

Matemáticas Discretas

Propiedades de las relaciones

Clase 7



INTRODUCCIÓN DE LA CLASE

Las relaciones entre elementos de un conjunto no solo permiten establecer conexiones, sino también identificar estructuras que modelan comportamientos importantes en matemáticas, informática y otras áreas. En esta clase, nos enfocaremos en analizar algunas propiedades de las relaciones: reflexividad, simetría y transitividad. Estas propiedades no son simplemente etiquetas, sino características que determinan cómo se comportan los elementos entre sí dentro de una relación, y nos permiten clasificar distintos tipos de relaciones con base en su estructura interna.

Además, exploraremos un tipo particular de relaciones que cumplen ciertas combinaciones de estas propiedades: las relaciones de orden. Este tipo de relaciones nos permite organizar los elementos de un conjunto de forma jerárquica, como ocurre con los números o con conjuntos mediante la inclusión. Veremos cómo representarlas gráficamente, especialmente a través de los diagramas de Hasse, que nos ofrecen una forma intuitiva de visualizar estructuras ordenadas. A lo largo de esta clase, aprenderás a identificar estas propiedades en diferentes representaciones y a construir ejemplos de relaciones que las posean o no.

Clase 7: Propiedades de las relaciones

RDA 2: Resolver problemas prácticos y teóricos mediante la aplicación de técnicas y herramientas de la Matemática Discreta, como lógica matemática, análisis de conjuntos y teoría de grafos en el manejo de estructuras discretas.

7. Propiedades de las relaciones

¿En qué se parecen una red de amigos, un árbol genealógico y la jerarquía de usuarios en un sistema? En todos los casos, existe algún tipo de relación entre elementos: personas que se conocen, individuos que descienden unos de otros o usuarios con distintos niveles de acceso. Pero no todas las relaciones se comportan igual: algunas son mutuas, otras no; algunas permiten volver sobre los

pasos, mientras que otras implican una dirección fija. Comprender las propiedades que puede tener una relación nos permite clasificarlas, interpretarlas y usarlas con fines específicos.

En esta clase analizaremos tres propiedades fundamentales: reflexividad, simetría y transitividad. Estas propiedades no solo nos permiten caracterizar las relaciones, sino también identificar estructuras importantes como las relaciones de equivalencia o las relaciones de orden. Empezaremos con ejemplos cotidianos, los formalizaremos matemáticamente y aprenderemos a reconocer estas propiedades en diferentes contextos, ya sea en forma de listas de pares ordenados, representaciones gráficas o matrices.

Ejemplo 1. Considere el conjunto $A = \{\text{Ana}, \text{Luis}, \text{Carlos}\}$. Veamos tres relaciones posibles sobre este conjunto y algunas propiedades que pueden cumplir:

- Relación de amistad R_1 : en esta relación se entendería que si Ana es amiga de Luis, entonces Luis es amigo de Ana. Es decir, $(\text{Ana}, \text{Luis}) \in R_1$ implica $(\text{Luis}, \text{Ana}) \in R_1$.
- Relación de vivir en la misma ciudad R_2 : en esta relación se tiene que Ana vive en la misma ciudad que Ana (ella misma). Es decir, $(\text{Ana}, \text{Ana}) \in R_2$.
- Relación de jerarquía R_3 : supongamos que en una organización, Ana supervisa a Luis y Luis supervisa a Carlos, entonces Ana supervisa a Carlos. Es decir, si $(\text{Ana}, \text{Luis}) \in R_3$ y $(\text{Luis}, \text{Carlos}) \in R_3$, entonces $(\text{Ana}, \text{Carlos}) \in R_3$.

A lo largo de esta sección, estudiaremos cómo formalizar e identificar estas propiedades, qué combinaciones dan lugar a relaciones especiales como las de equivalencia y orden.

7.1. Reflexividad

Piensa en la idea de que algo está «relacionado consigo mismo». Por ejemplo, una persona siempre mide lo mismo que ella misma, o un número es siempre igual a sí mismo. Esta es la esencia de una relación **reflexiva**: todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo (Johnsonbaugh 2018).

Definición 1: Relación reflexiva.

Sea R una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es **reflexiva** si para cada elemento x en A , el par ordenado (x, x) pertenece a R . Es decir, para todo $x \in A$, xRx .

En otras palabras, una relación es reflexiva si y solo si cada elemento del conjunto se relaciona consigo mismo.

Ejemplo 2. Considera el conjunto de personas $A = \{\text{Ana}, \text{Luis}, \text{Carlos}\}$. La relación «vivir en la misma ciudad que» es reflexiva, ya que Ana vive en la misma ciudad que Ana, Luis en la misma que Luis, y Carlos en la misma que Carlos. Por lo tanto, los pares (Ana, Ana) , $(\text{Luis}, \text{Luis})$ y $(\text{Carlos}, \text{Carlos})$ deben estar en la relación.

Si R es una relación sobre un conjunto finito A , podemos analizar si es reflexiva observando su representación matricial. La relación R es reflexiva si y solo si todos los elementos de la diagonal principal de su matriz de representación M_R son iguales a 1. Esto se debe a que la diagonal principal de la matriz corresponde a los pares (x_i, x_i) , que son los pares de identidad que definen la reflexividad.

Ejemplo 3. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la relación

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}.$$

La matriz de representación de R es:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

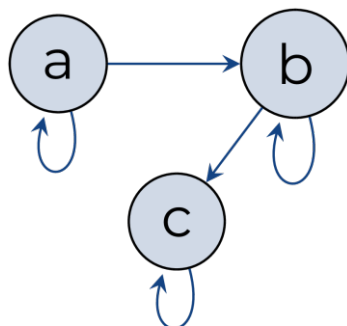
Como todos los elementos de la diagonal principal son 1, la relación R es reflexiva.

En lo que respecta a la representación digráfica, una relación R sobre un conjunto A es reflexiva si y solo si en su digrafo asociado, cada vértice tiene un bucle (una arista que va del vértice a sí mismo).

Ejemplo 4. Considera el conjunto y la relación del ejemplo anterior. La representación digráfica la observamos en la siguiente figura.

Figura 1

Representación digráfica de una relación reflexiva



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Como todos los vértices tienen un bucle, concluimos, nuevamente, que la relación es reflexiva.

Ejemplo 5. Sea T una relación sobre los números enteros $\mathbb{Z}$ definida como « m es menor o igual a n », es decir, $m \leq n$. Esta relación es reflexiva, ya que cualquier entero m , cumple que $m \leq m$. Por lo tanto, el par (m, m) siempre pertenece a T para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 6. Consideremos la relación de congruencia módulo 3 sobre los enteros. Es decir, sea T una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como sigue: $(m, n) \in T \Leftrightarrow 3 \mid (m - n)$. Esto significa que dos números están relacionados si su diferencia es divisible por 3. Por ejemplo, $(4, 4) \in T$, ya que $4 - 4 = 0$ y $3 \mid 0$. En general, cualquier número es congruente consigo mismo módulo 3, pues $m - m = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, T es una relación reflexiva.

7.2. Simetría y transitividad

Algunas relaciones son recíprocas: si Ana es hermana de Luis, entonces Luis también es hermano de Ana. Otras no lo son: si Ana es madre de Luis, no se deduce que Luis sea madre de Ana. A esta idea de reciprocidad se la llama **simetría** (Johnsonbaugh 2018).

Definición 2: Relación simétrica

Sea R una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es **simétrica** si, para todo $x, y \in A$, se tiene que xRy implica yRx .

Una forma algebraica de caracterizar la simetría en relaciones finitas es a través de matrices. Si R es una relación sobre un conjunto finito A , entonces R es simétrica si y solo si su matriz de representación M_R es igual a su traspuesta. Es decir:

$$R = R^{-1} \Leftrightarrow M_R = M_R^T.$$

Esto quiere decir que la matriz de una relación simétrica es también una matriz simétrica.

Ejemplo 7. Sea $A = \{a, b, c\}$ y consideremos la relación

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (b, b)\}$$

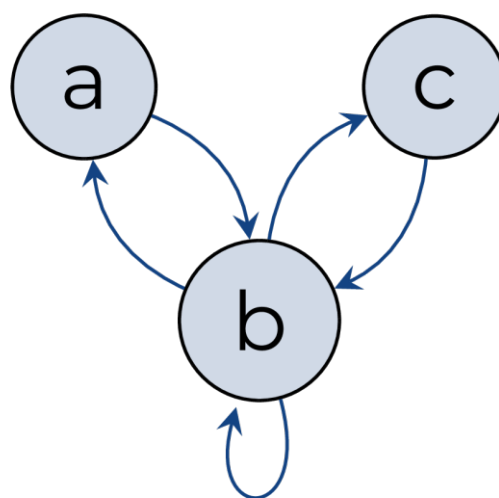
La matriz de R es:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como esta matriz es simétrica, concluimos que la relación R es simétrica.

En la representación digráfica, una relación es simétrica si cada flecha (x, y) tiene una flecha en sentido contrario (y, x) . Lo podemos corroborar en la representación digráfica de la relación del ejemplo anterior:

Figura 2. Representación digráfica de una relación simétrica



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

No todas las relaciones recíprocas lo son en sentido estricto. A veces, si x se relaciona con y y y con x , esto solo puede suceder si $x = y$. A este comportamiento se lo conoce como **antisimetría**.

Definición 3: Relación antisimétrica.

Sea R una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es **antisimétrica** si, para todo $x, y \in A$, se cumple que si xRy y yRx , entonces $x = y$.

Por ejemplo, la relación «menor o igual» ($\leq$) es antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces necesariamente $a = b$.

Por otro lado, algunas relaciones permiten conectar elementos mediante pasos intermedios. Por ejemplo, si Ana es jefa de Luis, y Luis es jefe de Carla, entonces Ana es jefa de Carla de forma indirecta. Esta es la idea detrás de la **transitividad** (Johnsonbaugh 2018).

Definición 4: Relación transitiva.

Sea R una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es **transitiva** si, para todo $x, y, z \in A$, se tiene que xRy y yRz implica xRz .

En otras palabras, si un elemento se relaciona con otro, y ese otro con un tercero, entonces el primero debe estar relacionado con el tercero.

Formalmente, se cumple que:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow R^2 \subseteq R.$$

Ejemplo 8. Sea $A = \{1,2,3\}$ y

$$R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$$

Como $(1,2) \in R$ y $(2,3) \in R$ implica $(1,3) \in R$, entonces la relación es transitiva.

Ejemplo 9. La relación «es mayor que» sobre los enteros es transitiva: si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Ejemplo 10. La relación «ser descendiente de» también es transitiva: si Ana es descendiente de Luis, y Luis es descendiente de Carla, entonces Ana es descendiente de Carla, lo cual indica una relación transitiva.

Ejemplo 11. Consideremos la relación de la figura anterior. Observamos que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, pero $(a, c) \notin R$, por lo que la relación no es transitiva. En el grafo dirigido de esta relación hay flechas de a a b y de b a c , pero no hay una flecha de a a c , lo cual rompe la cadena de transitividad.

Para reforzar lo aprendido sobre los distintos tipos de relaciones (reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva), puedes revisar el siguiente video con ejercicios resueltos y explicaciones paso a paso:

- **Título del enlace:** Tipos de relaciones
- **Descripción del enlace:** Ejercicios explicados sobre relaciones reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.

Enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=CWBz004a3WU>

Cerradura de una relación

A veces, una relación dada no cumple ciertas propiedades, pero queremos construir la relación más pequeña que la contenga y sí tenga esa propiedad. A este proceso se lo llama **cerradura**.

- $R \cup \Delta_A$ es la **cerradura reflexiva** de R , es decir, la relación reflexiva más pequeña que contiene a R .
- $R \cup R^{-1}$ es la **cerradura simétrica** de R .

Ejemplo 12. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación

$$R = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

Cerradura reflexiva: Para que R sea reflexiva, debe contener todos los pares de la forma (x, x) para $x \in A$. La cerradura reflexiva de R se obtiene agregando los pares:

$$(1, 1), \quad (2, 2), \quad (3, 3).$$

Por tanto, la cerradura reflexiva es:

$$R_{\text{reflexiva}} = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3)\}.$$

Ejemplo 13. Sea $A = \{1,2,3\}$ y la relación

$$R = \{(1,2), (2,3)\}.$$

Cerradura simétrica: Para que R sea simétrica, debe contener el par inverso de cada elemento. En este caso, $(2,1)$ y $(3,2)$ no están en R , por lo tanto los agregamos.

La cerradura simétrica es:

$$R_{\text{simétrica}} = \{(1,2), (2,3), (2,1), (3,2)\}.$$

Para la transitividad, se define de la siguiente manera (Epp 2020):

Definición 5: Cerradura transitiva.

Sea R una relación sobre un conjunto A . La cerradura transitiva de R , denotada R^t , es la relación sobre A que cumple:

1. R^t es transitiva.
2. $R \subseteq R^t$.
3. Si S es cualquier relación transitiva tal que $R \subseteq S$, entonces $R^t \subseteq S$.

Ejemplo 14. Sea $A = \{0,1,2,3\}$ y $R = \{(0,1), (1,2), (2,3)\}$.

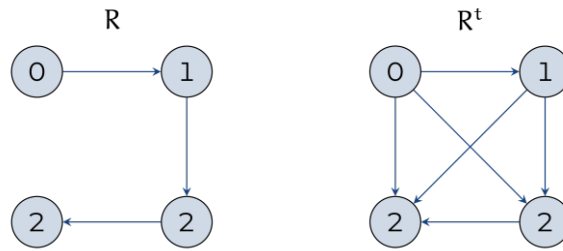
- Como $(0,1) \in R$ y $(1,2) \in R$, entonces $(0,2) \in R^t$.
- Como $(0,2) \in R^t$ y $(2,3) \in R$, entonces $(0,3) \in R^t$.
- Como $(1,2) \in R$ y $(2,3) \in R$, entonces $(1,3) \in R^t$.

Por tanto, la cerradura transitiva de R es:

$$R^t = \{(0,1), (1,2), (2,3), (0,2), (1,3), (0,3)\}.$$

Figura 3

Representación digráfica de la cerradura transitiva



Nota: adaptado de Epp (2020).

7.3. Relaciones de orden y ejemplos

Las relaciones no solo sirven para establecer conexiones entre elementos, sino también para organizarlos. Piensa en cómo se puede ordenar una lista de tareas por prioridad, los archivos en una carpeta por fecha o los números del 1 al 10 por su tamaño. Estas formas de organizar datos se basan en relaciones con propiedades especiales. En esta sección exploraremos las llamadas **relaciones de orden**.

Una relación que permite ordenar los elementos de un conjunto debe cumplir tres propiedades fundamentales: ser reflexiva, antisimétrica y transitiva (Johnsonbaugh 2018).

Definición 6: Relación de orden parcial.

Sea R una relación sobre un conjunto A . Se dice que R es un **orden parcial** si cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva: Para todo $x \in A$, se cumple $(x, x) \in R$.
- Antisimétrica: Si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces $x = y$.
- Transitiva: Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

Un ejemplo clásico de orden parcial es la relación «menor o igual que» en los números enteros. Si definimos:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \leq y\}$$

entonces R es reflexiva (todo número es menor o igual a sí mismo), antisimétrica (si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$) y transitiva (si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$). Por tanto, es una relación de orden.

A veces, no todos los elementos pueden compararse. Si en una relación de orden parcial hay elementos $x, y \in A$ tales que ni $(x, y) \in R$ ni $(y, x) \in R$, se dice que x y y son **incomparables**. Si todos los elementos se pueden comparar, se dice que es un **orden total**.

Ejemplo 15. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ con la relación

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\},$$

donde xRy significa « $x \leq y$ ».

En este caso, todo par de elementos es comparable: por ejemplo, 1 y 2 son comparables porque $(1, 2) \in R$, y 2 y 1 también son comparables, ya que podemos deducir de la relación total cuál de los dos es menor. Esto ocurre para todos los pares. Por tanto, esta es una relación de orden total.

Ejemplo 16. Sea $B = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ con la relación $\subseteq$ (inclusión de conjuntos). Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, por lo que es un orden parcial.

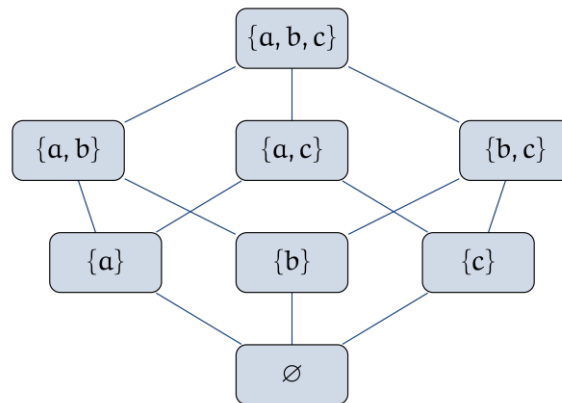
Sin embargo, no todos los elementos son comparables: por ejemplo, $\{a\}$ y $\{b\}$ no son subconjuntos uno del otro, por lo tanto, son incomparables.

Para representar gráficamente un conjunto con una relación de orden parcial se utiliza el **diagrama de Hasse**. Esta representación elimina información redundante: no se dibujan los lazos (reflexividad), no se indican las flechas (la orientación se asume de abajo hacia arriba), y se omiten las relaciones implícitas por transitividad (Diagrama de Hasse, n.d.).

Ejemplo 17. Sea $A = \{a, b, c\}$. Consideremos la relación de inclusión $\subseteq$ entre los elementos de $\mathcal{P}(A)$. Esta relación es un orden parcial. El diagrama de Hasse correspondiente es el siguiente:

Figura 4

Diagrama de Hasse del conjunto de subconjuntos de $\{a, b, c\}$



Nota: creación propia (Merino, A., 2025).

Si deseas profundizar en el estudio de las relaciones de orden, incluyendo más ejemplos y formalizaciones rigurosas, puedes revisar el siguiente enlace:

- **Título del enlace:** Órdenes parciales y totales
- **Descripción del enlace:** Formalización y profundización de órdenes.

Enlace: <https://blog.nekomath.com/algebra-superior-i-ordenes-parciales/>

Referencias

Diagrama de Hasse. (s.f.). En *Wikipedia*. [Recuperado el 7 de agosto de 2025].

https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Hasse

Epp, S. S. (2020). *Discrete Mathematics with Applications* (5.a ed.). Cengage Learning.

Johnsonbaugh, R. (2018). *Discrete Mathematics* (8.a ed.). Pearson Educación.

Términos

- **Relación reflexiva:** una relación es reflexiva si todo elemento está relacionado consigo mismo.
- **Relación simétrica:** una relación es simétrica si cuando un elemento se relaciona con otro, el segundo también se relaciona con el primero.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Ejercicios resueltos de Propiedades de las relaciones
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una serie de ejercicios resueltos, con su explicación paso a paso, sobre las Propiedades de las relaciones.
- **Enlace:** <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase07/EjerciciosResueltosClase07.pdf>



La excelencia no se improvisa

síguenos

