo que permite evaluar cómo cambios en la demanda final afectan la producción total de la economía (Miller & Blair, 2022). Asimismo, los sistemas lineales son fundamentales en modelos macroeconómicos keynesianos, donde se estudian los multiplicadores fiscales y del gasto público mediante ecuaciones simultáneas.

En administración, estos sistemas facilitan la asignación eficiente de recursos bajo restricciones de capacidad, presupuestos, tiempos o inventarios. Se emplean en la resolución de problemas operativos tales como programación de la producción, gestión de cadenas de suministro, rutas de transporte, análisis de costos conjuntos y diseño de planes óptimos de compras. La representación matricial permite manejar simultáneamente múltiples decisiones y restricciones, lo que resulta indispensable en entornos empresariales con estructuras complejas (Hillier & Lieberman, 2021).

Desde el punto de vista matemático, un sistema lineal puede expresarse en forma matricial compacta como:

$$Ax = b$$

donde:

- A es la matriz de coeficientes que determina la estructura del sistema,
- x es el vector de incógnitas,
- b es el vector de términos independientes.

La solución del sistema puede abordarse mediante diversos métodos. Cuando el sistema es pequeño o la matriz A es bien condicionada, se emplean métodos directos como eliminación de Gauss, factorización LU o descomposición QR. Para sistemas de gran escala, especialmente aquellos provenientes de modelos económicos computables o problemas de simulación, se utilizan métodos numéricos iterativos como Jacobi, Gauss-Seidel o gradiente conjugado, que resultan eficientes en matrices dispersas (Burden, Faires & Burden, 2023).

En finanzas, los sistemas de ecuaciones lineales son parte integral del cálculo de portafolios óptimos bajo el enfoque media–varianza. Los problemas formulados por Markowitz pueden transformarse en ecuaciones lineales al aplicar condiciones de primer orden, lo que permite encontrar los pesos óptimos de inversión que minimizan el riesgo para un nivel dado de retorno o maximizan retornos ajustados al riesgo (Elton, Gruber, Brown & Goetzmann, 2020). De este modo, la estructura matricial facilita el análisis de covarianzas, restricciones presupuestarias y límites regulatorios.

Además, los sistemas lineales desempeñan un rol fundamental en la econometría moderna. La estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) del modelo clásico se formula como un sistema matricial cuyas ecuaciones normales tienen la forma:

$$(X'X)\beta = X'Y$$

donde la solución requiere calcular la matriz inversa o aplicar técnicas numéricas de factorización. Esto muestra que gran parte de la inferencia estadística en economía se sustenta directamente en álgebra lineal.

En síntesis, los sistemas de ecuaciones lineales funcionan como una base algebraica central para representar estructuras complejas y resolver problemas reales de optimización, planeamiento, análisis financiero y equilibrio económico. Por su



capacidad para organizar información multidimensional y ofrecer soluciones consistentes, constituyen un pilar fundamental de la modelación cuantitativa en diversas disciplinas y una herramienta indispensable para la toma de decisiones basada en evidencia.



La excelencia no se improvisa

síguenos

