

Matemáticas Discretas

Nociones de conteo

Clase 10



La excelencia no se improvisa



Introducción de la clase

En muchas situaciones cotidianas y profesionales necesitamos contar posibilidades: desde calcular cuántas formas hay de elegir una contraseña, hasta estimar la cantidad de caminos posibles en una red de computadoras. Contar parece una tarea sencilla, pero cuando las opciones se combinan o se superponen, hacerlo de manera directa puede resultar confuso o llevar a errores. Para evitarlo, la matemática nos ofrece principios claros y ordenados que permiten calcular de forma sistemática y precisa el número de maneras en que se pueden realizar ciertas tareas.

En esta clase exploraremos cuatro ideas que nos ayudarán a organizar el conteo de posibilidades: el principio aditivo, que suma alternativas excluyentes; el principio multiplicativo, que multiplica opciones de etapas sucesivas; el principio de inclusión-exclusión, que evita la sobrecuenta al combinar conjuntos; y el principio del palomar, que asegura la repetición inevitable en distribuciones.

Clase 10: Nociones de conteo

RDA 1: Comprender los conceptos fundamentales de la Matemática Discreta, incluyendo lógica matemática, teoría de conjuntos, relaciones, algoritmos y teoría de grafos, destacando su importancia y aplicabilidad en el análisis de problemas discretos.

10. Nociones de conteo

Contar es una de las actividades más naturales que realizamos a diario: desde calcular cuántos libros hay en un estante hasta determinar el número de posibles contraseñas en un sistema. En matemáticas, esta idea se formaliza a través del concepto de **cardinalidad**. Recordemos que la cardinalidad de un conjunto A , denotada por $|A|$, indica cuántos elementos contiene dicho conjunto.

Así, realizar un conteo no es más que determinar la cardinalidad de un conjunto asociado a un problema. A partir de esta noción básica, desarrollaremos principios que nos permiten calcular de manera ordenada y eficiente el número de formas en que ciertos eventos o elecciones pueden ocurrir, sin necesidad de listar explícitamente todas las posibilidades.

Ejemplo 1. Supongamos que Juan debe elegir una contraseña formada por un número del 1 al 5 y una vocal. Podemos representar los conjuntos como

$$N = \{1,2,3,4,5\}, \quad V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Las posibles contraseñas corresponden al producto cartesiano $N \times V$. Si listamos todas las opciones, obtenemos:

$$\{1a, 1e, 1i, 1o, 1u, 2a, 2e, 2i, 2o, 2u, 3a, \dots, 5u\}.$$

En total, $|N| \cdot |V| = 5 \times 5 = 25$ posibles contraseñas.

En este caso fue sencillo en listar todas las posibilidades porque el conjunto es pequeño. Pero, ¿qué pasaría si Juan tuviera que generar una contraseña de 8 caracteres, que incluya al menos una letra y al menos un número? Claramente, en ese escenario la estrategia de listar dejaría de ser práctica, y necesitaremos principios más generales de conteo para encontrar la respuesta.

10.1. Principio multiplicativo

Imagina nuevamente el caso de Juan y sus contraseñas. Debe escoger un número entre cuatro opciones $\{1,2,3,4\}$ y una vocal entre cinco opciones $\{a, e, i, o, u\}$. Primero elige el número: tiene 4 formas distintas de hacerlo. Después elige la vocal: tiene 5 posibilidades.

Si pensamos en todo el proceso, vemos que la elección completa (número + vocal) puede realizarse de

$$4 \cdot 5 = 20$$

formas distintas. Lo que está ocurriendo aquí no es más que analizar el producto cartesiano de los conjuntos de posibilidades en cada tarea:

$$N = \{1,2,3,4\}, \quad V = \{a, e, i, o, u\}, \quad N \times V.$$

Y calcular cuántos pares distintos se pueden formar equivale a determinar la cardinalidad de ese producto cartesiano:

$$|N \times V| = |N| \cdot |V| = 4 \cdot 5 = 20.$$

De manera general, el **principio multiplicativo** establece que cuando una tarea puede dividirse dos pasos sucesivos e independientes, el número total de formas de

realizar la tarea es el producto de las posibilidades de cada paso. En otras palabras: si una tarea se divide en dos etapas independientes, y la primera puede hacerse de n_1 maneras y la segunda de n_2 maneras, entonces en total existen $n_1 \cdot n_2$ formas distintas de realizarla.

De manera general, si hay m etapas independientes, si la primera etapa se puede realizar de n_1 maneras, la segunda de n_2 maneras, y así hasta la etapa m con n_m maneras, entonces el total es:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m.$$

Ejemplo 2. Beatriz quiere elegir un almuerzo en la cafetería: primero debe escoger un plato fuerte y luego una bebida. Si los platos fuertes son {pollo, pescado, carne} (3 opciones) y las bebidas son {agua, jugo} (2 opciones), entonces existen

$$3 \cdot 2 = 6$$

formas distintas de combinar plato y bebida.

Ejemplo 3. Beatriz, en otra cafetería, tiene también dos opciones de postre {fruta, helado}, así que debe seleccionar su almuerzo combinando 3 opciones de plato fuerte, 2 opciones de bebida y 2 opciones de postre. En esta situación, Beatriz tiene

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

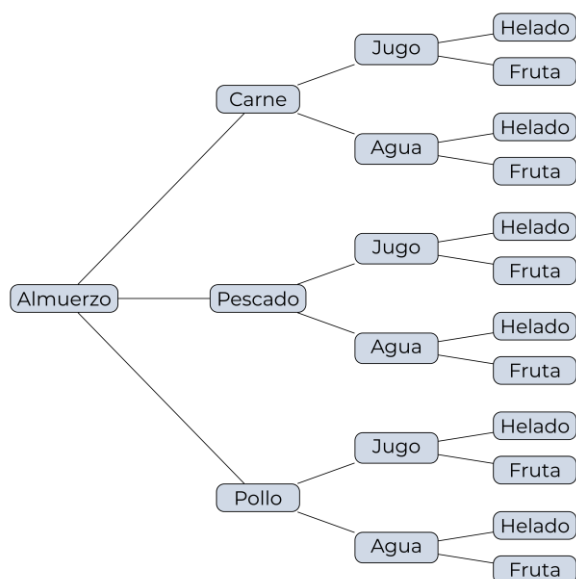
opciones distintas de almuerzo.

A veces es útil visualizar el principio multiplicativo mediante un diagrama en forma de árbol. En este tipo de representación, cada rama corresponde a una elección posible en una etapa, y de cada una de ellas surgen nuevas ramas con las elecciones de la siguiente etapa.

De esta manera, el número total de caminos distintos coincide con el número total de formas de realizar la tarea completa. Esta visualización nos permite entender con claridad cómo se combinan las opciones en cada paso y por qué el conteo final se obtiene multiplicando las posibilidades.

Figura 1

Representación de árbol del principio multiplicativo



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Para reforzar lo aprendido y ponerlo en práctica, te recomiendo revisar el siguiente enlace, donde encontrarás ejercicios resueltos que ilustran el uso del principio multiplicativo:

- **Título del enlace:** Principio fundamental del conteo - Principio de la multiplicación
- **Descripción del enlace:** Explicación práctica y con ejemplos del principio de la multiplicación.
- **Enlace:** https://youtu.be/nz0dpuQP5xc?si=Z1wKtzN3_TnupScj

Revisemos algunos ejemplos más, tomados del libro de Johnsonbaugh (2018).

Ejemplo 4. Consideremos el alfabeto {A, B, C, D, E} y construyamos cadenas de longitud 4 sin permitir repeticiones de letras. ¿Cuántas de estas cadenas existen?

La cadena se forma en cuatro pasos sucesivos:

- Para la primera posición hay 5 opciones (cualquiera de las letras).
- Una vez elegida la primera letra, quedan 4 opciones para la segunda.
- Luego, para la tercera posición, solo quedan 3 opciones.
- Finalmente, para la cuarta posición, restan 2 opciones.

Por el principio multiplicativo, el número total de cadenas es:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Ejemplo 5. ¿Cuántas de esas cadenas empiezan con la letra B?

Si fijamos B en la primera posición, el problema se reduce a formar las tres letras restantes con el conjunto {A, C, D, E}, sin repeticiones.

- Segunda posición: 4 maneras.
- Tercera posición: 3 maneras.
- Cuarta posición: 2 maneras.

Así, el número de cadenas es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Ejemplo 6. Ahora pensemos en cadenas de ocho bits que comienzan con 101. ¿Cuántas de estas cadenas existen?

Si la cadena comienza con 101, los primeros tres bits ya están fijos, y nos quedan cinco posiciones por completar. Cada una de esas posiciones puede tomar dos valores posibles (0 o 1). Por tanto, hay:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

cadenas que empiezan con 101.

10.2. Principio aditivo

En muchas situaciones no se trata de realizar varias acciones a la vez, sino de elegir entre opciones excluyentes. Por ejemplo, supongamos que María va a la cafetería y debe decidir entre tomar un café o un té. El café puede pedirse en dos presentaciones (americano o expreso), mientras que el té puede pedirse en tres sabores distintos (limón, menta o frutos rojos).

Dado que María no puede pedir café y té al mismo tiempo, el total de formas de elegir una bebida es:

$$2 + 3 = 5.$$

Este razonamiento nos lleva al **principio aditivo**: Si una tarea se puede realizar de n_1 maneras y una segunda tarea se puede realizar de n_2 maneras, y si no se pueden realizar las dos a la vez, entonces hay $n_1 + n_2$ maneras de realizar alguna de ellas.

De manera más general, si una tarea puede realizarse de n_1 maneras, otra tarea de n_2 maneras, otra más de n_3 maneras, y así sucesivamente hasta una tarea de n_m maneras, y ninguna de estas tareas puede realizarse simultáneamente, entonces existen en total:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$$

formas posibles de realizar una de ellas.

Ejemplo 7. Imagina que Guillermo quiere elegir cómo trasladarse a la universidad. Tiene dos opciones:

- Tomar un bus, con 3 rutas posibles.
- Usar una aplicación de transporte privado, con 2 conductores disponibles.

Dado que no puede usar bus y aplicación a la vez, el total de formas de transporte posibles es

$$3 + 2 = 5.$$

Ejemplo 8. Un caso real donde se evidencia la fuerza del conteo lo encontramos en la propagación del **virus Melissa** (Johnsonbaugh 2018), que a fines de los 90 causó serios problemas en sistemas informáticos.

El virus se transmitía por correo electrónico: al abrir el archivo adjunto, el macro reenviaba automáticamente el mensaje a las primeras 50 direcciones de la libreta de contactos. Cada nuevo receptor que abre el adjunto hace exactamente lo mismo (reenviar a 50 nuevas direcciones). Supón que en cada iteración las direcciones alcanzadas son disjuntas de las anteriores.

- ¿Cuántos correos nuevos se generan en la t -ésima iteración?
- ¿Cuántos correos en total se han generado tras k iteraciones?
- Evalúa para $k = 4$.

Cada receptor genera 50 envíos nuevos; por tanto, el número de correos nuevos en la t -ésima iteración es

$$50 \cdot 50 \cdot 50 \cdots 50 = 50^t,$$

pues en cada «nivel» del árbol de reenvíos se multiplican por 50 las posibilidades respecto al nivel anterior.

El total hasta la k -ésima iteración es la suma de las olas (excluyentes) de correos nuevos:

$$50 + 50^2 + \cdots + 50^k = \sum_{t=1}^k 50^t = \frac{50(50^k - 1)}{49}.$$

Para $k = 4$:

$$50 + 50^2 + 50^3 + 50^4 = 50 + 2,500 + 125,000 + 6,250,000 = 6,377,550.$$

Revisemos algunos ejemplos más, adaptados del libro de Johnsonbaugh (2018).

Ejemplo 9. En una feria tecnológica se exhiben dispositivos de tres categorías: 5 laptops distintas, 3 tablets distintas y 2 teléfonos distintos. ¿Cuántas maneras existen de elegir dos dispositivos de categorías diferentes?

Solución.

Solución. Analizamos caso por caso aplicando el principio multiplicativo:

- Elegir una laptop y una tablet: $5 \cdot 3 = 15$ maneras.
- Elegir una laptop y un teléfono: $5 \cdot 2 = 10$ maneras.
- Elegir una tablet y un teléfono: $3 \cdot 2 = 6$ maneras.

Ahora, como estas elecciones corresponden a categorías excluyentes (no pueden darse simultáneamente), usamos el principio aditivo para sumar los resultados:

$$15 + 10 + 6 = 31.$$

Es decir, hay 31 formas distintas de elegir dos dispositivos de categorías diferentes en la feria.

Ejemplo 10. Un comité de seis personas (Alicia, Benjamín, Consuelo, Adolfo, Eduardo y Francisco) debe seleccionar un presidente, un secretario y un tesorero.

- ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?

Para designar los tres cargos se procede en tres pasos sucesivos: primero se elige al presidente (6 maneras), luego al secretario (5 maneras) y finalmente al tesorero (4 maneras). Por el principio multiplicativo, el número total de formas de hacerlo es

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

- ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Eduardo debe ocupar uno de los puestos?

Si Eduardo es presidente, quedan $5 \cdot 4 = 20$ formas de asignar los otros dos cargos. Si es secretario, también hay $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades, y si es tesorero, igualmente $5 \cdot 4 = 20$. Dado que estos casos son excluyentes, por el principio aditivo el número total es

$$20 + 20 + 20 = 60.$$

Otra forma de verlo es asignar primero el puesto a Eduardo (3 opciones), luego el cargo más alto que queda (5 opciones) y finalmente el último cargo (4 opciones). Así, por el principio multiplicativo, existen $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ formas de hacerlo.

10.3. Principio de inclusión/exclusión

En ocasiones, al contar elementos que pertenecen a varios conjuntos, corremos el riesgo de **contar dos veces** a aquellos que están en la intersección. El principio de inclusión/exclusión nos ofrece una fórmula ordenada para corregir ese exceso en el conteo y obtener el número exacto de elementos en una unión de conjuntos.

Teorema 1: Principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos.

Sean A_1 y A_2 dos conjuntos finitos. Entonces:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Es decir, sumamos las cardinalidades de ambos conjuntos y restamos la intersección, para evitar duplicar los elementos que pertenecen a ambos.

Ejemplo 11. En una clase hay 30 estudiantes que llevan Matemáticas y 25 que llevan Física. De ellos, 10 están inscritos en ambas materias. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

Si simplemente sumáramos $30 + 25 = 55$, estaríamos contando dos veces a los 10 estudiantes que están en ambos cursos. Aplicando el principio de inclusión-exclusión:

$$|M \cup F| = |M| + |F| - |M \cap F| = 30 + 25 - 10 = 45.$$

Por lo tanto, 45 estudiantes es el total.

Para tres conjuntos, el principio toma la siguiente forma: Sean A_1 , A_2 y A_3 tres conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

La idea es: primero se suman todos los conjuntos, luego se restan las intersecciones dobles (porque cada elemento común fue contado dos veces), y finalmente se suma la intersección triple (que había quedado restada de más).

Finalmente, para n conjuntos finitos, la fórmula general es:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

La fórmula sigue un patrón de alternancia de signos: se suman todas las cardinalidades individuales; se restan todas las intersecciones de dos en dos; se suman las intersecciones triples; se restan las intersecciones cuádruples, y así sucesivamente.

De este modo, cada elemento de la unión aparece contado exactamente una vez, sin repeticiones.

Para reforzar lo aprendido y ponerlo en práctica, te recomiendo revisar el siguiente enlace, donde encontrarás ejercicios resueltos que ilustran el uso del principio de inclusión/exclusión:

- **Título del enlace:** Combinatoria: El Principio de Inclusión-Exclusión
- **Descripción del enlace:** Explicación práctica y con ejemplos del principio de inclusión/exclusión.

Enlace: <https://youtu.be/gtLi6o7gpz0?si=JfLqB-1KtJCHRFWh>

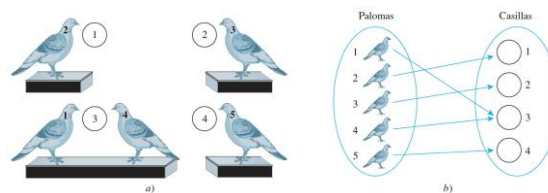
10.4. El principio del palomar

El **principio del palomar**, también llamado *principio de las casillas* o *principio de Dirichlet* (Epp 2020), establece que si se busca distribuir $k + 1$ objetos en k cajas, entonces al menos una caja debe contener al menos dos objetos.

Este principio, formulado por primera vez de manera formal por Dirichlet. Se ilustra de manera sencilla pensando en palomas que vuelan hacia casillas: si n palomas vuelan hacia m casillas, y $n > m$, entonces alguna casilla debe contener al menos dos palomas.

Figura 2

Ilustración del principio del palomar



Nota: Imágenes tomada de Epp (2020).

De manera más general: si se distribuyen N objetos en k cajas, entonces existe al menos una caja que contiene al menos

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

objetos. Aquí el símbolo $\lceil \cdot \rceil$ denota la **función techo**, que redondea cualquier número real hacia arriba hasta el entero más cercano. Por ejemplo, $\lceil 3.2 \rceil = 4$ y $\lceil 5 \rceil = 5$. Este

redondeo es necesario porque, aunque N/k puede no ser un número entero, el número de objetos en una caja siempre debe ser un número natural.

Ejemplo 12. En un grupo de 13 personas, ¿debe haber al menos dos que nacieron en el mismo mes?

Aquí tenemos $N = 13$ objetos (personas) y $k = 12$ cajas (meses del año). Aplicando el principio del palomar:

$$\left\lceil \frac{13}{12} \right\rceil = 2.$$

Esto significa que, inevitablemente, al menos dos personas comparten el mismo mes de nacimiento.

Ejemplo 13. Un cajón contiene 10 calcetines blancos y 10 calcetines negros. Si se extraen calcetines al azar sin mirar, ¿cuál es el número mínimo que se debe sacar para asegurarse de obtener un par del mismo color?

Las «cajas» son los dos colores: blanco y negro ($k = 2$). Queremos garantizar que haya al menos una caja con 2 objetos. Aplicando el principio del palomar, si se extraen

$$\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$$

no basta, porque podríamos tener uno blanco y uno negro. Pero al extraer 3 calcetines, el principio asegura que al menos dos corresponden al mismo color.

Así, el número mínimo de calcetines a sacar es 3.

Referencias

Epp, S. S. (2020). Discrete Mathematics with Applications (5.a ed.). Cengage Learning.

Johnsonbaugh, R. (2018). Discrete Mathematics (8.a ed.). Pearson Educación.

Términos

- **Principio aditivo:** Cuando una tarea se puede hacer de varias formas excluyentes, el total se obtiene sumando las posibilidades.

- **Principio multiplicativo:** Cuando una tarea se realiza en pasos sucesivos, el total se obtiene multiplicando las posibilidades de cada paso.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Ejercicios resueltos de Nociones de Conteo
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una serie de ejercicios resueltos, con su explicación paso a paso, sobre las Nociones de Conteo.
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase10/EjerciciosResueltosClase10.pdf>



La excelencia no se improvisa

síguenos

