

Matemáticas Discretas

Concepto de grafos

Clase 14



Introducción de la clase

En el mundo real existen muchas situaciones en las que necesitamos representar relaciones entre distintos elementos: una red de computadoras, las calles de una ciudad, las conexiones de una red eléctrica o incluso los vínculos de amistad entre personas. Todas estas situaciones tienen en común que involucran puntos que se relacionan a través de conexiones. La teoría de grafos surge justamente para dar una herramienta matemática que nos permita modelar y analizar este tipo de escenarios de manera formal y precisa.

En esta clase conocerás qué son los grafos y cómo se construyen a partir de conceptos básicos como vértices y aristas. También revisaremos la terminología clave, los diferentes tipos de grafos que existen y algunas de sus aplicaciones más comunes en la vida cotidiana y en el ámbito de la informática y la ciberseguridad. El objetivo es que puedas identificar estas estructuras, comprender cómo se clasifican y empezar a ver su utilidad como herramienta para resolver problemas complejos de una forma más estructurada.

Clase 14: Concepto de grafos

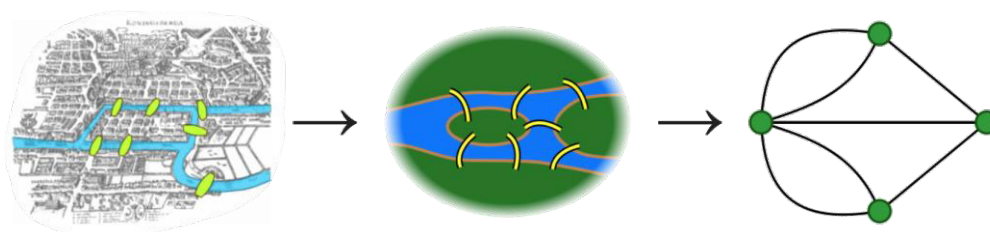
RDA 3: Aplicar los principios y métodos de la Matemática Discreta en una variedad de situaciones, en contextos tanto teóricos como prácticos.

14. Concepto de grafos

La teoría de grafos es un área relativamente reciente dentro de las matemáticas, aunque sus orígenes se remontan a 1735, cuando el matemático Leonhard Euler planteó y resolvió el célebre problema de los *siete puentes de Königsberg* (Levin 2022). Desde entonces, esta teoría ha crecido hasta convertirse en una herramienta clave en la ciencia moderna, con aplicaciones que abarcan desde la informática y la biología hasta la ingeniería y la seguridad de redes. A pesar de su juventud como disciplina formal, la teoría de grafos combina una belleza sencilla con una sorprendente profundidad: muchos de sus conceptos básicos pueden entenderse con pocos conocimientos matemáticos, pero continúa siendo un campo de investigación activa que genera miles de trabajos científicos cada año.

El problema de los puentes de Königsberg marca el inicio de esta disciplina. La pregunta era aparentemente sencilla: ¿es posible recorrer todos los puentes de la ciudad cruzando cada uno una sola vez, sin levantar el lápiz del papel? La genialidad de Euler fue abstraer este problema en términos de regiones y conexiones, sentando así las bases de lo que hoy conocemos como grafos. La siguiente figura muestra esta evolución: a la izquierda, el mapa original de la ciudad con sus puentes; en el centro, una primera abstracción en regiones conectadas; y a la derecha, la representación como un grafo. Esta manera de pensar, transformando problemas reales en estructuras matemáticas, es la esencia de la teoría de grafos.

Figura 1. El problema de los siete puentes de Königsberg y su representación como grafo



Nota: adaptado de Problema de los puentes de Königsberg (n.d.).

Con el tiempo, se descubrió que este enfoque no solo servía para resolver un problema de puentes, sino que permitía abordar preguntas muy variadas: desde determinar si se puede dibujar una figura sin levantar el lápiz, hasta analizar la complejidad de resolver un cubo de Rubik. Más adelante exploraremos varias de estas aplicaciones, que muestran la versatilidad y potencia de los grafos como herramienta matemática y computacional.

Para tener un primer vistazo intuitivo a este tipo de problemas, revisa el siguiente video:

- **Título del enlace:** ¿Puedes Dibujar la Casa Sin Levantar el Lápiz? ¿Qué dicen las Matemáticas?
- **Descripción del enlace:** Una explicación sencilla y visual de cómo los grafos ayudan a entender problemas.

Enlace: https://youtu.be/J_nEkrOG4g?si=5wr-wDHEd1t5tUr

14.1. Terminología

Antes de abordar aplicaciones más complejas, es necesario dominar la terminología básica de los grafos. Estos conceptos son esenciales para modelar y analizar estructuras en diversas áreas del conocimiento, incluida la informática.

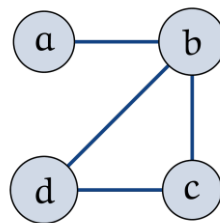
DEFINICIÓN 1: Grafo

Sean V un conjunto finito y A un subconjunto de pares no ordenados de elementos de V . Se dice que $G = (V, A)$ es un **grafo**. Al conjunto V se lo denomina *vértices* (o nodos) y al conjunto A , *aristas*. Para cada arista $e = \{u, v\} \in A$, se dice que e une los vértices u y v .

De manera intuitiva, un grafo está compuesto por puntos (vértices) y líneas que los conectan (aristas). Esta estructura permite representar visualmente relaciones entre objetos.

Ejemplo 1. Consideremos una red local de computadoras en una oficina. Sea $V = \{a, b, c, d\}$ el conjunto de computadoras, y $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ las conexiones físicas entre ellas. El grafo resultante modela la red de conectividad.

Figura 2. Ejemplo de grafo



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

En este grafo, por ejemplo, la arista $\{a, b\}$ indica que las computadoras a y b están directamente conectadas. Afirmamos entonces que a y b son **adyacentes**. En general, dos vértices son adyacentes si existe una arista que los conecta.

Un caso particular se da cuando una arista conecta un vértice consigo mismo; esto se denomina un **lazo**. Si un grafo no contiene lazos ni aristas repetidas, se lo llama **grafo simple**. En nuestro ejemplo, no existen lazos ni repeticiones, por lo que se trata de un grafo simple.

DEFINICIÓN 2: Grado de un vértice.

Sea $G = (V, A)$ un grafo. Para cada vértice $u \in V$, el **grado** de u , denotado $\text{grad}(u)$, es el número de aristas en A que contienen a u como uno de sus extremos. Si u está conectado consigo mismo mediante un lazo, este cuenta como dos.

Aplicando esta definición al ejemplo anterior:

$$\text{grad}(a) = 1, \quad \text{grad}(b) = 3, \quad \text{grad}(c) = 2, \quad \text{grad}(d) = 2.$$

Este concepto conduce a un resultado clásico en teoría de grafos:

TEOREMA 1: Teorema del apretón de manos.

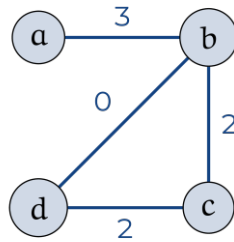
Sea $G = (V, A)$ un grafo. Entonces se cumple:

$$\sum_{u \in V} \text{grad}(u) = 2|A|.$$

Este teorema se puede interpretar así: si en una reunión se cuentan todos los apretones de manos que realiza cada persona, la suma total siempre será el doble del número de apretones realizados.

En muchos contextos, los vértices o las aristas pueden tener información adicional, como etiquetas, nombres o valores numéricos. A estos se los denomina **grafos etiquetados**, y se utilizan para representar estructuras como redes de comunicación, topologías de sistemas o relaciones con peso (por ejemplo, el ancho de banda entre nodos).

Figura 3. Ejemplo de grafo etiquetado



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

14.1.1. Grafos dirigidos

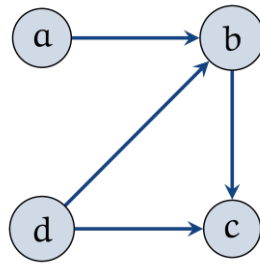
En ciertas aplicaciones, no solo importa que exista una conexión entre dos elementos, sino también la dirección de dicha conexión. Por ejemplo, en una red de servidores donde los datos fluyen de un nodo a otro, es fundamental conocer el sentido del envío.

DEFINICIÓN 3: Grafo dirigido.

Sean V un conjunto finito y A un subconjunto de pares *ordenados* de elementos de V . Se dice que $G = (V, A)$ es un **grafo dirigido** o **dígrafo**. Al conjunto V se lo denomina *vértices* (o nodos) y al conjunto A , *arcos*. Cada arco $(u, v) \in A$ indica una conexión que inicia en u y finaliza en v .

Ejemplo 2. Sea $V = \{a, b, c, d\}$ un conjunto de servidores y $A = \{(a, b), (b, c), (d, b), (d, c)\}$ los canales de comunicación unidireccional entre ellos. El grafo dirigido resultante representa cómo fluye la información entre los servidores.

FIGURA 4. ejemplo de grafo dirigido



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

En este contexto, si $(u, v) \in A$, decimos que v es un **sucesor** de u y que existe un flujo dirigido desde u hacia v .

DEFINICIÓN 4: Grados en un grafo dirigido.

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. Para cada $u \in V$:

- El **grado de salida**, denotado (u) , es el número de arcos que parten desde u .
- El **grado de entrada**, denotado (u) , es el número de arcos que llegan a u .

Un vértice con grado de salida cero se llama **sumidero**, pues no transmite información. Por el contrario, un vértice con grado de entrada cero se llama **fuentes**, ya que únicamente envía datos.

Finalmente, se verifica la siguiente propiedad:

$$|A| = \sum_{u \in V} (u) = \sum_{u \in V} (u).$$

Esto implica que el número total de arcos es igual tanto a la suma de los grados de salida como a la suma de los grados de entrada.

Muchos sistemas que usamos en la vida diaria pueden representarse mediante grafos. Por ejemplo, la telefonía, la energía eléctrica, las tuberías de gas o incluso los sistemas de transporte aéreo pueden modelarse como grafos. De manera similar, las redes de computadoras, desde una pequeña red de área local hasta el sistema mundial de Internet que conecta millones de dispositivos, pueden describirse como grafos.

En todos estos casos, los **vértices** representan los puntos principales del sistema: estaciones de telefonía, generadores eléctricos, depósitos de gas, aeropuertos o servidores de Internet. Las **aristas** representan las conexiones entre ellos: cables telefónicos, tendidos eléctricos, tuberías de distribución, rutas aéreas o enlaces de red. El **grado de un vértice**

indicaría cuántas conexiones tiene cada estación o nodo, y la **adyacencia** señala qué elementos están directamente conectados entre sí.

En el diseño de este tipo de sistemas suelen aparecer preguntas clave: ¿qué aristas se deben elegir para minimizar los costos?, ¿cómo garantizar que todos los vértices estén conectados?, ¿cuál es la mejor ruta para optimizar un servicio?

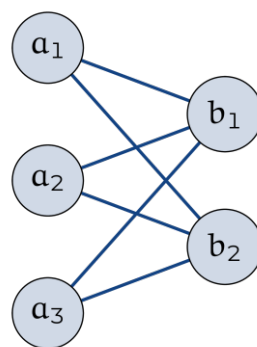
14.2. Tipos de grafos

Una vez comprendida la definición general de grafo, es importante reconocer que existen diferentes tipos de grafos que se adaptan a necesidades y problemas específicos. Cada uno de ellos tiene propiedades particulares y se emplea en distintas aplicaciones, desde la organización de redes hasta la resolución de problemas lógicos o de optimización.

Un primer caso es el de los **grafos simples**, que ya mencionamos previamente. Estos son grafos que no tienen lazos ni aristas paralelas, es decir, no se permite que un vértice se conecte consigo mismo ni que existan varias aristas que unan al mismo par de vértices.

Otro tipo de grafo importante son los **grafos bipartitos**. En este caso, los vértices se dividen en dos conjuntos disjuntos, de manera que todas las aristas conectan un vértice de un conjunto con un vértice del otro. Nunca hay aristas entre vértices del mismo conjunto. Una aplicación clásica de los grafos bipartitos es la asignación de tareas: un conjunto representa a los trabajadores y el otro conjunto a las tareas, y las aristas muestran qué trabajador puede realizar cada tarea.

Figura 5. Ejemplo de un grafo bipartito con dos conjuntos de vértices

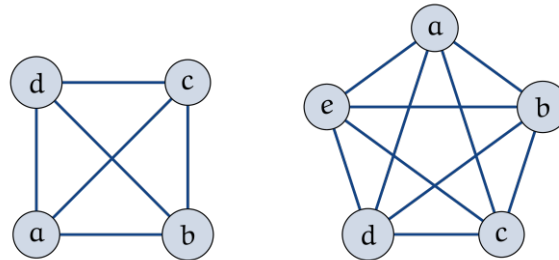


Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

También encontramos los **grafos completos**, que se denotan por K_n . Un grafo completo con n vértices es un grafo simple en el que cada par de vértices distintos está conectado por una arista. Esto significa que no falta ninguna conexión posible. Por ejemplo, el

grafo K_4 tiene cuatro vértices y seis aristas, y puede usarse para modelar una red en la que todos los elementos se comunican directamente entre sí.

Figura 6. El grafo completo K_4 y K_5



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

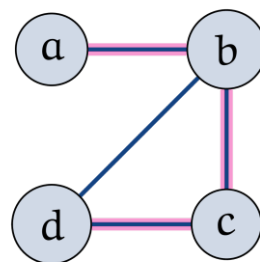
Podemos calcular fácilmente cuántas aristas tiene un grafo completo K_n . Como cada arista conecta a dos vértices distintos, basta contar cuántas formas hay de elegir un par de vértices entre los n disponibles. Esto corresponde a la combinación $C(n, 2)$, es decir,

$$|A| = C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Por ejemplo, K_5 tiene $C(5, 2) = 10$ aristas, y K_{10} tiene $C(10, 2) = 45$ aristas.

Otro concepto importante es el de **camino**, que corresponde a una sucesión de vértices en la que cada vértice consecutivo está conectado por una arista. Por ejemplo, en un grafo que representa una ciudad, un camino puede ser la ruta que conecta a distintos barrios pasando por calles consecutivas. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un camino entre los vértices a y d pasando por b y c .

Figura 7. Ejemplo de un camino en un grafo

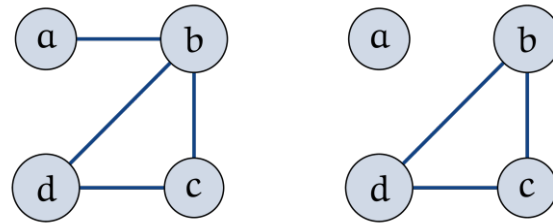


Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Finalmente, un grafo se dice **conexo** si para cualquier par de vértices existe un camino que los une. En otras palabras, es posible desplazarse de un vértice a cualquier otro siguiendo una secuencia de aristas. Si un grafo no es conexo, se descompone en **componentes conexas**, que son los subgrafos en los que sí existe conexión entre todos sus vértices. Este concepto es

clave, por ejemplo, en el análisis de redes de comunicación, donde queremos asegurarnos de que todos los nodos puedan intercambiar información entre sí.

Figura 8. Ejemplo de un grafo conexo y un grafo no conexo



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Para profundizar en estos conceptos y poner a prueba si han quedado claros, puedes revisar el siguiente enlace:

- **Título del enlace:** Graph Theory: Problems and Definitions
- **Descripción del enlace:** Material introductorio con definiciones y ejercicios para reforzar el aprendizaje de la teoría de grafos.
- **Enlace:** https://discrete.openmathbooks.org/dmoi4/sec_gt-intro.html

Un último concepto que veremos en esta clase, es la **distancia entre dos vértices**. La distancia entre u y v en un grafo conexo G se define como el número mínimo de aristas que se deben recorrer para ir desde u hasta v siguiendo un camino dentro del grafo.

Ejemplo 3. Consideremos el grafo conexo de la figura anterior, con vértices a, b, c, d . En este caso:

$$d(a, b) = 1, \quad d(a, c) = 2, \quad d(a, d) = 2, \quad d(c, d) = 1.$$

Por ejemplo, la distancia entre a y d es 2, pues el camino más corto es $a \rightarrow b \rightarrow d$.

14.3. Ejemplos de aplicaciones

La teoría de grafos no solo es una construcción matemática abstracta, sino que encuentra aplicaciones en numerosos contextos reales. A continuación presentamos algunos ejemplos ilustrativos.

Un caso famoso dentro de la matemática es el llamado **número de Erdős**. Paul Erdős fue un prolífico matemático húngaro que escribió más de 1,500 artículos en colaboración con

cientos de colegas. Se define que Erdős tiene número 0, sus colaboradores directos tienen número 1, los colaboradores de estos (que no trabajaron directamente con Erdős) tienen número 2, y así sucesivamente. Este concepto se modela mediante un grafo en el que los vértices son investigadores y las aristas representan trabajos conjuntos. De esta manera, el número de Erdős es simplemente la distancia en este grafo de colaboración hasta el vértice que representa a Erdős.

Otro ejemplo aparece en ecología: las **redes planta–polinizador**. Estas redes pueden representarse como grafos bipartitos, donde un conjunto de vértices corresponde a las plantas y el otro a los polinizadores (como abejas o aves). Una arista conecta a una planta con un polinizador si existe una interacción entre ellos. Este tipo de grafos permite analizar la estabilidad de los ecosistemas y entender qué especies son clave para mantener el equilibrio de la red.

En el ámbito tecnológico, las **redes de computación** se representan de forma natural mediante grafos. Los vértices corresponden a dispositivos (computadores, servidores, enrutadores) y las aristas a las conexiones físicas o inalámbricas que permiten la transmisión de datos. A través de los grafos se puede analizar la conectividad de la red, optimizar rutas de comunicación y detectar vulnerabilidades en la seguridad.

En las **redes sociales**, cada usuario se representa como un vértice y las conexiones de amistad, seguimiento o interacción corresponden a las aristas. En el caso de amistad, sería un grafo no dirigido y en el caso de seguimiento, sería un grafo no dirigido (¿por qué?). El *grado* de un vértice nos indica cuántos amigos o contactos tiene un usuario, mientras que la *distancia* entre dos vértices refleja cuántos pasos (amistades intermedias) se necesitan para conectar a dos personas. Esto nos lleva a conceptos como los «seis grados de separación», que sugieren que cualquier persona en el mundo puede conectarse con otra a través de una cadena muy corta de conocidos, es decir, que, en el grafo de «conocidos», la distancia entre cualquier par de vértices es menor o iguala a 6.

Otro ejemplo lo constituyen las **redes viales**. Aquí los vértices representan ciudades o intersecciones y las aristas representan carreteras que las conectan. Si además asignamos un peso a cada arista, como la longitud de la carretera o el tiempo estimado de viaje, obtenemos un *grafo ponderado*. Este tipo de grafo permite aplicar algoritmos para encontrar la ruta más corta entre dos ciudades, identificar caminos alternativos en caso de cortes de tráfico o diseñar rutas óptimas de transporte de mercancías.

Finalmente, un ejemplo cotidiano son las **redes de aeropuertos**. En este caso, los vértices son los aeropuertos y las aristas representan los vuelos directos entre ellos. El concepto de *grado* adquiere aquí un significado muy útil: el grado de un aeropuerto corresponde al

número de conexiones directas que ofrece. Aeropuertos con un grado muy alto, como Atlanta o Dubái, funcionan como hubs internacionales que permiten la conexión rápida entre distintas partes del mundo. Analizar estos grafos es clave para optimizar rutas de vuelo, gestionar tráfico aéreo y evaluar la vulnerabilidad frente a interrupciones en aeropuertos estratégicos.

Referencias

Levin. (2022). Discrete Mathematics - an open introduction [Recuperado el 4 de septiembre de 2025]. <https://discrete.openmathbooks.org/dmoi4.html>

Problema de los puentes de Königsberg. (s.f.). En Wikipedia. [Recuperado el 4 de septiembre de 2025]. https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg

Términos

- **Grafo:** Estructura matemática formada por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas que los conectan.
- **Grado de un vértice:** Número de aristas que inciden en un vértice.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Resumen de conceptos de Teoría de Grafos
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta un resumen de los conceptos de Teoría de Grafos, tanto los vistos en esta clase como otros también relevantes.
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase14/ResumenClase14.pdf>



La excelencia no se improvisa

síguenos

