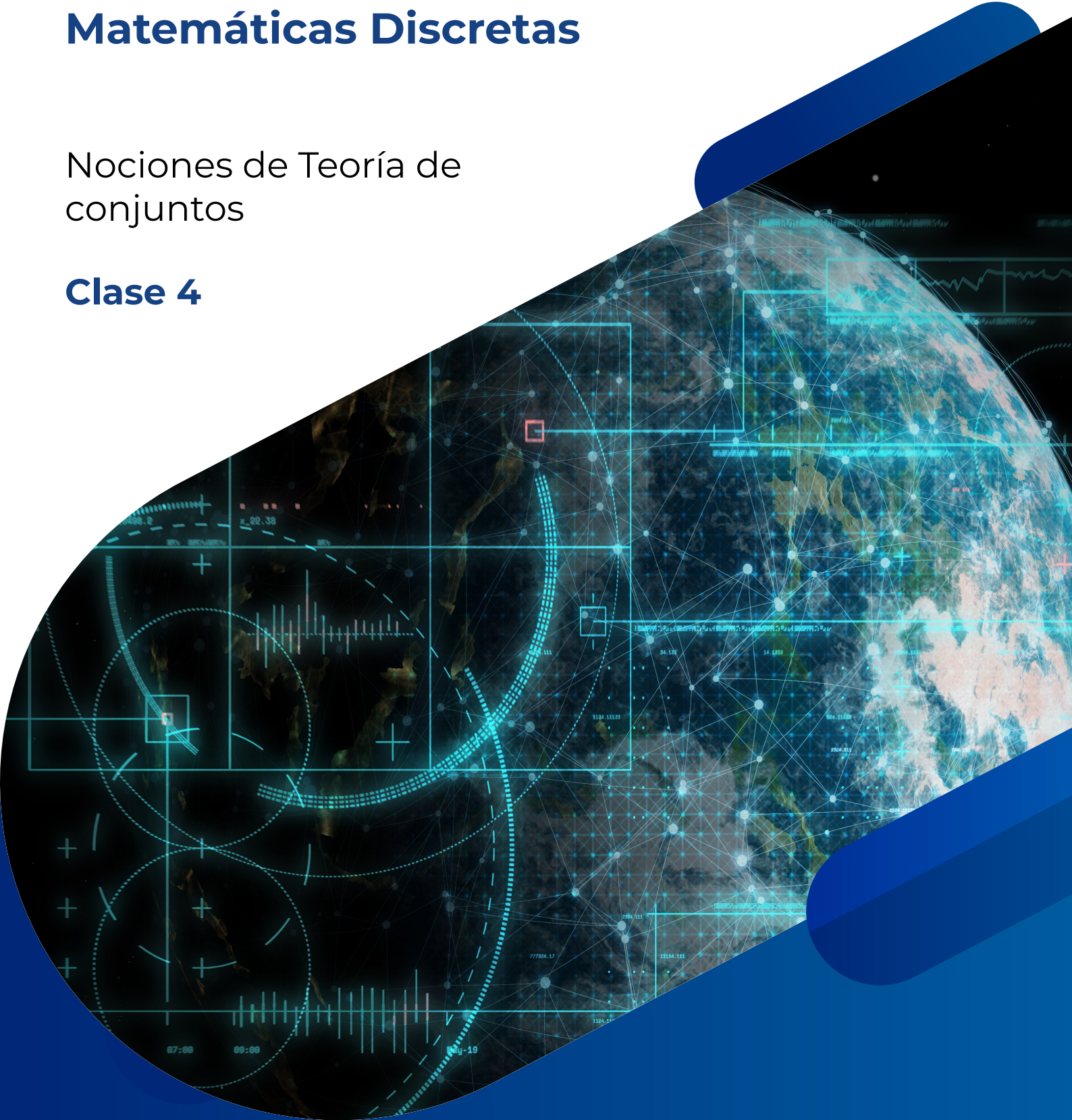


Matemáticas Discretas

Nociones de Teoría de conjuntos

Clase 4



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

¿Alguna vez te has preguntado cómo organizamos la información en matemáticas? En esta clase daremos el primer paso hacia una de las herramientas fundamentales para ello: la teoría de conjuntos. A través de ejemplos cotidianos y notación matemática rigurosa, descubrirás cómo los conjuntos nos permiten representar colecciones de objetos, desde cosas tan simples como letras del alfabeto hasta elementos de un sistema de seguridad. Abordaremos qué significa que un elemento pertenezca o no a un conjunto, cómo se expresan los subconjuntos y qué representa la cardinalidad como medida del tamaño de un conjunto.

Comprender estas ideas te permitirá pensar con precisión sobre estructuras y relaciones. Verás cómo una notación aparentemente sencilla puede ayudarte a razonar de forma rigurosa, clasificar información y sentar las bases para operaciones más complejas, tanto dentro como fuera de las matemáticas.

Clase 4: Nociones de Teoría de conjuntos

RDA 1: Comprender los conceptos fundamentales de la Matemática Discreta, incluyendo lógica matemática, teoría de conjuntos, relaciones, algoritmos y teoría de grafos, destacando su importancia y aplicabilidad en el análisis de problemas discretos

4. Nociones de Teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos constituye uno de los pilares fundamentales de las matemáticas modernas. En su forma más intuitiva, un conjunto puede entenderse como una colección de objetos bien definidos y distinguibles, llamados elementos. Por ejemplo, el conjunto de vocales del alfabeto o el conjunto de direcciones IP que generan alertas en un sistema de monitoreo. Esta idea tan simple resultó ser increíblemente poderosa para unificar distintos campos matemáticos bajo un mismo lenguaje.

El desarrollo riguroso de esta teoría se debe en gran parte al matemático alemán Georg Cantor, quien a finales del siglo XIX introdujo no solo el concepto formal de conjunto, sino también una revolucionaria teoría del infinito (Epp 2020). Cantor fue el primero en distinguir entre diferentes tamaños de infinitos, introduciendo nociones como la

cardinalidad y la correspondencia biyectiva entre conjuntos. Aunque sus ideas fueron inicialmente resistidas por figuras destacadas como Kronecker, con el tiempo demostraron ser esenciales para el desarrollo de la lógica, la topología y la computación.

Sin embargo, esta noción aparentemente simple no estuvo exenta de problemas. A comienzos del siglo XX, el filósofo y matemático Bertrand Russell planteó una paradoja que puso en evidencia una contradicción interna en la teoría ingenua de conjuntos: ¿Qué sucede con el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos? Si dicho conjunto se contiene a sí mismo, entonces no debería contenerse; y si no se contiene, entonces debería contenerse (“Antinomy - Encyclopedia of Mathematics” 2020). Esta paradoja reveló la necesidad de una formalización más cuidadosa, lo que llevó al desarrollo de teorías axiomáticas más robustas como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Para conocer más sobre el origen y evolución de esta rama fascinante, puedes revisar el siguiente artículo:

- **Título del enlace:** Una historia de la Teoría de Conjuntos
- **Descripción del enlace:** Un recorrido accesible por los momentos clave y los personajes que forjaron esta rama fundamental de las matemáticas.
- **Enlace:** <https://bestiariotopologico.blogspot.com/2015/03/una-historia-de-la-teoria-de-conjuntos.html>

4.1. Definición y Notación de Conjuntos

Imagina que necesitas organizar diferentes tipos de ataques cibernéticos, grupos de usuarios con accesos específicos en un sistema, o incluso la lista de estudiantes inscritos en un curso. Para estas tareas, la herramienta fundamental son los **conjuntos**. Un conjunto es simplemente una colección bien definida de objetos distintos. La clave aquí es «bien definida», lo que significa que podemos determinar sin ambigüedad si un objeto pertenece o no a un conjunto.

Para nombrar y referirnos a los conjuntos y sus elementos, utilizamos las siguientes convenciones estándar:

- Usamos letras mayúsculas (como A , B , C , S , U) para nombrar a los conjuntos.

- Los objetos individuales que forman parte de un conjunto se llaman **elementos**. Utilizamos letras minúsculas (como x , y , z , e) para referirnos a ellos.

Para expresar que un elemento pertenece a un conjunto, empleamos el símbolo $\in$:

- Si x es un elemento del conjunto A , escribimos $x \in A$. Esto se lee comúnmente como « x pertenece a A », « x está en A », o « x es un elemento de A ». Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$, entonces $1 \in A$.
- Si un elemento no forma parte de un conjunto, usamos el símbolo $\notin$. Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$, entonces $4 \notin A$.

Tenemos dos maneras principales y complementarias de definir un conjunto, lo que nos permite ser muy precisos:

- **Por Extensión (o por Enumeración):** Esta forma consiste en listar explícitamente todos los elementos del conjunto, separándolos por comas y encerrándolos entre llaves. Es ideal para conjuntos pequeños o cuando todos los elementos son conocidos. Por ejemplo,

$$A = \{1,2,3,4\},$$

en este caso, el conjunto A contiene los números 1, 2, 3 y 4.

- **Por Comprensión (o por Propiedad):** Esta forma define un conjunto especificando una regla o característica que todos sus elementos deben cumplir. Es extremadamente útil para conjuntos grandes o infinitos. La estructura general es

$$\{x \mid \text{condición de } x\} \quad \text{o} \quad \{x:\text{condición de } x\}.$$

El símbolo « $\mid$ » o « $:$ » se lee como «tal que». Por ejemplo,

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x < 5\},$$

aquí, B es el conjunto de todos los números naturales ($\mathbb{N}$) tales que x es menor que 5.

Estas formas nos permiten definir conjuntos de manera unívoca y sin ambigüedades.

Antes de poder operar con conjuntos, es fundamental tener claro cuándo consideramos que dos conjuntos son el mismo. Esta noción es bastante intuitiva: dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden en que se listen ni las posibles repeticiones de elementos dentro de la definición por extensión. La presencia o ausencia de un elemento es lo único que importa.

Definición 1: Igualdad entre conjuntos.

Dados los conjuntos A y B , diremos que A es **igual** a B si se cumple que

$$x \in A \leftrightarrow x \in B$$

para todo conjunto x . Esta relación se denota por $A = B$.

La definición establece que dos conjuntos son iguales si tienen precisamente los mismos elementos. Por ejemplo, $\{1,2\} = \{2,1\}$, ya que ambos conjuntos contienen los mismos elementos (el 1 y el 2), a pesar de que estén escritos en distinto orden. Las repeticiones tampoco afectan la igualdad:

$$\{x \in \mathbb{N}: 0 < x < 5\} = \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4,4\}.$$

Todos estos conjuntos son iguales porque todos representan la misma colección de elementos: el 1, el 2, el 3 y el 4.

La igualdad de conjuntos posee propiedades que la convierten en una *relación de equivalencia*, fundamentales para la lógica y la manipulación de expresiones que involucran conjuntos:

1. *Reflexividad*: Todo conjunto es igual a sí mismo. $A = A$.
2. *Simetría*: Si el conjunto A es igual al conjunto B , entonces el conjunto B es igual al conjunto A . Si $A = B$, entonces $B = A$.
3. *Transitividad*: Si el conjunto A es igual al conjunto B , y el conjunto B es igual al conjunto C , entonces el conjunto A es igual al conjunto C . Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.

4.1.1. Conjuntos especiales

Existen ciertos conjuntos que, por su naturaleza o utilidad, reciben nombres y símbolos específicos.

A veces, necesitamos referirnos a un conjunto que no contiene absolutamente ningún elemento. A este lo llamamos el **conjunto vacío**, y lo representamos con los símbolos $\emptyset$ o simplemente $\{ \}$.

Definición 2: Conjunto Vacío.

Llamamos **conjunto vacío** al único conjunto que no contiene ningún elemento. Se puede definir por comprensión como:

$$\emptyset = \{x: x \neq x\}.$$

La condición $x \neq x$ es una contradicción lógica que nunca puede ser cierta para ningún x , por lo tanto, este conjunto no puede contener elementos. De ello se deduce que, para cualquier objeto x , se cumple que $x \notin \emptyset$. El conjunto vacío es un concepto fundamental en matemáticas.

Un conjunto puede contener un único elemento. Este tipo particular de conjunto es útil en muchas construcciones matemáticas, especialmente cuando necesitamos tratar un elemento individual como una colección.

Definición 3: Conjunto Unitario

Dado un objeto (o conjunto) a , el conjunto que contiene únicamente a a como su elemento es el **conjunto unitario** de a , y se define como:

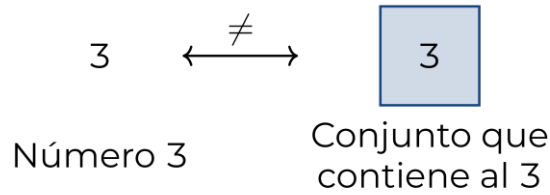
$$\{a\} = \{x: x = a\}.$$

Este conjunto contiene exactamente un elemento, que es el objeto a .

Por ejemplo, $\{3\}$ es un conjunto que contiene el número 3. Es crucial entender que $\{3\}$ es diferente de 3; el primero es un conjunto (una caja que contiene el número 3), mientras que el segundo es solo un número (el contenido de la caja).

Figura 1

Representación de $3 \neq \{3\}$



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

A continuación, se presenta un tipo de conjunto que contiene exactamente dos elementos, sin que importe el orden en que se mencionen. Este es el paso natural después de definir el conjunto unitario.

Definición 4: Par Desordenado.

Dados dos objetos (o conjuntos) a y b , definimos el **par desordenado** como el conjunto que contiene únicamente a a y a b :

$$\{a, b\} = \{x: x = a \vee x = b\}.$$

Este conjunto contiene los elementos a y b , y su nombre «desordenado» implica que el orden no es relevante, por lo tanto, $\{a, b\} = \{b, a\}$. Por ejemplo, el conjunto de colores {rojo, azul} es el mismo que {azul, rojo}.

Ahora, en contraste con el par desordenado, a menudo necesitamos una construcción donde sí importe el orden de los elementos. Esto nos permite representar información estructurada, como coordenadas en un plano cartesiano, entradas y salidas en una función, o relaciones entre objetos. La definición formal de un par ordenado, propuesta por Kuratowski (Pinter 2014), es un poco más compleja para asegurar esta propiedad de orden.

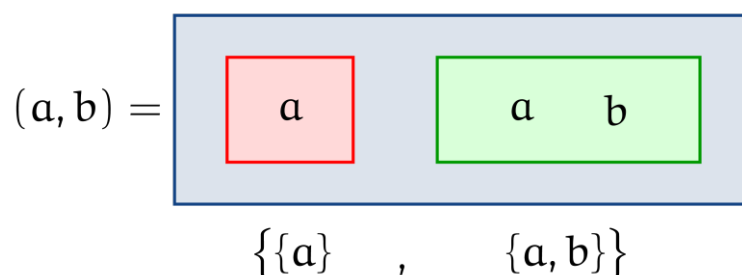
Definición 5: Par Ordenado.

Dados dos objetos (o conjuntos) a y b , definimos el **par ordenado** (a, b) como el conjunto anidado:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

En esta construcción, a se denomina la primera componente y b la segunda componente.

Figura 2. Representación del conjunto (a, b)



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Esta definición, aunque pueda parecer contraintuitiva al principio, asegura matemáticamente que el orden es relevante: si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. Por ejemplo, el par ordenado $(1, 2)$ (que es $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$) es diferente del par ordenado $(2, 1)$ (que es $\{\{2\}, \{2, 1\}\}$). Esta diferencia es crucial en campos como la geometría analítica, donde $(1, 2)$ representa un punto distinto de $(2, 1)$.

La propiedad clave del par ordenado se resume en el siguiente teorema, que valida la intuición de «orden»:

Teorema 1: Caracterización del Par Ordenado.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y solo si sus primeras componentes son iguales y sus segundas componentes son iguales. Formalmente:

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y solo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

Es decir, dos pares ordenados son iguales, si sus primeras componentes son iguales entre sí y sus segundas componentes también. Esta propiedad será fundamental para definir relaciones binarias y funciones de forma rigurosa, ya que nos permite establecer correspondencias unívocas entre elementos.

4.2. Subconjuntos y Partes de un Conjunto

Ahora que sabemos cómo definir conjuntos y sus elementos, es útil establecer relaciones entre ellos, especialmente en términos de contención o de agrupar todos sus posibles subconjuntos.

Un conjunto A es un **subconjunto** de otro conjunto B si todos los elementos de A también son elementos de B . Esto significa que A está «contenido» o «incluido» en B .

Definición 6: Subconjunto.

Dados los conjuntos A y B , diremos que A es **subconjunto de** B si

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

para todo conjunto x . Esta relación se representa por $A \subseteq B$.

Por ejemplo, si $A = \{1,2\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$, entonces $A \subseteq B$, ya que cada elemento de A (el 1 y el 2) también pertenece a B . Otros ejemplos importantes:

- El conjunto de los números pares es un subconjunto del conjunto de los números enteros.
- El conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto A . Es decir, $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A .

Cuando $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ (es decir, B contiene al menos un elemento que no está en A), decimos que A es un **subconjunto propio** de B , y lo denotamos como $A \subset B$. Por ejemplo, $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$.

La relación de subconjunto ($\subseteq$) también posee propiedades fundamentales:

- *Reflexiva:* Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. $A \subseteq A$.
- *Transitiva:* Si A es un subconjunto de B , y B es un subconjunto de C , entonces A es un subconjunto de C . Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
- *Antisimétrica:* Si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de A , entonces A y B deben ser el mismo conjunto. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

Partes de un Conjunto (Conjunto Potencia)

El **conjunto de partes** de un conjunto A , escrito como $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos posibles de A . Esto incluye al conjunto vacío ($\emptyset$) y al propio A como elementos. Cada «elemento» del conjunto de partes es, a su vez, un conjunto.

Definición 7: Partes de un Conjunto.

Dado un conjunto A , el **conjunto de partes de A** , denotado por $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A .

$$\mathcal{P}(A) = \{u: u \subseteq A\}.$$

Consideremos un ejemplo para clarificar: Si $A = \{1,2\}$, entonces los subconjuntos de A son:

- El conjunto vacío: $\emptyset$
- Los subconjuntos unitarios: $\{1\}, \{2\}$
- El propio conjunto A : $\{1,2\}$

Por lo tanto, el conjunto de partes de A es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Observa que cada elemento dentro de $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto.

4.3. Cardinalidad

La **cardinalidad** de un conjunto es una noción fundamental que nos permite cuantificar la «cantidad» de elementos que contiene.

Definición 8: Cardinalidad.

Dado un conjunto finito A , se denotará por $|A|$ a la cantidad de elementos distintos que tiene A .

Por ejemplo:

- Si $A = \{x, y, z\}$, entonces $|A| = 3$.
- Si $B = \{\text{rojo, verde, azul, amarillo}\}$, entonces $|B| = 4$.
- Si $C = \emptyset$, entonces $|C| = 0$ (el conjunto vacío no tiene elementos).
- Si $D = \{5,5,10\}$, entonces $|D| = 2$ (ya que los elementos duplicados no se cuentan; el conjunto es realmente $\{5,10\}$).

Esta noción simple resulta extremadamente útil en combinatoria, análisis de algoritmos y probabilidad, donde necesitamos saber cuántas opciones o resultados posibles existen.

Una propiedad interesante es que el número total de subconjuntos que se pueden formar a partir de un conjunto (es decir, el número de elementos del conjunto de partes de A) está directamente relacionado con la cardinalidad de A .

Teorama 2

Sea A un conjunto finito. La cardinalidad de su conjunto de partes es igual a 2 elevado a la potencia de la cardinalidad de A . Formalmente:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Esto significa que si un conjunto tiene n elementos, entonces existen exactamente 2^n subconjuntos distintos que se pueden formar con esos elementos. Por ejemplo:

- Si $|A| = 0$ (es decir, $A = \emptyset$), entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^0 = 1$. El único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$ en sí mismo. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- Si $|A| = 1$ (ej. $A = \{a\}$), entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^1 = 2$. Los subconjuntos son $\emptyset$ y $\{a\}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
- Si $|A| = 2$ (ej. $A = \{1, 2\}$), entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^2 = 4$. Como vimos antes, $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Esta relación es fundamental y se deriva del hecho de que, para cada elemento de A , tenemos dos opciones al construir un subconjunto: incluirlo o no incluirlo.

Para ver un ejemplo de cómo la cardinalidad se aplica en la resolución de problemas, revisa el siguiente video:

- **Título del enlace:** Solución de problemas con Conjuntos | Ejemplo 1
- **Descripción del enlace:** Se resuelve un problema práctico utilizando la cardinalidad y la teoría de conjuntos como herramienta de análisis.
- **Enlace:** https://youtu.be/cvAIXa5B-hw?si=1Mi_tJa4_D_gIy3z

Referencias

Antinomy - Encyclopedia of Mathematics. 2020.

<https://encyclopediaofmath.org/wiki/Antinomy>.

Epp, Susanna S. 2020. *Discrete Mathematics with Applications*. 5th ed. Boston, MA: Cengage Learning.

Pinter, Charles C. 2014. *A Book of Set Theory*. Courier Corporation.

Términos

- **Subconjunto:** es un conjunto cuyos elementos también pertenecen a otro conjunto.
- **Conjunto de partes:** es el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de un conjunto dado.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Ejercicios de Teoría de Conjuntos
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta ejercicios resueltos sobre Teoría de Conjuntos.
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase04/ejercicios.html>

Recurso 2

- **Título del recurso:** Nociones de Teoría de conjuntos en Python
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una guía de Python para escribir conjuntos y comprobar algunas propiedades sobre conjuntos.
- **Enlace:** <https://github.com/FCENA-PUCE/Python-Notebooks-Educativos/blob/main/Nociones-Teoria-Conjuntos.ipynb>



La excelencia no se improvisa

síguenos

