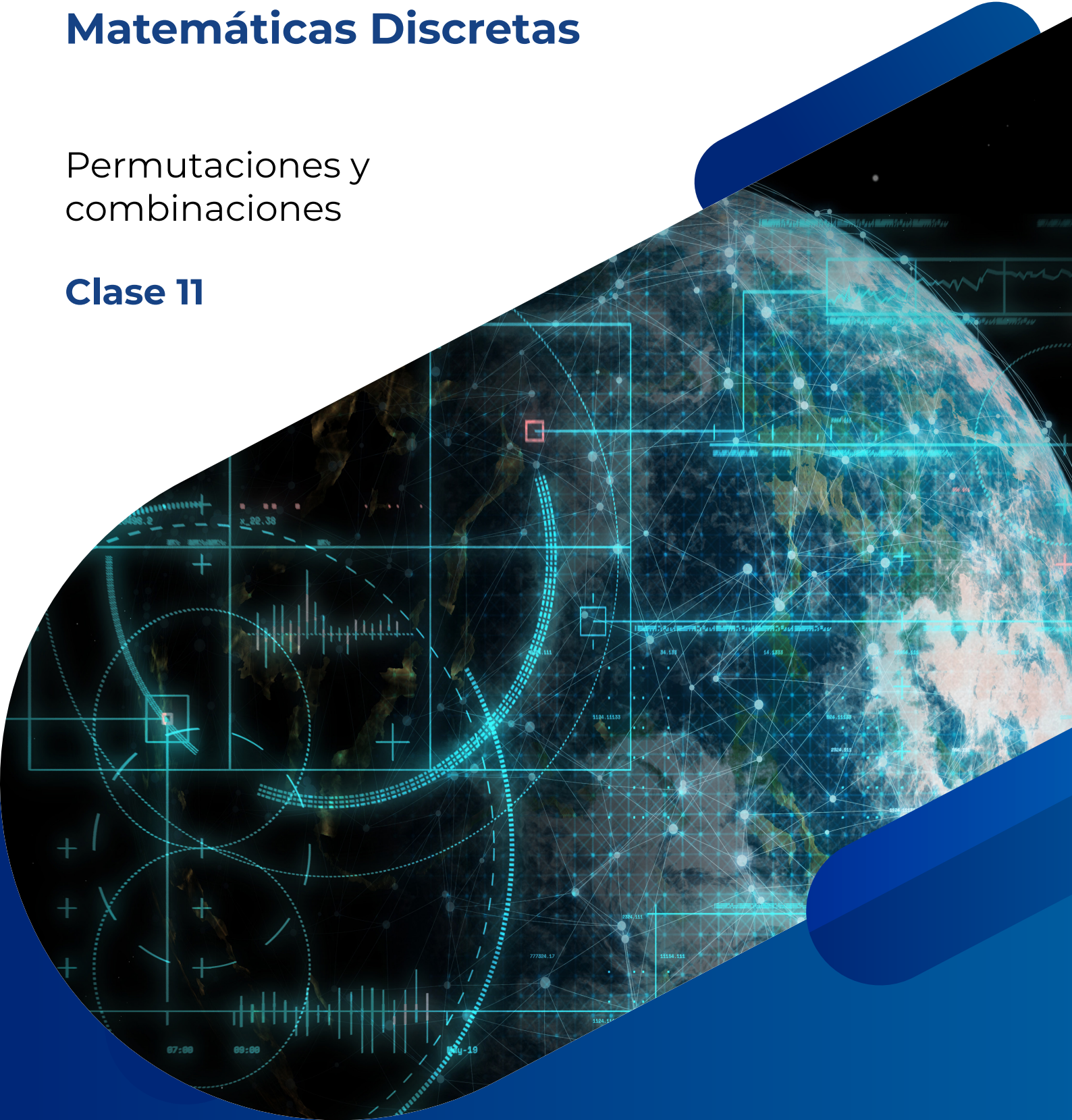


Matemáticas Discretas

Permutaciones y
combinaciones

Clase 11



Introducción de la clase

En la clase anterior exploramos las nociones fundamentales de conteo, aprendiendo a resolver problemas mediante los principios aditivo y multiplicativo, así como el principio de inclusión-exclusión y el principio del palomar. Estos conceptos nos dieron herramientas para organizar y analizar situaciones donde la cantidad de posibilidades depende de cómo se estructuran las elecciones. Sin embargo, todavía queda una pregunta esencial: ¿qué ocurre cuando el orden de los elementos influye en el resultado, y qué pasa cuando el orden no tiene importancia?

En esta clase avanzaremos hacia el estudio de las permutaciones y combinaciones, dos conceptos centrales en la teoría de conteo. Veremos cómo calcular de cuántas maneras se pueden ordenar elementos distintos, cómo seleccionar subconjuntos cuando el orden no importa y cómo generalizar estas ideas a casos con repeticiones o restricciones especiales. Estos temas no solo son relevantes en matemáticas puras, sino que aparecen con frecuencia en contextos prácticos como la generación de contraseñas, la organización de equipos de trabajo o la distribución de recursos en sistemas de información.

Clase 11: Permutaciones y combinaciones

RDA 1: Comprender los conceptos fundamentales de la Matemática Discreta, incluyendo lógica matemática, teoría de conjuntos, relaciones, algoritmos y teoría de grafos, destacando su importancia y aplicabilidad en el análisis de problemas discretos.

11. Permutaciones y combinaciones

Hasta ahora hemos resuelto problemas de conteo utilizando principios como el aditivo, el multiplicativo o el de inclusión-exclusión. Estas herramientas resultan muy útiles para muchas situaciones, pero en ciertos casos se vuelven poco prácticas o demasiado complicadas.

Imagina, por ejemplo, que quieres saber de cuántas maneras distintas se pueden ordenar a cinco personas en una fila para tomarse una fotografía. Aplicar el principio multiplicativo implicaría multiplicar 5 opciones para la primera posición, 4 para la

segunda, 3 para la tercera, y así sucesivamente. Aunque se puede resolver, el procedimiento no es tan directo si generalizamos el problema a 20 o 100 personas.

Otro caso aparece cuando se desea formar un comité de tres estudiantes elegidos entre diez compañeros. Aquí el orden de selección no importa: elegir a Ana, Beatriz y Carlos es lo mismo que elegir a Carlos, Beatriz y Ana. El principio multiplicativo no diferencia estas repeticiones, y habría que hacer ajustes adicionales que complican los cálculos.

Para resolver este tipo de situaciones de manera sistemática y eficiente, introducimos dos conceptos: permutaciones, que se enfocan en el ordenamiento de elementos, y combinaciones, que se centran en la selección de subconjuntos sin importar el orden. Estos nos permitirán ampliar el alcance de nuestras herramientas de conteo y enfrentar problemas más complejos de forma ordenada y general.

Para una introducción práctica de estos temas, puedes revisar este enlace:

- **Título del enlace:** Combinations and Permutations
- **Descripción del enlace:** Introducción guiada a los conceptos de combinaciones y permutaciones.
- **Enlace:** https://discrete.openmathbooks.org/dmoi4/sec_counting-combperm.html

11.1. Permutaciones

Una **permutación** de un conjunto de objetos es un ordenamiento de dichos objetos en un renglón. Por ejemplo, el conjunto de elementos $\{a, b, c\}$ tiene seis permutaciones distintas:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Cada una de estas secuencias representa un orden diferente de los mismos tres elementos. Como se puede observar, cuando el orden importa, el número de formas de organizar los elementos crece rápidamente.

Desde un punto de vista más formal, dado un conjunto A , una *permutación* de los elementos de A es una función biyectiva $f: A \rightarrow A$, es decir, una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto consigo mismo, que reordena sus elementos.

Si el conjunto A es finito y tiene n elementos, entonces el número total de permutaciones posibles es:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Este resultado se deduce directamente del principio multiplicativo: hay n opciones para el primer lugar, $n - 1$ para el segundo, y así sucesivamente hasta el último.

Ejemplo 1. *¿Cuántas formas diferentes hay de ordenar las letras de la palabra PUCE?*

Solución:

La palabra tiene 4 letras distintas, por lo que el número total de permutaciones es:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Ejemplo 2. *¿Cuántas formas diferentes hay de sentar a 8 personas en una fila?*

Solución:

Como el orden importa, se trata de una permutación de 8 elementos:

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320,$$

es decir, existen 40320 formas distintas.

Ejemplo 3. *¿Cuántas formas diferentes hay de sentar a 8 personas en una mesa redonda?*

Solución:

A diferencia del caso anterior —donde analizamos cómo ubicar a ocho personas en una fila—, en esta situación no hay extremos ni una posición inicial fija que distinga a un lugar del resto. Lo que importa es cómo están posicionadas unas personas respecto a otras, no el punto de inicio del conteo.

Cuando las permutaciones son circulares, cualquier rotación del mismo arreglo lineal se considera equivalente. Para contar únicamente las disposiciones distintas, se puede fijar a una de las personas en una posición cualquiera, y permutar a las demás alrededor de ella.

Como ya no se tienen en cuenta las rotaciones, el número de maneras distintas de sentar a las ocho personas es:

$$(8 - 1)! = 7! = 5040 \text{ formas.}$$

En este ejemplo, hemos usado todos los elementos del conjunto para hacer las permutaciones, ahora, ¿qué pasa si no usamos todos los elementos sino solo unos cuantos? Esta es una versión más general: las ***r*-permutaciones**.

Una *r*-permutación (o variación) de un conjunto de *n* elementos es una selección ordenada de *r* elementos tomados del conjunto. Formalmente, se trata de una función biyectiva definida sobre un subconjunto $B \subseteq A$, con $|B| = r$.

El número de *r*-permutaciones de un conjunto de *n* elementos se denota por $P(n, r)$ y se calcula como:

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$$

o equivalentemente

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

Ejemplo 4. *¿Cuántas formas hay de seleccionar y ordenar 2 letras de la palabra PUCE?*

Solución:

Aquí $n = 4$ (hay 4 letras distintas), y queremos todas las 2-permutaciones:

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4 - 2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 24.$$

Muchas calculadoras científicas permiten calcular $P(n, r)$ directamente, simplemente ingresando los valores de *n* y *r*, y seleccionando la función adecuada desde el menú o utilizando una tecla específica.

Dependiendo del modelo, es posible que encuentres notaciones alternativas para las *r*-permutaciones como:

$$P_{n,r}, \quad P_n^r, \quad nPr.$$

Te recomendamos consultar el manual de tu calculadora para identificar la notación exacta y la secuencia de pasos correspondiente.

Revisemos algunos ejemplos adicionales tomados de Johnsonbaugh (2018).

Ejemplo 5. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra *ALGORITHM*?

Solución:

La palabra tiene 9 letras distintas, así que:

$$9! = 362880 \text{ formas distintas.}$$

En algunos problemas, ciertas letras o elementos deben mantenerse juntas como una unidad. En esos casos, se puede considerar esa unidad como un solo «bloque» y aplicar permutaciones al conjunto modificado.

Ejemplo 6. ¿Cuántas formas hay de ordenar las letras de *ALGORITHM* si las letras *A* y *L* deben permanecer juntas (en ese orden)?

Solución:

Consideramos «*AL*» como una sola unidad. Entonces estamos permutando 8 bloques: *AL*, *G*, *O*, *R*, *I*, *T*, *H*, *M*: $8! = 40320$ formas distintas.

11.2. Combinaciones

Supongamos que tenemos un conjunto S con n elementos, y deseamos formar subconjuntos de tamaño r sin importar el orden. ¿Cuántos subconjuntos distintos se pueden formar?

A cada uno de estos subconjuntos se lo llama una **r -combinación** del conjunto S . Es decir, una r -combinación es una selección de r elementos de S , sin tomar en cuenta el orden de los elementos. A diferencia de las permutaciones, aquí los arreglos como ab y ba se consideran el mismo subconjunto.

El número total de r -combinaciones de un conjunto de n elementos se denota por $C(n, r)$, y también se conoce como el *coeficiente binomial*, que se escribe como:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r! (n - r)!}.$$

En varios textos, se encuentra también esta notación para el coeficiente binomial: $\binom{n}{r}$.

Al igual que para la permutaciones, muchas calculadoras científicas permiten calcular esto directamente, dependiendo del modelo, es posible que encuentres notaciones alternativas para las r -combinaciones como:

$$C_{n,r}, \quad C_n^r, \quad nCr.$$

Ejemplo 7. ¿Cuántas formas hay de seleccionar 2 letras de la palabra PUCE si el orden no importa?

Solución:

En este caso se trata de una combinación de 2 elementos de un total de 4.

$$C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6.$$

Los subconjuntos son: PU, PC, PE, UC, UE, CE.

Ejemplo 8. ¿Cuántas formas distintas hay de formar un comité de 3 personas a partir de un grupo de 5?

Solución:

El orden en el comité no importa, así que usamos combinaciones:

$$C(5,3) = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Ejemplo 9. Suponga que en un grupo de 12 personas, hay dos que insisten en trabajar juntas o no participar. ¿Cuántos equipos de 5 personas se pueden formar bajo esa condición?

Solución:

Tenemos dos casos:

- Caso 1: el equipo incluye a los dos inseparables. Entonces debemos elegir 3 personas más de los 10 restantes: $C(10,3) = 120$.
- Caso 2: el equipo no incluye a ninguno de los dos. Entonces elegimos las 5 personas entre las 10 restantes: $C(10,5) = 252$.

Sumando ambos casos: $120 + 252 = 372$ equipos posibles.

Ejemplo 10. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen exactamente tres 1?

Solución:

Imaginemos las 8 posiciones vacías donde deben colocarse los bits. Queremos que exactamente 3 de esas posiciones contengan un 1, y las otras 5 contengan un 0.

El problema se reduce a elegir en qué 3 de las 8 posiciones colocaremos los 1. Una vez elegidas esas posiciones, las restantes se completan automáticamente con 0. Por lo tanto, el número total de cadenas con exactamente tres 1 es igual al número de subconjuntos de 3 posiciones elegidas entre 8 posibles:

$$C(8,3) = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$

Entonces, existen 56 cadenas de 8 bits que contienen exactamente tres 1.

Ejemplo 11. Consideremos el juego tradicional ecuatoriano: el 40, en el que se utiliza una baraja sin las cartas del 8 al 10, es decir, una baraja de 40 cartas. Se reparten 5 cartas a un jugador. Analicemos algunas situaciones:

- ¿Cuántas manos distintas de 5 cartas se pueden repartir?

Figura 1. Ejemplo de una mano en el 40



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Solución: Se trata de seleccionar 5 cartas sin importar el orden, de un conjunto de 40: $C(40,5) = \frac{40!}{5! \cdot 35!} = 658008$ manos posibles.

- ¿En cuántas manos aparece una «ronda» (es decir, un trío)?

Figura 2. Ejemplo de una ronda en el 40



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Solución: Una ronda ocurre cuando se tienen tres cartas del mismo número (por ejemplo, tres K) y las otras dos cartas tienen denominaciones distintas del trío.

El número total de tríos se puede calcular en cuatro pasos:

- Elegimos la denominación del trío: hay 10 denominaciones (1 al 7 y J, Q, K): $C(10,1)$.
- De esa denominación, elegimos 3 cartas entre las 4 posibles: $C(4,3)$.
- De las cartas de las 9 denominaciones restantes (36 cartas), elegimos 2 diferentes para completar la mano: $C(36,2)$.

Entonces, el total de manos con una ronda es: $C(10,1) \cdot C(4,3) \cdot C(36,2) = 10 \cdot 4 \cdot 630 = 25200$.

- ¿En cuántas manos hay una doble ronda que gana el juego automáticamente (es decir, cuatro cartas del mismo número)?

Figura 3

Ejemplo de una doble ronda en el 40



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Solución: Para contar las manos con exactamente un cuarteto y una carta adicional:

- Elegimos la denominación del cuarteto: $C(10,1)$.
- Elegimos 4 cartas de esa denominación: $C(4,4)$.
- De las 9 denominaciones restantes, elegimos 1 diferente: $C(9,1)$.
- Para cada una, elegimos 1 carta entre 4: 4.

Entonces, el número total de manos con un cuarteto es: $C(10,1) \cdot C(4,4) \cdot C(9,1) \cdot 4 = 10 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 4 = 360$.

Para profundizar en la diferencia entre situaciones en las que el orden es importante (permutaciones) y aquellas en las que no lo es (combinaciones), puedes revisar el siguiente enlace:

- **Título del enlace:** Cómo saber si importa o no el orden
- **Descripción del enlace:** Explicación práctica para distinguir entre combinaciones y permutaciones en problemas de conteo.
- **Enlace:** <https://youtu.be/cAJTPxZT4zY?si=l27lzreOo4Crjx7o>

11.3. Combinaciones y permutaciones generalizadas

Hasta ahora hemos trabajado con situaciones en las que no se permitía repetir elementos: ni en las permutaciones (donde el orden importa), ni en las combinaciones (donde no importa). Sin embargo, en muchos contextos reales, los elementos pueden

repetirse, y necesitamos adaptar nuestras herramientas de conteo para incluir estas posibilidades.

Por ejemplo, considera la palabra ENCEBOLLADO. Tiene 11 letras, pero algunas se repiten: hay 2 letras E, 2 letras L y 2 letras O. Si queremos contar cuántas «palabras distintas» podemos formar reordenando sus letras, no podemos simplemente usar $11!$, porque estaríamos contando como diferentes arreglos que en realidad son idénticos por las repeticiones.

Para estos casos, usamos la siguiente fórmula: Dada una colección con n objetos de m tipos distintos, donde hay n_i objetos idénticos de cada tipo i , el número de ordenamientos de la colección es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

En el caso de ENCEBOLLADO, tenemos 8 «tipos» de letras distintas:

- dos letras E,
- una letra N,
- una letra C,
- una letra B,
- dos letras O,
- dos letras L,
- una letra A,
- una letra D,

así, el número de palabras que se pueden formar es

$$\frac{11!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{39916800}{8} = 4989600.$$

Otro tipo de problema común es cuando queremos hacer selecciones *sin importar el orden*, pero permitiendo repetir elementos. Supongamos que tenemos 5 tipos de helado, y queremos elegir una copa con 3 bolas, pudiendo repetir sabores.

En estos casos, usamos la siguiente fórmula: Dado un conjunto con n elementos, el número de selecciones no ordenadas de r elementos, con repeticiones, es

$$C(n + r - 1, r).$$

Así, en el ejemplo anterior, el número total de combinaciones posibles es:

$$C(n + r - 1, r) = C(5 + 3 - 1, 3) = C(7, 3) = 35,$$

donde n es el número de tipos de elementos (sabores) y r el número de elementos que se seleccionan (bolas de helado).

También se pueden presentar problemas donde se desea distribuir elementos en grupos, como repartir caramelos entre niños, o asignar tareas entre empleados. Si queremos distribuir n elementos en k grupos (permitiendo que algunos grupos queden vacíos), sin importar el orden de los elementos ni de los grupos, usamos:

$$C(n + k - 1, k - 1).$$

Ejemplo 12. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$?

Solución:

Este tipo de problema equivale a distribuir 10 unidades entre 4 variables (o cajas), permitiendo que alguna tenga cero. El número de soluciones se obtiene con:

$$C(10 + 4 - 1, 4 - 1) = C(13, 3) = 286.$$

A continuación se presenta una tabla resumen que compara las fórmulas para conteo en situaciones con o sin repetición, tanto en selecciones ordenadas (permutaciones) como no ordenadas (combinaciones):

Tabla 1. Resumen de conteo con y sin repetición

	Sin repetición	Con repetición
Selecciones ordenadas	$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$	$\frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}$
Selecciones no ordenadas	$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n - r)!}$	$C(n + r - 1, r)$

Nota: adaptada de Johnsonbaugh (2018)

Para realizar cálculos de permutaciones y combinaciones generalizadas en Python, podemos utilizar tanto la librería estándar `math` como funciones especiales del paquete `scipy` (White and Ray 2021). A continuación, se muestra un ejemplo que calcula el número de permutaciones y combinaciones al seleccionar 4 elementos de un conjunto de 20:

Código 1

Cálculo de permutaciones y combinaciones en Python

```
import math

# Cálculo de permutaciones P(20,4)
perm = math.factorial(20) / math.factorial(20 - 4)
print("Permutaciones:", perm)

# Cálculo de combinaciones C(20,4) usando scipy
from scipy.special import binom
comb = binom(20, 4)
print("Combinaciones:", comb)
```

Nota: adaptado de White and Ray (2021).

Este código permite verificar fácilmente los resultados de los ejemplos vistos en clase y explorar nuevas situaciones modificando los valores de entrada.

Referencias

Johnsonbaugh, R. (2018). Discrete Mathematics (8.a ed.). Pearson Educación.

White, R. y Ray, A. (2021). Practical Discrete Mathematics. Packt Publishing.

Términos

- **Permutación:** ordenamiento de un conjunto de elementos, donde el orden sí importa.
- **Combinación:** selección de elementos de un conjunto, donde el orden no importa.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Generación de Combinaciones y Permutaciones
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una guía de Python para generar combinaciones y permutaciones.
- **Enlace:** <https://colab.research.google.com/github/andres-merino/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/blob/main/pages/clases/clase11/FuncionesCombinacionesPermutaciones.ipynb>

Recurso 2

- **Título del recurso:** Ejercicios resueltos de Combinaciones y Permutaciones
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una serie de ejercicios resueltos, con su explicación paso a paso, sobre Combinaciones y Permutaciones.
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase11/EjerciciosResueltosClase11.pdf>



La excelencia no se improvisa

síguenos

