

Matemáticas Discretas

Relaciones de equivalencia

Clase 8



Introducción de la clase

¿Alguna vez te has preguntado por qué dos objetos diferentes pueden considerarse «iguales» en ciertos contextos? En matemáticas, esta idea de «igualdad» no se limita solo a que dos números sean idénticos, sino que puede extenderse a muchas otras formas de similitud: dos archivos con el mismo nombre, dos direcciones IP que pertenecen al mismo rango, o dos mensajes cifrados con el mismo algoritmo. Para modelar estas situaciones, usamos un tipo especial de relación llamada relación de equivalencia. En esta clase descubrirás cómo estas relaciones nos permiten agrupar elementos en subconjuntos coherentes llamados clases de equivalencia, y cómo estas clases organizan naturalmente a un conjunto en particiones.

Estudiar relaciones de equivalencia no solo refuerza tu comprensión sobre las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, sino que también abre la puerta a aplicaciones útiles en programación, bases de datos, estructuras algebraicas y sistemas de clasificación. A través de ejemplos concretos, analizaremos cómo se construyen estas relaciones y exploraremos cómo agrupan elementos similares, permitiendo una organización lógica y eficiente de la información.

Clase 8: Relaciones de equivalencia

RDA 2: Resolver problemas prácticos y teóricos mediante la aplicación de técnicas y herramientas de la Matemática Discreta, como lógica matemática, análisis de conjuntos y teoría de grafos en el manejo de estructuras discretas.

8. Relaciones de equivalencia

Desde etapas tempranas de tu formación matemática, aprendiste que algunas expresiones distintas pueden representar el mismo valor. Por ejemplo (Johnsonbaugh 2018), al trabajar con fracciones, sabes que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{-3}{-6} = \frac{15}{30} = \dots$$

son todas formas distintas de expresar la misma cantidad. Aunque se ven diferentes, todas representan el mismo número racional: un medio.

Este fenómeno de «diferentes formas para un mismo objeto» es una pista del concepto más profundo que exploraremos en esta clase: las **relaciones de equivalencia**. Estas relaciones nos permiten agrupar elementos que, aunque no idénticos a simple vista, comparten alguna propiedad en común que los caracteriza. Así, podemos clasificar o agrupar elementos que «en cierto sentido, son lo mismo», lo cual es una herramienta poderosa tanto en la matemática pura como en muchas aplicaciones prácticas de la informática, la lógica y la ciberseguridad.

8.1. Definición y ejemplos

Al estudiar relaciones, observamos que algunas poseen propiedades especiales que las hacen particularmente útiles para clasificar y organizar conjuntos. Las **relaciones de equivalencia** son un ejemplo fundamental de este tipo (Epp 2020).

Definición 1: Relación de equivalencia.

Sea R una relación sobre un conjunto A . Decimos que R es una relación de equivalencia si cumple las siguientes tres propiedades:

1. **Reflexiva:** Para todo $x \in A$, se cumple xRx .
2. **Simétrica:** Si xRy , entonces yRx .
3. **Transitiva:** Si xRy y yRz , entonces xRz .

En este caso, escribimos $x \sim_R y$ para denotar que x es equivalente a y bajo la relación R . Si no hay ambigüedad, simplemente escribimos $x \sim y$.

Ejemplo 1. Mismo (primer) apellido. Sea A el conjunto de todas las personas en una base de datos. Definimos $x \sim y$ si x y y tienen el mismo apellido. Esta relación es:

- **Reflexiva:** toda persona tiene el mismo apellido que sí misma.
- **Simétrica:** si x tiene el mismo apellido que y , entonces y tiene el mismo apellido que x .
- **Transitiva:** si x y y tienen el mismo apellido, y y y z también, entonces x y z también lo tienen.

Ejemplo 2. Congruencia módulo n . Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Definimos una relación $\sim$ sobre $\mathbb{Z}$ como:

$$a \sim b \quad \text{si y solo si } a \equiv b \pmod{n},$$

es decir, si $n \mid (a - b)$. Esta relación es una relación de equivalencia, pues cumple:

- **Reflexiva:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $a - a = 0$, y $n \mid 0$, por lo tanto $a \sim a$.
- **Simétrica:** Si $a \sim b$, entonces $n \mid (a - b)$, lo que implica que también $n \mid (b - a)$, por lo tanto $b \sim a$.
- **Transitiva:** Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $n \mid (a - b)$ y $n \mid (b - c)$. Al sumar estas dos igualdades, se obtiene $n \mid (a - c)$, por lo tanto $a \sim c$.

Por ejemplo, si $n = 5$, entonces $12 \sim 2$ porque $12 - 2 = 10$, y 10 es divisible por 5.

Ejemplo 3. Funciones hash. Sea S el conjunto de todas las cadenas de texto y f una función hash que mapea cada cadena a un valor entero. Definimos una relación $\sim$ tal que, para $s, t \in S$,

$$s \sim t \quad \text{si y solo si } f(s) = f(t).$$

Esta relación es:

- **Reflexiva:** Para cualquier cadena s , se cumple que $f(s) = f(s)$.
- **Simétrica:** Si $f(s) = f(t)$, entonces $f(t) = f(s)$.
- **Transitiva:** Si $f(s) = f(t)$ y $f(t) = f(u)$, entonces $f(s) = f(u)$.

Un ejemplo simple de una función hash podría ser una que devuelve la longitud de una cadena. En este caso, «hola» y «casa» son equivalentes, ya que $\text{longitud}(\text{«hola»}) = 4$ y $\text{longitud}(\text{«casa»}) = 4$.

Ejemplo 4. Identificadores con prefijo igual. Sea L el conjunto de todos los identificadores válidos en un lenguaje de programación. Definimos una relación $\sim$ sobre L tal que, para $s, t \in L$,

$$s \sim t \quad \text{si y solo si los primeros ocho caracteres de } s \text{ y } t \text{ son iguales.}$$

Esta relación también es una relación de equivalencia, ya que cumple:

- **Reflexiva:** Cualquier identificador tiene los primeros ocho caracteres iguales a sí mismo.
- **Simétrica:** Si los primeros ocho caracteres de s y t son iguales, entonces los de t y s también lo son.
- **Transitiva:** Si s y t tienen los primeros ocho caracteres iguales, y t y u también, entonces s y u los tienen iguales.

Este tipo de relación se puede usar, por ejemplo, para detectar conflictos entre identificadores en ciertos compiladores antiguos que solo consideran los primeros ocho caracteres como significativos.

Para una introducción detallada sobre qué es una relación de equivalencia, puedes consultar el siguiente enlace.

- **Título del enlace:** ¿Qué es una relación de equivalencia? Definición sencilla y ejemplo fácil.
- **Descripción del enlace:** Explicación paso a paso del concepto de relación de equivalencia.

Enlace: <https://youtu.be/utvYQYpROfk?si=bxyq4WdMPiLmv3>

8.2. Clases de equivalencia

Una vez que hemos definido una relación de equivalencia, surge naturalmente la idea de agrupar todos los elementos que son equivalentes entre sí. Este conjunto recibe el nombre de **clase de equivalencia** (Epp 2020).

Definición 2: Clase de equivalencia.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cada $x \in A$, la **clase de equivalencia** de x se define como:

$$[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

La clase de equivalencia $[x]$ contiene todos los elementos del conjunto que son equivalentes a x . Es decir, todos los elementos que están «relacionados» con x según

la relación definida. Una propiedad de las relaciones de equivalencia es que los elementos equivalentes tienen la misma clase:

$$x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y].$$

Y, en consecuencia, las clases de equivalencia o son iguales, o son completamente disjuntas:

$$[x] = [y] \quad \text{o} \quad [x] \cap [y] = \emptyset.$$

Ejemplo 5. Clases de equivalencia a partir de una relación dada por pares ordenados. Sea $A = \{0,1,2,3,4\}$ y definamos la relación R sobre A mediante el conjunto de pares:

$$R = \{(0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,0), (4,4)\}.$$

Se puede verificar que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto, una relación de equivalencia.

Determinamos las clases de equivalencia calculando los elementos relacionados con cada uno:

$$\begin{aligned} [0] &= \{x \in A: xR0\} = \{0,4\}, \\ [1] &= \{x \in A: xR1\} = \{1,3\}, \\ [2] &= \{x \in A: xR2\} = \{2\}, \\ [3] &= \{x \in A: xR3\} = \{1,3\}, \\ [4] &= \{x \in A: xR4\} = \{0,4\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las clases de equivalencia distintas inducidas por R son:

$$\{0,4\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2\}.$$

Ejemplo 6. Clases de equivalencia de proposiciones lógicas. Sea S el conjunto de todas las proposiciones construidas a partir de un número finito de letras proposicionales. Definimos una relación $\sim$ tal que $P \sim Q$ si y solo si P y Q son lógicamente equivalentes, es decir, tienen la misma tabla de verdad. Esta es una relación de equivalencia.

Dado, las proposiciones $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$ son equivalentes, se tiene que

$$[p \rightarrow q] = \{p \rightarrow q, \neg p \vee q, \dots\}.$$

De este modo, cada clase de equivalencia contiene todas las proposiciones que son lógicamente equivalentes entre sí.

Ejemplo 7. Congruencia módulo 5. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y definamos la relación $\sim$ por:

$$a \sim b \quad \text{si y solo si} \quad a \equiv b \pmod{5}.$$

Esta relación es de equivalencia, como se ha demostrado previamente, y permite agrupar los enteros según su residuo al dividirlos por 5.

Cada clase de equivalencia está compuesta por todos los enteros que dejan el mismo residuo al dividirse por 5. Por tanto, las clases de equivalencia distintas son:

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}, \\ [1] &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}, \\ [2] &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}, \\ [3] &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}, \\ [4] &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}. \end{aligned}$$

Estas cinco clases de equivalencia forman una partición de $\mathbb{Z}$, es decir, cada número entero pertenece a una y solo una de ellas.

Para reforzar tu comprensión sobre las clases de equivalencia, sus propiedades y cómo se construyen a partir de una relación dada, te recomendamos revisar el siguiente enlace.

- **Título del enlace:** ¿Qué son las clases de equivalencia y qué propiedades tienen?
- **Descripción del enlace:** Explicación clara de la definición, propiedades y varios ejemplos de clases de equivalencia.

Enlace: https://youtu.be/md3edmSFle0?si=7uq4xG7DgH_pT6CA

8.3. Particiones de un conjunto

Uno de los resultados más importantes asociados a las relaciones de equivalencia es que estas dividen al conjunto en subconjuntos disjuntos que lo cubren completamente. Esta estructura natural se denomina **partición**.

Definición 3.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A . El **conjunto cociente** de A por $\sim$ se define como:

$$A/\sim = \{[x] \subseteq A : x \in A\}.$$

Ejemplo 8. Sea $A = \mathbb{Z}$ y definamos la relación $\sim$ tal que $a \sim b$ si y solo si $a \equiv b \pmod{3}$. Esta relación es de equivalencia y genera las siguientes clases:

$$\begin{aligned}[0] &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\[1] &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\[2] &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.\end{aligned}$$

El conjunto cociente de $\mathbb{Z}$ por $\sim$ está formado por estas tres clases:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}.$$

Cada número entero pertenece exactamente a una de estas clases.

Este ejemplo muestra cómo la relación de congruencia módulo 3 divide al conjunto de los enteros en tres clases de equivalencia, según el residuo al dividir por 3. Cada número entero pertenece exactamente a una de estas clases, y no puede pertenecer a más de una. Este tipo de estructura es fundamental en criptografía, teoría de números y codificación, donde la clasificación por residuos permite trabajar con bloques o ciclos repetitivos de forma ordenada.

Ejemplo 9. Supongamos que tenemos el conjunto A formado por las direcciones de correo electrónico de todos los usuarios registrados:

$$A = \{ \text{ana@empresa.com, juan@empresa.com,} \\ \text{luis@otro.org, maria@otro.org, sofia@datos.net} \}.$$

Definimos una relación $\sim$ sobre A tal que: $x \sim y$ si y solo si x y y tienen el mismo dominio de correo.

Esta relación es de equivalencia porque:

- **Reflexiva:** Todo correo tiene el mismo dominio que sí mismo.
- **Simétrica:** Si dos correos tienen el mismo dominio, entonces se relacionan en ambos sentidos.

- **Transitiva:** Si x y y tienen el mismo dominio, y y z también, entonces x y z lo tienen.

Las clases de equivalencia resultantes son:

$$\begin{aligned} [\text{ana}@empresa.com] &= \{\text{ana}@empresa.com, \text{juan}@empresa.com\}, \\ [\text{luis}@otro.org] &= \{\text{luis}@otro.org, \text{maria}@otro.org\}, \\ [\text{sofia}@datos.net] &= \{\text{sofia}@datos.net\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto cociente $A/\sim$ está formado por estas tres clases, cada una representando un grupo de usuarios por dominio:

$$A/\sim = \{[@empresa.com], [@otro.org], [@datos.net]\}.$$

En este caso práctico, se observa cómo una relación de equivalencia permite organizar a los usuarios de un sistema de información según el dominio de su correo electrónico. El conjunto cociente agrupa a los usuarios que comparten la misma organización o proveedor, lo cual puede ser útil para aplicar políticas de acceso, segmentar bases de datos, o generar reportes por entidad. Así, las relaciones de equivalencia no solo simplifican la estructura de los datos, sino que también permiten realizar análisis más eficientes y relevantes para la gestión de sistemas digitales.

Cada clase de equivalencia $[x]$ es un subconjunto de A , y el conjunto de todas estas clases forma una colección de subconjuntos que:

- son mutuamente disjuntos (no comparten elementos),
- y cuya unión es todo el conjunto A .

Por tanto, se dice que el conjunto cociente $A/\sim$ **genera una partición de A** .

Definición 4.

Una **partición** de un conjunto A es un conjunto (finito o infinito) de subconjuntos no vacíos $\{A_1, A_2, \dots\}$ tales que:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$,
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots = A$.

La siguiente figura se ilustra una partición de un conjunto A formado por seis subconjuntos disjuntos.

Figura 1. *Partición de un conjunto en subconjuntos disjuntos*



Nota: tomado de Partición de un conjunto (n.d.)

Esta correspondencia es tan estrecha que puede demostrarse que toda partición de un conjunto define una relación de equivalencia, y a su vez, toda relación de equivalencia define una partición. Es decir, existe una relación biunívoca entre estos dos conceptos.

Ejemplo 10. La relación R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A . Determina las clases de equivalencia distintas de R :

$$A = \{0,1,2,3,4\}, \quad R = \{(0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,0), (4,4)\}.$$

Solución: Consideremos elemento por elemento

- Para $0 \in A$, tenemos $0 \sim 0, 0 \sim 4$, por lo tanto,

$$[0] = \{0,4\}$$

- Para $1 \in A$, tenemos $1 \sim 1, 1 \sim 3$, por lo tanto,

$$[1] = \{1,3\}$$

- Para $2 \in A$, tenemos que $2 \sim 2$, por lo tanto,

$$[2] = \{2\}$$

- Para $3 \in A$, como $3 \sim 1$, entonces,

$$[3] = [1] = \{1,3\}$$

- Para $4 \in A$, como $4 \sim 0$, entonces,

$$[4] = [0] = \{0,4\}$$

Por tanto, las clases de equivalencia (distintas) son

$$[0] = [4] = \{0,4\}, \quad [1] = [3] = \{1,3\}, \quad [2] = \{2\}.$$

Así, el conjunto cociente es

$$A/\sim = \{\{0,4\}, \{1,3\}, \{2\}\}.$$

Referencias

Epp, S. S. (2020). *Discrete Mathematics with Applications* (5.a ed.). Cengage Learning.

Johnsonbaugh, R. (2018). *Discrete Mathematics* (8.a ed.). Pearson Educación.

Partición de un conjunto. (s.f.). *En Wikipedia*. [Recuperado el 7 de agosto de 2025].
https://es.wikipedia.org/wiki/Partici%C3%B3n_de_un_conjunto.

Términos

- **Relación de equivalencia:** es una relación que cumple tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.
- **Clase de equivalencia:** es el conjunto de todos los elementos que son equivalentes entre sí según una relación de equivalencia.

Profundización

Recurso 1

- **Título del recurso:** Relaciones de Equivalencia y Funciones Hash
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una guía de Python que relaciona las Funciones Hash con las relaciones de equivalencia.

- **Enlace:** <https://colab.research.google.com/github/andres-merino/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/blob/main/pages/clases/clase08/FuncionesHash.ipynb>

Recurso 2

- **Título del recurso:** Ejercicios resueltos de Relaciones de Equivalencia
- **Descripción del enlace:** Este recurso presenta una serie de ejercicios resueltos, con su explicación paso a paso, sobre las Relaciones de Equivalencia.

Enlace: <https://andres-merino.github.io/MatematicasDiscretas-Virtual-05-N0279/pages/clases/clase08/EjerciciosResueltosClase08.pdf>



La excelencia no se improvisa

síguenos

