

Matemáticas Discretas

Concepto de relación

Clase 6



Introducción de la clase

Cuando hablamos de conectar elementos de dos conjuntos, como estudiantes y las materias que cursan, o usuarios y sus contraseñas, estamos construyendo relaciones. Estas conexiones, que parecen cotidianas, son fundamentales para estructurar información en bases de datos, describir redes y modelar sistemas complejos. En esta clase, nos enfocaremos en entender cómo se define formalmente una relación binaria y cómo esta nos permite representar asociaciones entre elementos de distintos conjuntos.

Además, aprenderás a identificar el dominio y el rango de una relación, a construir su inversa, y a representar gráficamente estas relaciones utilizando diagramas de flechas y matrices. Estas herramientas serán esenciales para visualizar de manera clara y ordenada las conexiones entre elementos, facilitando el análisis de estructuras más complejas en temas posteriores.

Clase 6: Concepto de relación

RDA 2: Resolver problemas prácticos y teóricos mediante la aplicación de técnicas y herramientas de la Matemática Discreta, como lógica matemática, análisis de conjuntos y teoría de grafos en el manejo de estructuras discretas.

Concepto de relación

Para describir cómo se conectan los elementos de dos o más conjuntos diferentes, utilizamos la noción fundamental de **producto cartesiano** (Epp 2020).

Definición 1: Producto cartesiano.

Dados dos conjuntos A y B , se define el *producto cartesiano de A y B* como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde x es un elemento de A e y es un elemento de B . Formalmente, se expresa como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

A continuación algunos ejemplos:

- Sea $C = \{\text{Rojo}, \text{Azul}\}$ el conjunto de colores y $T = \{S, M, L\}$ el conjunto de tallas. El producto cartesiano $C \times T$ nos da todas las combinaciones posibles de color y talla:

$$C \times T = \{(\text{Rojo}, S), (\text{Rojo}, M), (\text{Rojo}, L), (\text{Azul}, S), (\text{Azul}, M), (\text{Azul}, L)\}.$$

- Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$. El producto cartesiano $A \times B$ es:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Una propiedad importante del producto cartesiano es que la cardinalidad del producto cartesiano de dos conjuntos es igual al producto de las cardinalidades de los conjuntos individuales. Formalmente:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Utilizando el ejemplo anterior de $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$, tenemos que $|A| = 3$ y $|B| = 3$. Por lo tanto, la cardinalidad de su producto cartesiano es:

$$|A \times B| = 3 \cdot 3 = 9.$$

Esto coincide con el número de pares ordenados que enumeramos, que son efectivamente 9 pares.

El concepto de producto cartesiano puede extenderse a un número arbitrario de conjuntos. Si tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, su producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es el conjunto de todas las n -tuplas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde cada $x_i \in A_i$ (Epp 2020).

Cuando se trata del producto cartesiano de un conjunto consigo mismo n veces, lo denotamos como A^n . Formalmente, $A^n = A \times A \times \dots \times A$ (n veces).

Ejemplo 1 A^2 . Dado un conjunto $A = \{1, 0\}$, A^2 se define como $A \times A$:

$$A^2 = A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Aquí, cada elemento es un par ordenado de elementos de A .

Ejemplo 2 A^3 . Dado el mismo conjunto $A = \{0, 1\}$, A^3 se define como $A \times A \times A$:

$$A^3 = A \times A \times A = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

En este caso, cada elemento es una terna ordenada de elementos de A .

El producto cartesiano genera todas las combinaciones ordenadas posibles entre los elementos de los conjuntos involucrados. Sin embargo, en muchas situaciones, no nos interesan todas estas combinaciones, sino solo algunas conexiones específicas que tienen un significado particular. Para representar estas asociaciones seleccionadas, utilizamos el concepto de **relación**.

Se puede pensar en una relación de un conjunto a otro como una tabla que lista los elementos del primer conjunto que se relacionan con los elementos del segundo conjunto bajo cierta condición. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra qué estudiantes están inscritos en qué carreras universitarias:

Tabla 1. Relación de estudiantes con carreras

Estudiante	Carrera
Guillermo	Ciencias de la Computación
María	Ciencia de Datos
Guillermo	Ciberseguridad
Beatriz	Sistemas
Beatriz	Ciencias de la Computación

Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

En la terminología de las relaciones, decimos que Guillermo está relacionado con Ciencias de la Computación y Ciberseguridad, María está relacionada con Ciencia de Datos, y así sucesivamente. Aunque visualmente se presenta en forma de tabla, una relación no es otra cosa que un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir, un conjunto de pares ordenados donde el primer elemento se asocia con el segundo bajo una condición o criterio específico.

Consideremos los siguientes conjuntos:

- El conjunto de Estudiantes:

$$E = \{\text{Guillermo, María, Beatriz, Juan, David}\}.$$

- El conjunto de Carreras:

$$C = \{ \text{Ciencias de la Computación, Ciencia de Datos, Ciberseguridad, Sistemas} \}.$$

El producto cartesiano $E \times C$ sería el conjunto de todas las combinaciones posibles de estudiantes y carreras. Por ejemplo:

$$E \times C = \{ \begin{array}{l} (\text{Guillermo, Ciencias de la Computación}), \\ (\text{Guillermo, Ciencia de Datos}), \\ \dots, \\ (\text{David, Sistemas}) \end{array} \}.$$

Este conjunto contendría $5 \times 4 = 20$ pares ordenados.

La relación R de «estudiante está inscrito en carrera», basada en la tabla anterior, es un subconjunto específico de $E \times C$:

$$R = \{ \begin{array}{l} (\text{Guillermo, Ciencias de la Computación}), (\text{María, Ciencia de Datos}), \\ (\text{Guillermo, Ciberseguridad}), (\text{Beatriz, Sistemas}), \\ (\text{Beatriz, Ciencias de la Computación}) \end{array} \}.$$

Nótese que $R \subseteq E \times C$, lo que significa que cada par en R es también un par válido en el producto cartesiano completo.

6.1. Definición de relación binaria

Una vez comprendido el producto cartesiano, podemos definir formalmente lo que es una **relación** binaria entre dos conjuntos.

Definición 2: Relación Binaria.

Dados los conjuntos A y B , se dice que R es una *relación de A en B* si R es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Es decir:

$$R \subseteq A \times B.$$

En términos más simples, una relación no es más que una selección específica de pares ordenados del producto cartesiano. Cada elemento de R es un par ordenado (a, b) donde a pertenece a A y b pertenece a B . Estos pares son los que «cumplen» la condición o propiedad que define la relación.

Si R es una relación de A en B y tenemos un par $(a, b) \in R$, decimos que « a está relacionado con b bajo la relación R ». Esto se puede denotar de forma abreviada como aRb .

Cuando la relación es de un conjunto consigo mismo (es decir, $A = B$), decimos que R es una relación en A .

Veamos algunos ejemplos comunes de relaciones binarias para solidificar este concepto:

Ejemplo 3 (Relación de contención ($\subseteq$)). Dado un conjunto S , la relación de inclusión se define sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$ (el conjunto de todos los subconjuntos de S). Relaciona un subconjunto con otro si el primero está contenido en el segundo:

$$R_{\subseteq} = \{(C, D) \in \mathcal{P}(S)^2 : C \subseteq D\}.$$

Por ejemplo, si $S = \{1, 2, 3\}$, entonces $(\{1\}, \{1, 2\})$ está en esta relación, ya que $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$.

Ejemplo 4 (Relación de igualdad (o identidad) (Δ_A)). Para cualquier conjunto A , la relación de identidad relaciona cada elemento consigo mismo y solo consigo mismo:

$$\Delta_A = \{(x, x) \in A^2 : x \in A\}.$$

Si $A = \{\text{manzana}, \text{banana}\}$, entonces

$$\Delta_A = \{(\text{manzana}, \text{manzana}), (\text{banana}, \text{banana})\}.$$

Ejemplo 5 (Relación total (A^2) y relación vacía ($\emptyset$)). Dado un conjunto A , el propio producto cartesiano A^2 es una relación sobre A conocida como la relación total. Esta relación conecta a cada elemento de A con todos los elementos de A . Por otro lado, el conjunto vacío $\emptyset$ también es una relación sobre A ; esta relación no conecta a ningún par de elementos.

El número de relaciones distintas que se pueden establecer entre dos conjuntos finitos se determina a partir de la cardinalidad del conjunto de potencia de su producto cartesiano. Así para A y B conjuntos finitos, el número total de relaciones distintas de A en B es:

$$2^{|A| \cdot |B|}.$$

6.2. Dominio, rango e inversa de una relación

Una vez que hemos entendido qué es una relación, podemos explorar características que nos ayudan a comprender mejor cómo interactúan los elementos entre los conjuntos. Nos referimos al dominio, la imagen (o rango) y la relación inversa.

Definición 3: Dominio de una Relación.

Dada una relación R de un conjunto A a un conjunto B , el *dominio* de R , denotado como $\text{dom}(R)$, es el conjunto de todos los elementos en A que están relacionados con al menos un elemento en B . Formalmente:

$$\text{dom}(R) = \{x \in A : \text{existe } y \in B \text{ tal que } xRy\}.$$

En otras palabras, el **dominio de una relación** es la colección de todos los «primeros elementos» de los pares ordenados que forman la relación.

Ejemplo 6. Consideremos la relación R que asocia estudiantes con las carreras en las que están inscritos, que vimos en secciones anteriores:

$$R = \{ (\text{Guillermo, Ciencias de la Computación}), (\text{María, Ciencia de Datos}), \\ (\text{Guillermo, Ciberseguridad}), (\text{Beatriz, Sistemas}), \\ (\text{Beatriz, Ciencias de la Computación}) \}.$$

Esta relación es entre el conjunto de estudiantes E y el conjunto C el de las carreras.

El dominio de R , $\text{dom}(R)$, es el conjunto de estudiantes que están inscritos en alguna de estas carreras:

$$\text{dom}(R) = \{\text{Guillermo, María, Beatriz}\}.$$

Nótese que estudiantes como Juan, que pertenece a E al no estar inscrito en ninguna carrera, no es parte de ningún par de R , por lo tanto, no está incluido en el dominio.

Definición 4: Imagen o Rango de una Relación.

Dada una relación R de un conjunto A a un conjunto B , la *imagen* (o *rango* o *recorrido*) de R , denotada como $\text{img}(R)$, es el conjunto de todos los elementos en B que son el «segundo componente» de al menos un par ordenado en R . Formalmente:

$$\text{img}(R) = \{y \in B : \text{existe } x \in A \text{ tal que } xRy\}.$$

La **imagen de una relación** es el conjunto de todos los «segundos elementos» de los pares ordenados que constituyen la relación. Son los elementos de llegada que tienen al menos una conexión desde algún elemento del conjunto A .

Ejemplo 7. Retomando el ejemplo anterior, la imagen de R , $\text{img}(R)$, es el conjunto de carreras a las que están inscritos los estudiantes mencionados:

$$\text{img}(R) = \{\text{Ciencias de la Computación, Ciencia de Datos, Sistemas}\}.$$

Si hubiera otras carreras en el conjunto original C que no tuvieran ningún estudiante relacionado, no serían parte de la imagen.

Definición 5: Relación Inversa.

Dados los conjuntos A y B , y una relación R de A en B , la *relación inversa* de R , denotada como R^{-1} , es la relación de B en A que se forma invirtiendo el orden de cada par ordenado en R . Formalmente:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : xRy\}.$$

Esto implica que, para cualquier par $(x, y) \in A \times B$, xRy si y solo si $yR^{-1}x$.

La **relación inversa** es como ver la relación original «al revés». Si la relación R dice que «Guillermo estudia Computación», su inversa R^{-1} dirá que «Computación es estudiada por Guillermo».

Ejemplo 8. Tomemos nuevamente la relación de estudiantes con carreras. La relación inversa R^{-1} será una relación de Carreras a Estudiantes:

$$R^{-1} = \{ (\text{Ciencias de la Computación, Guillermo}), (\text{Ciencia de Datos, María}), \\ (\text{Ciberseguridad, Guillermo}), (\text{Sistemas, Beatriz}), \\ (\text{Ciencias de la Computación, Beatriz}) \}.$$

Ahora, los elementos de las carreras son los primeros componentes de los pares ordenados.

Definición 6: Composición de Relaciones.

Sean R una relación de A en B y S una relación de B en C . La *composición de S con R* , denotada como $S \circ R$, es una relación de A en C definida como:

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C : \text{existe } y \in B \text{ tal que } xRy \text{ y } ySz\}.$$

La **composición de relaciones** es como encadenar dos relaciones. Si x se relaciona con y a través de R , y ese mismo y se relaciona con z a través de S , entonces podemos decir que x se relaciona con z mediante la composición $S \circ R$. Hay un elemento «intermediario» y en el conjunto B que hace posible esta conexión de A a C .

Es importante notar que, aunque algunos textos puedan usar la notación $R \circ S$, en este contexto (y siguiendo la convención matemática para la composición de funciones, de la cual las relaciones son una generalización), adoptaremos la convención de escribir $S \circ R$. Esto significa que la relación que se aplica primero se escribe a la derecha (R), y la que se aplica después se escribe a la izquierda (S).

Ejemplo 9. *La composición de las relaciones*

$$R_1 = \{(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)\} \quad \text{y} \quad R_2 = \{(2,u), (4,v), (6,w), (4,t)\}$$

Es

$$R_2 \circ R_1 = \{(1,u), (1,w), (2,v), (2,t), (3,v), (3,t), (3,w)\}.$$

Por ejemplo, $(1,u) \in R_2 \circ R_1$ porque $(1,2) \in R_1$ y $(2,u) \in R_2$.

Ejemplo 10. *Supongamos los siguientes conjuntos:*

- $A = \{\text{Estudiante}_1, \text{Estudiante}_2\}$
- $B = \{\text{Curso}_A, \text{Curso}_B\}$
- $C = \{\text{Profesor}_X, \text{Profesor}_Y\}$

Definimos dos relaciones:

- R : Relación de «estudiante está inscrito en curso» (de A en B).

$$R = \{(\text{Estudiante}_1, \text{Curso}_A), (\text{Estudiante}_2, \text{Curso}_B)\}.$$

- S : Relación de «curso es impartido por profesor» (de B en C).

$$S = \{(\text{Curso}_A, \text{Profesor}_X), (\text{Curso}_B, \text{Profesor}_Y)\}.$$

La composición $S \circ R$ resulta en una relación de Estudiantes a Profesores:

$$S \circ R = \{(\text{Estudiante}_1, \text{Profesor}_X), (\text{Estudiante}_2, \text{Profesor}_Y)\}.$$

Esto nos indica directamente qué estudiante se relaciona con qué profesor a través de los cursos que ambos comparten.

Para revisar de manera más formal estos conceptos, puedes revisar este enlace:

- **Título del enlace:** Teoría de los Conjuntos I: Relaciones
- **Descripción del enlace:** Formalización de conceptos de relaciones.
- **Enlace:** <https://blog.nekomath.com/teoria-de-los-conjuntos-i-relaciones/>

6.3. Representación gráfica y matricial

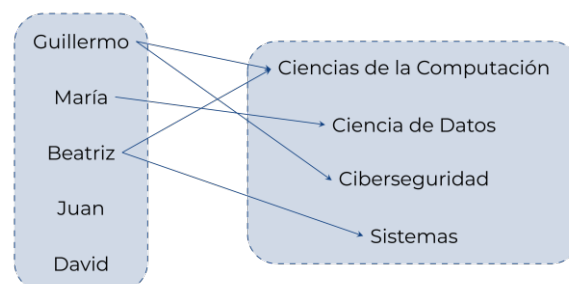
Para comprender y analizar mejor las relaciones, a menudo las visualizamos de diferentes maneras. Las representaciones más comunes son la **sagital**, la **digráfica** y la **matricial**. Cada una tiene sus propias ventajas y es útil en distintos escenarios.

Representación Sagital

La representación sagital es una forma intuitiva de dibujar una relación. Imagina dos columnas de puntos: una para los elementos del conjunto de partida (A) y otra para los elementos del conjunto de llegada (B). Luego, simplemente dibujamos una flecha desde un elemento de A hacia un elemento de B si están relacionados.

Ejemplo 11. Consideremos la relación de estudiantes y carreras de las secciones anterior. Para su representación sagital, dibujarás el conjunto de Estudiantes a la izquierda, y el de las carreras a la derecha. Luego, trazarás una flecha conectando cada elemento de la relación.

Figura 1. Representación sagital de una relación



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

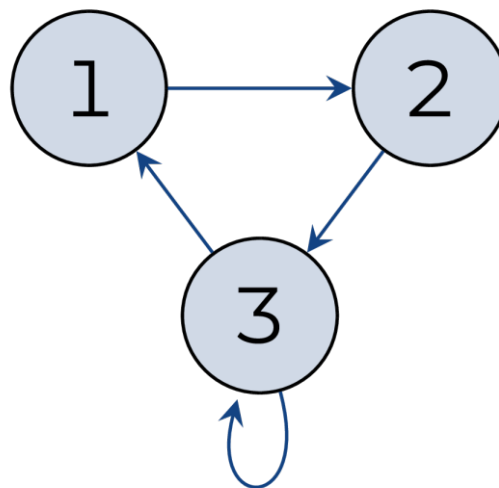
Cuando una relación ocurre dentro del mismo conjunto, la representación digráfica es la herramienta ideal para su representación (Johnsonbaugh 2018). Aquí, cada elemento del conjunto se convierte en un nodo (un círculo o punto). Si un elemento x está relacionado con un elemento y (es decir, xRy), dibujamos una flecha desde el nodo x hasta el nodo y .

Ejemplo 12. Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y la relación

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,3), (3,1)\}.$$

Para dibujar su digráfica, colocaríamos tres nodos etiquetados 1, 2 y 3. Luego, dibujaríamos una flecha desde el nodo 1 al nodo 2, otra desde el 2 al 3, otra desde el 3 al mismo 3 y finalmente una desde el 3 al 1.

Figura 2. Representación digráfica de una relación



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

La representación matricial es una forma más estructurada y computacional de ver una relación, especialmente útil cuando los conjuntos son finitos. Piensa en una tabla donde las filas representan los elementos del primer conjunto (A) y las columnas los elementos del segundo conjunto (B). Llenamos la tabla con ceros y unos.

Definición 7: Representación Matricial de una Relación.

Sea R una relación de A en B , donde A y B son conjuntos finitos. Si enumeramos sus elementos como:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad \text{y} \quad B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

(donde $|A| = m$ y $|B| = n$), entonces la *representación matricial de R* es una matriz $M_R = (m_{ij})$ de tamaño $m \times n$, donde cada entrada m_{ij} se define así:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ está relacionado con } y_j \quad (x_i R y), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Cada 1 en la matriz indica una conexión, mientras que cada 0 indica su ausencia.

Ejemplo 13. Tomemos nuestros conjuntos de estudiantes y carreras y la relación que hemos venido trabajando. Para construir la matriz M_R :

- La primera fila representará a Guillermo, la segunda fila representará a María, y así hasta que la quinta fila representará a David.
- La primera columna representará Ciencias de la Computación, la segunda columna representará Ciencia de Datos, y así hasta que la cuarta columna representará a sistemas.

Dado que Guillermo está relacionado con Ciencias de la Computación, $m_{11} = 1$, es decir, la entrada de la primera fila y primera columna tendrá un 1. Como Guillermo no está relacionado con Sistemas, $m_{12} = 0$, es decir, la entrada de la primera fila y segunda columna tendrá un 0. Así, la matriz M_R sería:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para conocer las aplicaciones que pueden derivarse de la representación matricial de las relaciones, puedes revisar este enlace:

- **Título del enlace:** Representación matricial de relaciones
- **Descripción del enlace:** Revisa las propiedades de la representación matricial de relaciones.

Enlace: <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase06/representacion-matricial.html>

Referencias

Epp, S. S. (2020). *Discrete Mathematics with Applications* (5.a ed.). Cengage Learning.

Johnsonbaugh, R. (2018). *Discrete Mathematics* (8.a ed.). Pearson Educación.

Términos

- **Producto cartesiano:** Dados dos conjuntos A y B , el producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.
- **Relación:** Dado un conjunto A y un conjunto B , una relación R de A en B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Ejercicios resueltos de Conceptos de Relación
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta ejercicios resueltos de Conceptos de Relación
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase06/ejercicios.html>

Recurso 2

- **Título del recurso:** Conceptos de Relación en Python
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una guía de Python sobre los conceptos de relación.
- **Enlace:** <https://colab.research.google.com/github/FCENA-PUCE/Python-Notebooks-Educativos/blob/main/Concepto-Relacion.ipynb>



La excelencia no se improvisa

síguenos

